TAHRÎRU USÛLİ'L-HENDESE VE'L-HİSÂB

Öklides'in Elementler Kitabının Tahrîri

NASÎRÜDDİN TÛSÎ

TÜRKİYE YAZMA ESERLER KURUMU BAŞKANLIĞI YAYINLARI: 175

Bilim ve Felsefe Serisi	:	62
Kitabın Adı	:	TAHRÎRU USÛLİ'L-HENDESE VE'L-HİSÂB Öklides'in Elementler Kitabının Tahrîri
Müellifi	:	Ebû Ca'fer Nasîrüddîn Muhammed b. Muhammed b. el-Hasen et-Tûsî (ö. 672/1274)
Özgün Dili	:	Arapça
Hazırlayan	:	Prof. Dr. Atilla Bir Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi (Bilim Tarihi) Prof. Dr. Mustafa Kaçar Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi (Bilim Tarihi)
Son Okuma	:	Ziya Çetintaş, Yazma Eser Uzmanı Muhammet Uysal, Yazma Eser Uzmanı
Arşiv Kayıt	:	Millet Yazma Eser Ktp., Feyzullah Efendi Koleksiyonu, nr. 1359
Yapım	:	Yüksel Yücel
Baskı	:	İmak Ofset Basım Yayın Merkez Mah. Ataturk Cad. Gol Sk. No. 1 Yenibosna / İstanbul Tel: 444 62 18 www.imakofset.com.tr / Sertifika No. 45523
Baskı Yeri ve Yılı	:	İstanbul 2020
Baskı Miktarı	:	1. Baskı, 1500 adet

KÜTÜPHANE BİLGİ KARTI
Library of Congress A CIP Catalog Record

Nasîrüddin Tûsî,
Öklides'in Elementler Kitabının Tahrîri, *Tahrîru Usûli'l-Hendese ve'l-Hisâb*

1. Nasîrüddin Tûsî, 2. Matematik, 3. Geometri, 4. Hesap, 5. Sayı
ISBN: 978-975-17-5070-9

Copyright © Türkiye Yazma Eserler Kurumu Başkanlığı. Her hakkı mahfuzdur.
Bütün yayın hakları *Türkiye Yazma Eserler Kurumu Başkanlığı*na aittir. Başkanlığın izni olmaksızın tümüyle veya kısmen, hiçbir yolla ve hiçbir ortamda yayımlanamaz ve çoğaltılamaz.

T.C. Türkiye Yazma Eserler Kurumu Başkanlığı
Süleymaniye Mh. Kanuni Medresesi Sk. No: 5 34116 Fatih / İstanbul
Tel.: +90 (212) 511 36 37
Faks: +90 (212) 511 37 00
info@yek.gov.tr
www.yek.gov.tr

TAHRÎRU USÛLİ'L-HENDESE VE'L-HİSÂB

ÖKLİDES'İN ELEMENTLER KİTABININ TAHRÎRİ

(İNCELEME - ÇEVİRİ)

NASÎRÜDDİN TÛSÎ
(ö. 1274)

Hazırlayan
Atilla Bir
Mustafa Kaçar

TÜRKİYE
YAZMA
ESERLER
KURUMU
BAŞKANLIĞI

TAKDİM

İnsanlık tarihi, akıl ve düşünce sahibi bir varlık olan insanın kurduğu medeniyetleri, medeniyetler arasındaki ilişkileri anlatır. İnsan, zihnî faaliyetlerde bulunma kabiliyetiyle bilim, sanat ve kültür değerleri üretir, ürettiği kültür ve düşünce ile de tarihin akışına yön verir.

Medeniyetler, kültürler, dinler, ideolojiler, etnik ve mezhebî anlayışlar arasındaki ilişkiler kimi zaman çatışma ve ayrışmalara, kimi zaman da uzlaşma ve iş birliklerine zemin hazırlamıştır.

İnsanların, toplumların ve devletlerin gücü, ürettikleri kültür ve medeniyet değerlerinin varlığıyla ölçülmüştür. İnsanoğlu olarak daha aydınlık bir gelecek inşâ edebilmemiz, insanlığın ortak değeri, ortak mirası ve ortak kazanımı olan kültür ve medeniyet değerlerini geliştirebilmemizle mümkündür.

Bizler, Selçuklu'dan Osmanlı'ya ve Cumhuriyet'e kadar büyük devletler kuran bir milletiz. Bu büyük devlet geleneğinin arkasında büyük bir medeniyet ve kültür tasavvuru yatmaktadır.

İlk insandan günümüze kadar gök kubbe altında gelişen her değer, hakikatin farklı bir tezahürü olarak bizim için muteber olmuştur. İslam ve Türk tarihinden süzülüp gelen kültürel birikim bizim için büyük bir zenginlik kaynağıdır. Bilgiye, hikmete, irfana dayanan medeniyet değerlerimiz tarih boyunca sevgiyi, hoşgörüyü, adaleti, kardeşlik ve dayanışmayı ön planda tutmuştur.

Gelecek nesillere karşı en büyük sorumluluğumuz, insan ve âlem tasavvurumuzun temel bileşenlerini oluşturan bu eşsiz mirasın etkin bir şekilde aktarılmasını sağlamaktır. Bugünkü ve yarınki nesillerimizin gelişimi, geçmişimizden devraldığımız büyük kültür ve medeniyet mirasının daha iyi idrak edilmesine ve sahiplenilmesine bağlıdır.

Felsefeden tababete, astronomiden matematiğe kadar her alanda, Medine'de, Kahire'de, Şam'da, Bağdat'ta, Buhara'da, Semerkant'ta, Horasan'da, Konya'da, Bursa'da, İstanbul'da ve coğrafyamızın her köşesinde üretilen değerler, bugün tüm insanlığın ortak mirası hâline gelmiştir. Bu büyük emanete sahip çıkmak, bu büyük hazineyi gelecek nesillere aktarmak öncelikli sorumluluğumuzdur.

Yirmi birinci yüzyıl dünyasına sunabileceğimiz yeni bir medeniyet projesinin dokusunu örecek değerleri üretebilmemiz, ancak sahip olduğumuz bu hazinelerin ve zengin birikimin işlenmesiyle mümkündür. Bu miras bize, tarihteki en büyük ilim ve düşünce insanlarının geniş bir yelpazede ürettikleri eserleri sunuyor. Çok çeşitli alanlarda ve disiplinlerde medeniyetimizin en zengin ve benzersiz metinlerini ihtiva eden bu eserlerin korunması, tercüme ya da tıpkıbasım yoluyla işlenmesi ve etkin bir şekilde yeniden inşâ edilmesi, Büyük Türkiye Vizyonumuzun önemli bir parçasıdır. Bu doğrultuda yapılacak çalışmalar, hiç şüphesiz tarihe, ecdadımıza, gelecek nesillere ve insanlığa sunacağımız eserleri üretmeye yönelik fikrî çabaların hasılası olacaktır. Her alanda olduğu gibi bilim, düşünce, kültür ve sanat alanlarında da eser ve iş üretmek idealiyle yeniden ele alınmaya, ilgi görmeye, kaynak olmaya başlayan bu hazinelerin ülkemize ve tüm insanlığa hayırlar getirmesini temenni ederim. Aziz milletimiz, bu kutsal emaneti yücelterek muhafaza etmeyi sürdürecektir.

Recep Tayyip Erdoğan
Cumhurbaşkanı

İÇİNDEKİLER

TAKDİM 4
ÖNSÖZ 9
GİRİŞ 13
TÛSÎ-ÖKLİD KARŞILAŞTIRMASI VE ŞEKİL LİSTESİ 17

TAHRÎRU USÛLİ'L-HENDESE VE'L-HİSÂB

MUKADDİME 36
BİRİNCİ MAKALE 37
Tanımlar 37
Önermeler (*Şekiller, el-Eşkâl*) 41
İKİNCİ MAKALE 105
Giriş 105
Önermeler 105
ÜÇÜNCÜ MAKALE 123
Tanımlar 123
Önermeler 123
DÖRDÜNCÜ MAKALE 153
Giriş 153
BEŞİNCİ MAKALE 169
Giriş 169
Önermeler 170
ALTINCI MAKALE 189
Giriş 189
Önermeler 190
YEDİNCİ MAKALE 225
Tanımlar 225
Önermeler 226
SEKİZİNCİ MAKALE 251
Önermeler 251

DOKUZUNCU MAKALE 269
Önermeler 269
ONUNCU MAKALE 291
Giriş 291
Önermeler 292
Giriş (Tanımlar) 327
Önermeler 327
Giriş (Tanımlar) 357
ON BİRİNCİ MAKALE 383
Katı Cisimler (Mücessimât) 383
Tanımlar 383
Önermeler 384
ON İKİNCİ MAKALE 415
Önermeler 415
ON ÜÇÜNCÜ MAKALE 435
Önermeler 435
ON DÖRDÜNCÜ MAKALE 463
Önermeler 463
ON BEŞİNCİ MAKALE 475
Önermeler 475

ÖNSÖZ

On üçüncü yüzyıl İslâm âlimlerinden Hoca Nasîrüddin et-Tûsî'nin *Tahrîru Kitâbı Öklides* adını taşıyan Öklid geometrisine ilişkin eserinin Türkçeye kazandırılması ameliyesinde bulunmak bizim için başlı başına büyük bir onurdur. Bu vesile ile çevirinin tamamlanmasından duyduğumuz kıvancı siz okuyucularımız ile de paylaşmak isteriz. Bu kıvancımızın sebeplerinin başında elbette Hoca Nasîrüddin et-Tûsî'nin, hayatı tehlike ve tehditler arasında geçmiş, çağında ünü Çin diyarından Endülüs'e kadar cihana yayılmış büyük bir âlim olması gelmektedir. Ayrıca bu çalışmamız ile Hoca Nasîrüddin et-Tûsî'nin günümüz İslâm dünyasına, Türk gençlerine kendilerini ifade etmelerini, yaptıklarının değerlendirilmesi için anlatmalarını, bilimin her hâl ve şartta yapılabileceğini göstermesine, bilimi tavsiye etmesine vesile olmak azmindeyiz.

18 Şubat 1201 yılında Tûs şehrinde dünyaya gelen Nasîrüddin et-Tûsî, çağının icabı olarak bütün büyük âlimler gibi ilk feyzini doğup büyüdüğü bu şehirde babasının ve öz amcasının yanında dönemin dinî ve riyazî bilimlerini tedris ederek yetişti. Baba ocağındaki hayatı mantık, fizik, metafizik, astronomi, matematik, felsefe, tıp, ilahiyat, ahlak ve siyaset öğrenmekle geçti. Bu durum ona her alanda uzman olma imkânı sağladı. İbn-i Sina (ö. 428/1037) gibi o da çağının dehalarından biri oldu.

Hoca Nasîrüddin et-Tûsî, ona şöhret kazandıran asıl çalışmalarını teorik ve pratik astronomi, aritmetik ve geometri ile ahlak konusunda gerçekleştirmiştir. Onun kendi adını taşıyan ve Tûsî Çifti olarak bilinen evren modelini tasarlaması bu duruma ilişkin en güzel örnektir. Kuramsal astronomi çalışmalarını gözlemle destekleyerek, evren ve uzaya ilişkin nesnel sonuçlara ulaşmak amacıyla gök cisimlerinin özelliklerini, devinimlerini incelemiştir.

İlhanlı hükümdarı Hülâgû Han'ın (1256-1265) himayesinde 1259 yılında Meraga'da ilk büyük modern rasathane kuruluşunu gerçekleştirmiştir. Burada 12 yıl süren gözlemler, sadece astronomi açısından değil bilim açısından da büyük önem taşımaktadır. Meraga'da 15 arkadaşı ile birlikte gerçekleştirdiği gözlemler sonucunda Zic-i İlhanî adıyla en yeni yıldız gözlem

cetvellerini hazırladı. Bu gözlem evinde 1274'te ölümünden sonra da gözlem çalışmaları devam etmiştir. et-Tûsî'nin astronomi çalışmaları *Tezkire fi'l-İlmi'l-Hey*'e adlı eserinde toplandı. Bu eseri F. Jamil Ragep tarafından *Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī's Memoir on Astronomy* (*al-Tadhkira fī 'ilm al-hay'a*) adıyla 1993 yılında yayımlandı.

150 kadar kitaba imza atan et-Tûsî'nin, eserlerini Türkçe, Arapça ve Farsça dillerinde kaleme almış olması her üç dili de çok iyi bildiğini göstermektedir. Ayrıca Latince bildiği de belirtilmektedir. Hayatı ve eserleri hakkında giriş kısmında biraz daha ayrıntılı bilgi verileceğinden burada daha fazla bir şey yazmaya gerek olmadığı kanaatindeyiz.

Öncelikle çağının önemli bilim eserlerinden biri olan Öklides geometrisini yani *Usul-i Hendese*'yi, farklı bir yöntem kullanarak Sâbit İbn Kurre ve el-Kâşî gibi büyük matematikçilerin çalışmalarını da ayı eser içinde karşılaştırmalı olarak vermiş, bir kitapta kendi zamanına kadar gelen geometrinin adeta tarihî seyrini yansıtmıştır.

Usûl-i Hendese li-Öklides, kendi çağında olduğu kadar daha sonraki dönemlerde de bu ilgiden hiçbir şey kaybetmemiştir. Burada esas alınan nüshanın Osmanlı sultanı Fatih Sultan Mehmed Han'ın şahsi kitaplarından biri olması buna en iyi örnektir.

Daha önce Nasirüddin et-Tûsî'nin *Tezkire fi'l-İlmü'l-Hey'e* adlı eserini Türkçeye kazandırma noktasındaki gayretlerimizi göz önünde bulundurarak, tıpkıbasımı Prof. Dr. İhsan Fazlıoğlu'nun kapsamlı bir giriş yazısıyla Türkiye Yazma Eserler Kurumu Başkanlığı'ndan yayınlanması, *Kitab-ı Tahrîri Öklides*'i de Türkçeye kazandırabileceğimiz fikrini doğurdu. Kurum başkanı Sayın Muhittin Macit Bey'in bizi yüreklendirmesi projenin gerçekleşmesini sağladı. Elbette, kültürümüzün önemli bir parçası olan yazmaların özellikle İslam bilim ve teknolojisine ilişkin eserlerinin zamanın yok edici etkisine karşı koyması amacıyla başlattığı büyük program dolayısıyla ilk ve en büyük teşekkür onadır. Tahrir geleneğini devam ettiren Muhittin Macit Bey ve ekibine, özellikle tashih edip gözden geçiren Ziya Çetintaş Bey'e ve yayına hazırlanmasında emeği geçen Murat Ünlüer Bey'e emeklerinden dolayı çok teşekkür ederiz.

Çalışmamıza başladığımız sıralarda Azerbaycan'da Azerice yayınlanmış olan Nasirəddin Tusi, *Təhriri- Öqlidis*, Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası: Nəsireddin Tusi adına Şamaxı Astrofizika Rəsədxanası- Bakı: Ulduz, 2001 adlı eser, elimize ulaştığında bazı alanlarda karşılaşılan zorluklar daha açık hale geldi. Bu kitabı bizlere ulaştıran Prof. Dr. Feza Günergun'a da teşekkür borçluyuz. Arapça müşkülatların çözümünde her zaman olduğu gibi Dr. Âdem Akın Bey'in engin Arapça bilgisinden istifade etme imkânı bulduk. Konu ile ilgili şekil ve çizimleri verilen değerler göz önünde tutularak yeniden ölçeklendi ve bilgisayar ortamında çizildi. Gereken yerlere dipnotlar ilave edilerek kanıtların günümüzde ne anlama geldiği açıklandı. Şüphesiz ki bu konuda bize ışık tutan en önemli çalışma Heath, Thomas L.: *The Thirteen Books of Euklid's Elements*, Dover , 1956, Vol. 1-3 oldu. Eserin sonuna bir çizelge eklenerek Öklid, Arapça çeviriler ve Tûsî çalışmaları karşılaştırılmıştır.

Bilim, her çağda ve her toplumda, herkes için refah ve mutluluğun gelişmesinin ana dinamosu olma özelliğini sürdürmüştür. Dolayısıyla ülkelerin gelişmesinde o ülkenin fertlerinin bilime olan ilgileri büyük rol oynar. Bu ilgi tarihte başarılan bilimsel buluşların sonraki nesiller için bir ilham kaynağı olması ile pekişmektedir. Gençlerin bilim insanı olma arzu ve istekleri, özgüvenleri, çalışma azmi ve gayreti ile kurum ve kuruluşların destekleri ile gerçekleştiğini tarih bize göstermektedir. Bu açıdan bilim tarihinin toplumun bilime olan ilgisinin canlanmasında büyük katkısı olduğuna şüphe yoktur. Dünyaca ünlü bilim tarihçisi Prof. Dr. Fuat Sezgin'in inisiyatifi ile Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi'nde 2013 yılında kurulan Bilim Tarihi Bölümü, bilim tarihi araştırmalarında yeni yaklaşımların hayata geçirilmesi noktasında önemli faaliyetleri gerçekleştirmektedir. Bunlar arasında özellikle İslam medeniyetinde bilim adamlarının araştırılmasında âlimlerin kendilerini yeni kuşaklara ifade etme imkânlarının verilmesini öne almak fikri de yer almaktadır. Böylelikle bu kitapta ele aldığımız Nasîrüddin et-Tûsî gibi âlimlerin bilimsel buluşları ile günümüz arasında sağlam bir köprü oluşacak ve bu köprü

geçmiş ile gelecek arasındaki bağlantıyı sağlayacaktır. Kendisine bu vesile ile tüm insanlığa yapmış olduğu katkılardan dolayı minnettarlığımızı ifade etmek cüretini göstermemizi müsaade ediniz. Dönemin ifadesi ile el-hakîmü'l-muhakkik ve'l-feylesofi'l-müdekkik Nasîrü'd-devle ve'd-Dîn Muhammed bin Muhammed et-Tûsî'nin -dünya döndükçe Allah'ın rahmeti ve mağfireti onun üzerine olsun- bu faydalı eserinden istifade edenlerin hayır dualarının ecri ve sevabı daim olsun.

Atilla Bir
Mustafa Kaçar

GİRİŞ

M.Ö. 300 yıllarında İskenderiye'de yaşamış, Helenistik çağın en önemli bilim insanlarından biri olan Euklides'in ΣΤΟΙΚΕΙΩΝ *Stoikeion* kitabı, antik çağın açık ara en ünlü klasik matematik eseridir. Aynı zamanda dünyanın her yerinde, her çağda ve her seviyede kullanılan; özellikle geometri, orantı ve sayılar teorisi konularını kapsayan en eski matematik ders kitabıdır. İslâm medeniyetinde "Usûl-i Hendese" olarak bilinen eser, daha sonra İngilizce tercümesine istinaden Türkçede *Elementler* olarak anılmıştır.

Eserde yer alan teoremlerin (aksiyomların) çoğu Euklides tarafından keşfedilmemiş olsa da kendi zamanına kadar Antik çağ öncesinde Mısır ve Mezopotamya medeniyetlerinde ve daha sonra Eski Yunan ve Helenistik çağda başta Pythagoras olmak üzere Sakızlı Hipokrat, Atinalı Theaetetus ve Knidoslu (Datça) Eudoxus gibi Pythagoras ekolünün önemli şahsiyetlerinin katkıları ile ortaya konmuştur. Eserin başarısı, Euklides'in bütün matematik bilgi ve problemlerini farz edilen bir birimden yola çıkarak mantık çerçevesinde kanıtlamak üzere sistemleştirmiş olmasına bağlanabilir.

Kuşkusuz, her zaman modern matematiğin gerektirdiği titizlik görülmese de zorunlu olarak beş basit aksiyomu takip ettiği, ayrıca daha önceki dönemlerin bir dizi dâhiyane kanıtlarını tasarlamış olduğu aşikârdır. On üç kitaptan oluşan *Elementler,* cetvel ve pergel kullanmadan, deneysel kanıtlara başvurmadan sadece herhangi iki büyüklüğün eşit olup olmadığını, hangisinin diğerinden daha büyük olduğunu ispatla yetinir.

İslâm medeniyetinde ilk olarak Abbâsîler devrinde Bağdad'ın kurucusu Halife el-Mansûr'un (754-775) Bizans İmparatoru'na gönderdiği elçilerin oradan getirdiği yazmalar arasında Öklid'in *Elementler* kitabının bir kopyasına rastlanmıştır. Kâtip Çelebi'nin vermiş olduğu bilgilere istinaden yine Halife el-Me'mûn'un (813-833), birçok yazma eserin yanı sıra Bizanslılardan Öklid'in bu eserini de getirdiği bilinmektedir.

Yunancadan Arapçaya çevrilen ilk kitaplardan biri olan Öklid'in *Elementler*'i, İbn Nedim'in *el-Fihrist*'ine göre ilk olarak el-Haccâc b. Yûsuf b. Matar tarafından ve iki kez tercüme edilmiştir. İlki Hârûnürreşîd zamanında

yapılmış olup "Harûnî" olarak ikincisi ise el-Me'mûn için olup "Me'mûnî" olarak bilinir ve daha güvenilirdir. Haccâc, Hârûnürreşîd (786-809) devrinde Yahya b. Hâlid b. Bermek'in emriyle kitabı Arapçaya çevirmiş; daha sonra, kendisini ilim ve sanata adayan el-Me'mûn halife olduğunda, halifenin beğeneceği ve kendisine iltifat edeceği ümidi ile kitabı çizimlerle daha açıklayıcı hale getirerek bir kez daha tercüme etmiştir. Bunu yaparken kitabı tekrar gözden geçirmiş, özüne dokunmadan kısaltmış ve hatalarını düzeltmiş, fazlalıkları dışarıda bırakıp boşlukları doldurmuş, kendini ilme adamış insanların kullanımına sunmuştur.

El-Fihrist'e göre eser daha sonra İshak b. Huneyn tarafından Arapçaya çevrilmiş ve bu çeviri Sâbit b. Kurre tarafından geliştirilmiştir. Bir Hıristiyan ve Halife el-Mütevekkil'in (847-861) hekimi olan, Arapça mütercimlerin en ünlüsü Huneyn b. İshak el-İbâdî'nin (ö. 873) oğlu Ebu Ya'kûb İshak b. Huneyn b. İshak el-İbâdî'nin (ö. 910) tercümesini doğrudan Yunancadan yaptığına şüphe yoktur.

Ebu'1-Abbas el-Fazl b. Hâtim en-Neyrîzî'nin (ö. 922), Öklid'in I.- V. kitaplarına ilişkin yapmış olduğu şerhleri günümüze kadar gelmiştir. Eser, 12. yüzyılda Cremonalı Gerhard tarafından Latinceye çevrilmiştir. Yine muhtemelen 9.-10. yüzyıllarda yaşamış olan büyük geometri ve matematik âlimi Ahmed b. Umar el-Karabîsî'nin çalışmalarından bahsedebiliriz. Halife el-Me'mûn'un astronomi gözlemcilerinden biri olan ama kendini daha ziyade geometriye adayan Abbas b. Sa'id el-Cevherî (ö. 830) baştan sona *Elementle*rin tümünü kapsayan bir haşiye kaleme almıştır. *el-Fihrist*'e göre 9. yüzyılın önemli matematikçilerinden Muhammed Îsâ Ebu Abdullah el-Mehânî (ö. 874 ve 884 arasında) Öklid'in *Elementler*'indeki orantı üzerine bir şerh yazmıştır. Zamanının önemli matematikçisi ve astronomlarından biri olan Ebu Cafer el-Hâzinî (ö. 961-971 yılları arası) *Elementler*'in tümü üzerine bir yorum yazmış, ancak yalnızca X. Kitabın başlangıcına ilişkin yorumu günümüze kadar ulaşmıştır. Ayrıca Ebu'l-Vefâ el-Bûzcânî (940-997), Ebu Yûsuf Ya'kûb b. İshak b. es-Sabbâh el-Kindî (ö. yaklaşık 873), Kusta b. Luka el-Baalbakkî (ö. yaklaşık 912) gibi tercümanların tercümeleri zikredilebilir.

Yukarıda bahsettiğimiz önemli İslâm âlimlerinden, Sâbit b. Kurre, (826-901), Arşimet kitaplarının bazı kısımlarını tercüme etmenin yanı sıra Apollonius'un *Konik*lerini de incelemiştir. Sâbit'in oğlu Ebu Sa'id Sinan b. Sâbit b. Kurre (ö. 944), Farabî (ö. 950), çağının önemli astronom ve geometricisi olan Taberistanlı el-Kuhî (ö. yaklaşık 988) ve Öklid'in eserleri üzerine çok sayıda kitap yazmış olan İbnü'l-Heysem (ö. 1037) ve çağdaşı büyük âlim İbn Sînâ (ö. 1037) Öklid geometrisinin bir özetini yapmıştır. Kısaca yukarıda bahsettiğimiz âlimlerin dışında Öklid *Elementler* kitabına ilişkin bir diğer önemli çalışma, bu kitabın konusunu teşkil eden Tûsî'nin *Kitab-ı Usul-i Öklides* adlı çalışmasıdır.

Sir Thomas Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (C. 1 Cambridge 1956, s. 88-89), adlı kitabının giriş kısmında bu eser için "Öklid'in metninin bir özeti değil, Arapça çevirilere dayanan yeniden yazılmış bir Öklid'dir" ifadesini kullanmaktadır.

Muhammed b. Muhammed b. el-Hasan et-Tûsî, bilinen adıyla Nasîrüddin et-Tûsî, 11 Cemaziyelevvel 597'de (18 Şubat 1201) Tûs şehrinde dünyaya gelmiş, 18 Zilhicce 672 (26 Haziran 1274) tarihinde Bağdat'ta vefat etmiştir. İslâm Medeniyetinde bilim alanında en bilinen ve en etkili âlimlerden biri olan Nasîrüddin et-Tûsî, çağında Hâce-yi Tûsî, Hoca-yı Nâsır olarak da anılmıştır. On iki imam mezhebi kadısı olan babasından dinî ve temel bilimler, amcasından da aynı şekilde mantık, fizik ve metafizik konularında ders görmüştür. Aynı sırada cebir ve geometri derslerini de takip etmiştir. 15 yaşına geldiğinde dönemin hâlâ önemli bir bilim merkezi olan Nişabur'a giderek burada daha ileri seviyede tahsil gördü. Nişabur'da fıkıh derslerini Muînüddin Sâlim b. Bedran el-Mizâmî el-Mısrî'den, felsefe derslerini Ebu Muhammed Hasan b. Muhammed Ferîmûdî'den görmüştür.

Genç yaşlarından itibaren ilme olan iştiyakı Tûsî'yi kısa zamanda üne kavuşturdu ve ünü, Kuhistan bölgesinin İsmâilî hâkimi Nâsırüddin Abdürrahîm b. Ebû Mansûr Muhteşem'e kadar ulaştı. Nâsırüddin, Tûsî'yi kendi bölgesine davet etti; Moğol istilası yüzünden huzuru kaçan Tûsî bu teklifi kabul etti. İlk dönemlerde valinin kendisine destek olmasıyla Kuhistan'da ilmî faaliyetlerini yürütmek için uygun bir ortam buldu; özellikle felsefî ve

tecrübî ilimler alanında değerli eserlerinin çoğunu burada yazdı. Bunlar arasında *Şerhu'l-İşârât*, *Ahlâk-ı Nâsırî* ve *Tahrîrü'l-Mecistî* bulunmaktadır. Ancak çok geçmeden İsmâilîler'le arası açıldı. Kaynaklara göre bu durum onun Abbâsî Halifesi Müsta'sım-Billâh'a yazdığı bir mektuptan kaynaklanmıştır. Tûsî'nin halifeyle mektuplaştığını öğrenen Kuhistan hâkimi onu hapse attırdı; bir müddet sonra İsmâilîler'in merkezi olan Alamut Kalesi'ne gönderildi. Moğollar Alamut'u kuşattıklarında Tûsî, Alamut hâkimi Rükneddin Hürşah'a Hülâgû'ya karşı koymanın bir işe yaramayacağını anlattı ve gizlice orayı terk edip kaleyi ona teslim etmesini tavsiye etti. Kalenin tesliminde Tûsî'nin bu rolünü öğrenen Hülâgû onu yanına alarak iltifatta bulundu. Hatta bazı kaynakların belirttiği üzere Tûsî'yi vezir yaptı ve birçok kurumun yönetimini kendisine verdi. Ardından Tûsî, Hülâgû'nun Bağdat seferine de katıldı. Bazı kaynaklar son Abbâsî halifesi Müsta'sım-Billâh'ın Tûsî'nin tavsiyesiyle öldürüldüğünü kaydeder. Bilhassa Takıyyüddin İbn Teymiyye ve İbn Kayyim el-Cevziyye bu konuda Tûsî'ye ağır eleştiriler yöneltmiştir. Ancak Bağdat'ın işgali ve halifenin öldürülmesi konusunda geniş bilgi veren kaynakların hiçbirinde bu husus yer almaz. Ebü'l-Fidâ İbn Kesîr de bu rivayeti şüpheyle karşılamaktadır. Tûsî'nin Hülâgû nezdindeki saygınlığı, özellikle müsbet ilimlerdeki faaliyetlerini yürütmek için maddi destek bulmasına vesile oldu. Hülâgû'yu ikna ederek Azerbaycan'ın Merâga şehrinde kendi dönemine kadar İslâm coğrafyasında yapılan en büyük rasathanenin kurulması için ondan kaynak sağladı. Rasathanenin yapımı 657 (1259) yılında tamamlandı. Merâga'daki faaliyetlerini sürdüren Tûsî Bağdat'a yaptığı bir seferde vefat etti (18 Zilhicce 672 / 25 Haziran 1274); aynı şehirde İmam Mûsâ el-Kâzım'ın türbesinin yanına daha önce Abbâsî Halifesi Nâsır-Lidînillâh için yapılan, ancak bazı sebeplerle halifenin gömülemediği mezara defnedildi[1].

İslâm geleneğinin ortak bir ölçüsü olarak adlandırılabilecek mevhuma ulaşmak için her şeyden önce, çeşitli kitaplardaki önermelerin sayılarını karşılaştırmak gerekir.

1 A. Şirinov. "Nasîrüddin Tûsî", *TDV İslam Ansiklopedisi*, C. 41, s. 440-442.

TÛSÎ-ÖKLİD KARŞILAŞTIRMASI VE ŞEKİL LİSTESİ

Birinci Makale (Düzlem Geometrisinde Doğrular)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓	✓	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	
3	3	✓		9	
4	4	✓		10	
5	5	✓	✓	11, 12	✓
6	6	✓	✓	13, 14, 15	
7	7	✓	✓	16, 17, 18, 19	
8	8	✓		20	
9	9	✓	✓	21, 22, 23	
10	10	✓		24	
11	11	✓	✓	25, 26	✓
12	12	✓	✓	27, 28	✓
13	13	✓		29	
14	20	✓		30	
15	14	✓		31	✓
16	15	✓		32	
17	16	✓		33	
18	17	✓	✓	34, 35	✓
19	18	✓		36	
20	19	✓	✓	37, 38	
21	21	✓	✓	39, 40	
22	22	✓		41	✓
23	23	✓		42	
24	24	✓	✓	43, 44, 45	✓
25	25	✓	✓	46,47	✓
26	26	✓		48	✓
27	27	✓		49	
28	28	✓	✓	50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61	✓
29	29	✓		62	
30	30	✓		63	
31	31	✓		64	
32	32	✓		65	✓
33	33	✓		66	✓

34	34	✓	✓	67, 68	✓
35	35	✓	✓	69, 70, 71	✓
36	36	✓		72	
37	37	✓		73	
38	38	✓		74	
39	39	✓		75	✓
40	40	✓		76	
41	41	✓		77	✓
42	42	✓		78	✓
43	43	✓		79	
44	44	✓		80	
45	45	✓		81	
46	46	✓		82	
47	47	✓	✓	83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119	✓
48	48	✓		120	

İkinci Makale (Geometrik Cebir)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓	✓	1	✓
2	2	✓	✓	2	✓
3	3	✓	✓	3	✓
4	4	✓	✓	4	✓
5	5	✓	✓	5	✓
6	6	✓	✓	6	✓
7	7	✓	✓	7	✓
8	8	✓	✓	8	✓
9	9	✓	✓	9, 10	✓
10	10	✓	✓	11, 12	✓
11	11	✓	✓	13, 14	✓
12	12	✓		15	
13	13	✓		16	✓
14	14	✓	✓	17, 18, 19	✓

Üçüncü Makale (Düzlem Geometrisinde Daireler)					
Önermeler				Şekil	Not
Tûsî	Öklid	Sâbit	Haccâc (ilaveler)		
1	1	✓		1	✓
2	2	✓		2	
3	3	✓	✓	3, 4	✓
4	4	✓	✓	5, 6	✓
5	5	✓		7	✓
6	6	✓		8	
7	7	✓		9	
8	8	✓	✓	10, 11, 12	✓
9	9	✓		13, 14	
10	10	✓		15, 16	
11	11, 12	✓		17, 18	✓
12	13	✓		19	✓
13	14	✓		20	✓
14	15	✓	✓	21, 22	✓
15	16	✓		23	✓
16	17	✓		24, 25	✓
17	18	✓		26	✓
18	19	✓		27	
19	20	✓		28, 29, 30	✓
20	21	✓		31, 31-1	✓
21	22	✓		32	
22	23	✓		33	
23	24	✓		34	
24	25	✓	✓	35, 36, 37	✓
25	26	✓		38	
26	27	✓		39	
27	28	✓		40	
28	29	✓		(40)	
29	30	✓		41	
30	31	✓	✓	42, 42.1	✓
31	32	✓	✓	43, 44	✓
32	33	✓	✓	45, 46, 47	✓
33	34	✓	✓	48, 49, 50	✓
34	35	✓		51, 52, 53, 54, 55	✓
35	36	✓		56, 57, 58	✓
36	37	✓	✓	59, 60	✓

Dördüncü Makale (Daireye İçten ve Dıştan Teğet Şekiller)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓	✓	1, 2	✓
2	2	✓	✓	3, 4	✓
3	3	✓	✓	5, 6	✓
4	4	✓	✓	7, 8	✓
5	5	✓	✓	9, 10, 11	✓
6	6	✓	✓	12, 13	✓
7	7	✓		14	✓
8	8	✓		15	✓
9	9	✓		16	
10	10	✓	✓	17, 18	✓
11	11	✓	✓	19, 204	✓
12	12	✓	✓	21, 22	✓
13	13	✓	✓	23, 24, 25, 26	✓
14	14	✓	✓	27, 28	✓
15	15	✓		29	✓
16	16	✓		30	

Beşinci Makale (Oranlar)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓		2	
3	3	✓		3	
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	
6	6	✓		6	✓
7	7	✓		7	
8	8	✓		8	
9	9	✓		9	
10	10	✓		10	✓
11	11	✓		11	
12	12	✓		12	
13	13	✓		13	

14	14	✓		14	✓
15	15	✓		15	
16	16	✓		16	✓
17	17	✓	✓	17, 18	✓
18	18	✓		19	✓
19	19	✓		20	
20	20	✓		21	✓
21	21	✓		22	✓
22	22	✓		23	✓
23	23	✓		24	
24	24	✓		25	
25	25	✓		26	

Altıncı Makale (Benzer Şekiller)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓	✓	(1), 2, 3	✓
2	2	✓	✓	4, 5	✓
3	3	✓	✓	6, 7	✓
4	4	✓	✓	8, 9	✓
5	5	✓		10	✓
6	6	✓	✓	11, 12	✓
7	7	✓	✓	13, 14	✓
8	8	✓		15	
9	12	✓	✓	16, 17	✓
10	13	✓	✓	18, 19	✓
11	10	✓	✓	20, 21	✓
12	11	✓	✓	22, 23	✓
13	9	✓		24	
14	14	✓		25	
15	15	✓	✓	26, 27	✓
16	16	✓		28	
17	17	✓		29	
18	20	✓	✓	30, 31	✓
19	18	✓		32	
20	19	✓		33	
21	21	✓		34	
22	22	✓		35	

23	25	✓		36	
24	23	✓		37	✓
25	26	✓		38	
26	24	✓		39	
27	27	✓		40	
28	28	✓		41	✓
29	29	✓	✓	42, 43, 44, 45	✓
30	30	✓		46	✓
31	32	✓		47	✓
32	31	✓		48	✓
33	33	✓		49	

Yedinci Makale (Temel Sayı Kuramı)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓		2	
3	3	✓		3	
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	
6	6	✓		6	
7	7	✓		7	✓
8	8	✓		8	✓
9	9	✓		9	
10	10	✓		10	
11	11	✓		11	
12	12	✓		12	
13	13	✓	✓	13, 14	✓
14	14	✓		15	✓
15	15	✓		16	✓
16	16	✓		17	
17	17	✓		18	
18	18	✓		19	
19	19	✓		20	✓
20	20	✓		21	
21	21	✓		22	
22	22	✓		23	
23	23	✓		24	

24	24	✓		25	
25	25	✓		26	
26	26	✓		27	
27	27	✓		28	
28	28	✓		29	✓
29	29	✓		30	
30	30	✓		31	
31	31	✓		32	
32	32	✓		33	
33	33	✓		34	
34	34	✓		35	
35	35	✓		36	
36	36	✓		37	
37	37	✓		38	
38	38	✓		39	
39	39	✓		40	

Sekizinci Makale (Sürekli Oranlar)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid***	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓		2	
3	3	✓		3	
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	✓
6	6	✓		6	
7	7	✓		7	
8	8	✓		8	
9	12	✓		9	
10	13	✓		10	
11	10	✓		11	✓
12	11	✓		12	✓
13	9	✓		13	
14	14	✓		14	
15	15	✓		15	✓
16	18	✓		16	
17	19	✓		17	
18	20	✓		18	

19	21	✓		19	
20	22	✓		20	
21	23	✓		21	✓
22	24	✓		22	
23	25	✓		23	
24	(20)	✓		24	
25	(21)	✓	–	–	✓
26	26	✓	–	25	
27	27	✓		26	

* Öklid'de 16 ve 17 olarak verilen iki önerme değiştirilerek 24 (20) ve 25 (21) numaralı iki önerme şeklinde verilmiştir.

Dokuzuncu Makale (Sayı kuramı Uygulamaları)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	✓
2	2	✓		2	✓
3	3	✓	✓	3, 4	✓
4	4	✓		5	
5	5	✓		6	
6	6	✓		7	
7	7	✓		8	
8	8	✓		9	
9	9	✓		10	
10	10	✓		11	
11	11	✓		12	
12	12	✓		13	✓
13	13	✓		14	
14	14	✓		15	✓
15	15	✓		16	
16	16	✓		17	✓
17	17	✓		18	
18	18	✓		19	
19	19	✓		20	
20	20	✓		21	
21	21	✓		22	
22	22	✓		23	
23	23	✓		24	

24	24	✓		25	
25	25	✓		26	
26	26	✓		27	
27	27	✓		28	
28	28	✓		29	
29	29	✓		30	
30	30	✓		31	
31	31	✓		32	✓
32	32	✓		33	
33	33	✓		34	
34	34	✓		35	
35	35	✓		36	
36	36	✓		37	
37	37	✓		38	✓
38	38	✓		39	✓

Onuncu Makale [Ölçülemez (*irrasyonel*) büyüklükler]					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1. Kısım					
1	1	✓		1	✓
2	2	✓		2	
3	3	✓		3	
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	✓
6	6	✓		6	✓
7	9	✓		7	✓
8	11	✓		8	✓
9	10	✓		9	✓
10	12	✓		10	
11	15	✓		11	
12	14	✓	✓	12, 13	✓
13	17	✓		14	
14	18	✓		15	
15	19	✓		16	
16	20	✓		(16-1)	
17	21	✓		–	✓
18	22	✓		17	

19	23	✓		18	✓
20	26	✓		19	✓
21	27	✓		20	
22	28	✓		21	
23	25	✓		22	
24	29	✓	✓	23, 24	✓
25	30	✓		–	✓
26	31	✓		25	
27		✓		(25-1)	
28	32	✓		26	
29		✓		(26-1)	
30	33	✓		27	
31	34	✓		(27-1)	
32	35	✓		(27-2)	
33	36	✓		28	
34	37	✓		29	
35	38	✓		30	
36	39	✓		–	
37	40	✓		–	
38	41	✓		–	
39	42	✓	✓	31, 32	✓
40	43	✓		33	
41	44	✓		34	
42	45	✓		(34-1)	
43	46	✓		(34-2)	
44	47	✓		(34-3)	

Onuncu Makale [Ölçülemez (*irrasyonel*) büyüklükler]					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
2. Kısım					
45	48	✓		35	
46	49	✓		(35-1)	
47	50	✓		36	
48	51	✓		(36-1)	
49	52	✓		(36-2)	
50	53	✓		(36-3)	
51	54	✓		37	

52	55	✓		(37-1)	
53	56	✓		(37-2)	
54	57	✓		(37-3)	
55	58	✓		(37-4)	
56	59	✓		(37-5)	
57	60	✓	✓	38, 39	✓
58	61	✓		(38-1)	
59	62	✓		(38-2)	
60	63	✓		(38-3)	
61	64	✓		(38-4)	
62	65	✓		(38-5)	
63	66	✓		40	
64	67	✓		(40-1), 41	✓
65	68	✓		42, 43	
66	69	✓		–	
67	70	✓		–	✓
68	71	✓		44	
69	72	✓		(44-1)	
70	73	✓		45	
71	74	✓		46	
72	75	✓		47	
73	76	✓		(47-1)	
74	77	✓		(47-2)	
75	78	✓		(47-3)	
76	79	✓		48	
77	80	✓		(48-1)	
78	81	✓		49	
79	82	✓		–	
80	83	✓		–	
81	84	✓		–	

Onuncu Makale [Ölçülemez (*irrasyonel*) büyüklükler]					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
3. Kısım					
82	85	✓		50	
83	86	✓		(50-1)	
84	87	✓		51	
85	88	✓		(51-1)	

86	89	✓		(51-2)	
87	90	✓		(51-3)	
88	91	✓		52	
89	92	✓		(52-1)	
90	93	✓		(52-2)	
91	94	✓		(52-3)	
92	95	✓		(52-4)	
93	96	✓		(52-5)	
94	97	✓		53	
95	98	✓		(53-1)	
96	99	✓		(53-2)	
97	100	✓		(53-3)	
98	101	✓		(53-4)	
99	102	✓		(53-5)	
100	103	✓		54	
101	104	✓		(54-1)	
102	105	✓		55	
103	106	✓		–	
104	107	✓		–	
105	108	✓		56	
106	109	✓		(56-1)	
107	110	✓		(56-2)	
108	111	✓		57	
109	112	✓		58	

Onbirinci Makale [Cisimler (stereometri)]					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓		2	
3	3	✓		3	✓
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	
6	6	✓		6	
7	7	✓		7	
8	8	✓		8	
9	9	✓		9	

10	10	✓		10	
11	11	✓		11	
12	12	✓		12	✓
13	13	✓		13	
14	14	✓		14	✓
15	15	✓		15	
16	16	✓		16	
17	17	✓		17	
18	18	✓		18	✓
19	19	✓		19	
20	20	✓		20	
21	21	✓		21	✓
22	22	✓	✓	22, 23, 24	✓
23	23	✓	✓	25, 26	✓
24	24	✓		27	
25	25	✓		28	
26	26	✓		29	✓
27	27	✓		30	
28	28	✓		31	✓
29	29	✓		32	
30	30	✓		33	
31	31	✓		34	✓
32	32	✓		35	
33	33	✓		36	
34	34	✓		37	
35	35	✓		38	
36	36	✓		39	
37	37	✓		40	✓
38	38	✓		41	✓
39		✓		42	
40		✓		43	
41		✓		44	

Onikinci Makale (İçten teğet cisimler)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid***	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2	2	✓		2	✓
3	3	✓		3	
4	4	✓		4	
5	5	✓		5	
6	7	✓		6	
7	9	✓		7	
8	8	✓		(7)	
9	10	✓	✓	8, 9	✓
10	12	✓		10	
11	11	✓		(10)	
12	15	✓	✓	11, 12	✓
13	16	✓	✓	13, 14	✓
14	17	✓	✓	15, 16, (16-1)	✓
15	18	✓		17	✓

*Tûsî'de 6, 13 ve 14 numaralı önermeler eksiktir.

Onüçüncü Makale (Düzgün çok yüzlüler)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	1	✓		1	
2		✓		2	
3	2	✓		(2)	
4		✓		–	
5	3	✓		3	
6		✓		4	✓
7	5	✓		5	✓
8	4	✓		6	
9	6	✓		7	
10	7	✓		8	✓
11	12	✓		9	✓
12	9	✓		10	
13	10	✓	✓	11, 12	✓

14	8	✓		13	
15	11	✓		14	✓
16	13	✓		15	
17	15	✓		16	
18	14	✓		1/	
19	16	✓		18, (18-1)	✓
20	17	✓		19, (19-1)	✓
21	18	✓	✓	20, 21	✓

Ondördüncü Makale (Hypsicles)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	-	✓		1	✓
2	-	✓		2	
3	-	✓		3	
4	-	✓		4	
5	-	✓		5	
6	-	✓		6	
7	-	✓		7	
8	-	✓		8	
9	-	✓		9	✓
-	-	✓		–	
10	-	✓	✓	10, 11	✓

Onbeşinci Makale (Hypsicles)					
Önermeler				**Şekil**	**Not**
Tûsî	**Öklid**	**Sâbit**	**Haccâc (ilaveler)**		
1	-	✓		1	✓
2	-	✓		2	
3	-	✓		3	
4	-	✓		4	
5	-	✓		5, (5-1)	
6	-	✓		6, (6-1), (6-2)	✓

TAHRÎRU USÛLİ'L-HENDESE VE'L-HİSÂB

Öklides'in Elementler Kitabının Tahrîri

NASÎRÜDDİN TÛSÎ

Zahriye (1a):

Ya Hafîz

Tahrîru kitâbi Öklidis li'n-Nasîruddîn et-Tûsî fi'l-hendese ve resâîli muteallika bi-ba'zi mevâzi'i kitabi Öklîdis fi'l hendese

Min kütübi'l-fakîr es-Seyyid Feyzullah

el-Müftî fi's-Saltanati'l-Osmâniyye

'ufiye 'anhu.

(Şeyhülislam Feyzullah Efendinin el yazısı temellük kaydı ve mührü.)

Sultan II. Bayezid'in mührü.

İthaf kaydı (1b):

Hâzâ *kitâbu tahrîri Öklîdis* te'lîfu'l-hakîmi'l-muhakkık ve'l-feylesûfi'l-mudakkık nâsîru'l-mille ve'd-dîn Muhammed b. Muhahammed et-Tûsî -rahimallâhu rahmeten vâsı'a-.

İthaf kaydı (2a):

Bi-resmi mutâla'ati's-Sultani'l-A'zam el-Hâkâni'l-Mu'azzam es-Sultân Muhammed Hân ibnü's-Sultân Murâd Hân -halledallâhu mülkehû ve sultânehû bi-mennihî ve lutfihî, âmin-.

Esirgeyen ve bağışlayan Allah adıyla

Her şeyin başlangıcı ve sonu olan, [her türlü] haberin hakikatini [bilen] ve her nesneyi yed-i kudretinde tutan Allah'a hamd, Hz. Muhammed'e ve temiz âline salât olsun.

Mecistî kitabının tahrîrini bitirdiğim vakit, anlamı bozmayacak şekilde kısaltarak, hedeflerinin sağlamlığını iyice araştırarak ve bıktırmayacak derecede derinlemesine inceleyerek Oklidis es-Sûrî'nin *Usûlü'l-Hendese ve'l-Hisâb*'ını tahrir etmeyi uygun gördüm. [Ayrıca] bu kitabın içeriğine uygun olan, ilim ehlinin kitaplarından edindiklerimi veya kendi çabamla bulduklarımı ilave ediyorum. Haccâc (ibn-i Matar) ve Sâbit (ibn-i Kurre)'in nüshalarında kitabın aslından farklı olan şekilleri ya bunlara işaret ederek ya da şekilleri ve rakamlarını farklı renklerde yazarak açıklıyorum. Bunların hepsini Allah Teâlâ'ya dayanarak yaptım. O'na dayandım, O'na güvendim. Kitap sonundaki iki ekle beraber 15 makaleden oluşur. Haccâc nüshasında 468 şekil vardır. Sâbit nüshası bundan 10 şekil daha fazladır. Bazı kısımlarda birbirleri arasında tertip açısından farklılık da bulunmaktadır. Sâbit nüshasına ilişkin şekilleri kırmızı, Haccâc nüshasına ilişkin olanları ise eğer ihtilaf ediyorsa siyah renkte çizdim.

BİRİNCİ MAKALE

Bu makale 47 önermeden oluşur. Sâbit nüshasında bir önerme daha fazladır. Bu 45'inci önermedir. Âdet olduğu üzere öncelikle önermeleri açıklamak için gerekli olan tanım ve uygulanan ana kuralları verelim.

TANIMLAR

Nokta (*en-nokta*)	Kısmı bulunmayan, varsayılır.
Hat (*el-hatt*)	Ensiz uzunluktur ve bir noktayla sonlanır.
Doğru (*el-mustakîm*)	Üzerinde düşünülen her noktanın birbiriyle aynı hizada yer aldığı şekildir.
Yüzey (*es-sath, el-basît*)	Sadece eni ile uzunluğu bulunan ve bir hatla sonlanır.
Düzlem (*el-müstevî*)	Üzerinde düşünülen her doğrunun birbiriyle aynı hizada yer aldığı şekildir.
Açı yüzeyi (*ez-zâviyetü'l musattaha*)	Farklı yönlere uzanan ve bir noktada kesişen iki doğru arasında kalan sınırsız yüzey parçasıdır. Hatlar doğru ya da diğerlerinden olabilir.
Dik açı (*el-kâime*)	İki dik doğrunun oluşturduğu eşit açıların her birine denir ve dik açı (*el-kaim amûden*) olarak adlandırılır.
Dar açı (*el-hadde*)	Dik açıdan daha küçük açıdır.
Geniş açı (*el-münferece*)	Dik açıdan büyük olan açıdır. Doğru veya başka bir şey olması da eşittir.
Sınır (*had*) ve Şekil	Sınır(had) [bir şeyin] sonudur. Şekil ise sınır veya sınırların çevrelediği şeydir.
Daire (*ed-dâire*)	Tek hatla çevrili düzlemsel bir şekil olup, bunun içinde öyle bir nokta vardır ki, o noktadan o hattı birleştiren bütün doğrular eşittir. O hatta çevre (*muhit*), noktaya ise merkez denir.

Çap (*kutr*)	Çevrenin merkezinden geçerek daire üzerindeki herhangi iki noktasını birleştiren düz hat parçasına çap denir. Bu hat daireyi iki eşit yarım daireye böler. Eğer bir hat merkezden geçmezse (kiriş) daireyi yarıdan büyük ve küçük olmak üzere iki parçaya böler.
Düz hatlı şekiller (*el-eşkâlü'l-müstakîmetü'l-ezlâ'*)	Doğrularla çevrili düzlem şekillerine düz hatlı şekiller denir. Bunların içinde en önce geleni üçgendir.
Üçgen (*el-müselles*)	Üçgenler eşkenar, ikizkenar ve çeşitkenar olabilir. Aynı şekilde dik açı veya geniş açı olursa dik açılı ve geniş açılı üçgen adını alır. Bunlardan birisi olmazsa dar açılı üçgen adını alır.
Dörtgen (*el-erbaatü'l-ezlâ'*)	Dörtgen türlerinden biri karedir.
Kare (*el-murabba'*)	Dik açılı eşkenar bir dörtgendir.
Dikdörtgen (*el-mustatîl*)	Dik açılı kenarları eşit olmayan bir dörtgendir.
Eşit paralelkenar (*el-muayyen*)	Kenarları eşit açıları dik olmayan bir dörtgendir.
Paralelkenar (*eş-şebih bi'l muayyen*)	Sadece karşılıklı kenarları ve açıları eşit olan ama dik olmayan bir dörtgendir.
Yamuk (*münharif*)	Bu tanımlanan dörtgenlerin dışındaki dörtgenlere denir.
Çokgen (*kesîrü'l-ezlâ'*)	Kenarları dörtten fazla olan düzlem şekillerine çokgen denir.
Paralel doğrular (*el-mütevâziye*)	Bir düzlemde her yönde sonsuza kadar kesişmeyen doğrulara paralel doğrular denir.

Konu yöntemleri (*el-usuli'l-mevzua*):

Bu işin başında nokta, hat, doğru, yüzey ve düzlem ayrıca daire bulunur.

1- Herhangi bir hat ya da yüzey üzerinde bir nokta varsayılabilir.

2- Herhangi bir yüzey üzerinde bir hat varsayılabilir.

3- Herhangi bir noktadan bir doğru geçirilebilir.

4- Nokta noktayla, doğru doğruyla düzlem düzlemle çakışır.

5- İki hat arasındaki ortak bölüm, nokta; iki yüzey arasındaki ortak bölüm ise hattır.

Bunlardan yola çıkarak şu önermeler ortaya konulabilir:

1- Herhangi bir noktadan başka bir noktaya doğru çekebiliriz.

2- Bir noktadan sürekli sonlu doğrular oluşturabiliriz.

3- Herhangi bir nokta etrafında herhangi yarıçaplı bir daire çizebiliriz.

4- Bütün dik açıların birbirlerine eşittir.

5- İki doğru bir yüzeyi çevreleyemez.

6- Herhangi iki doğrunun başka bir doğru tarafından kesilmesi halinde, aynı yöndeki içerde kalan açıların toplamı iki dik açıdan küçükse, iki doğru uzatıldığında birbirini kesecektir.

Sonuncu önerme [diğerleri gibi] apaçık aksiyomlardan değildir. Ayrıca hendese dışındaki ilimlerde de açıklığa kavuşmaz. Bu sebeple evlâ olan bunun meselelerin yer aldığı kısımda açıklanmasıdır. Daha sonra yeri geldiğinde açıklayacağım ama burada onun yerine şu önermeyi zikrettim.

7- Bir düzlem üzerinde bulunan doğrular bir yönde birbirlerinden uzaklaşıyorsa aynı yönde birbirlerine yakınlaşamazlar, aksi halde birbirlerini kesmeleri gerekir.

Bunun açıklamasında Öklides'in 10'uncu ve başka makalelerinde verdiği başka bir önermeyi kullanacağım. Bu da şundan ibarettir: aynı cinsten olan herhangi iki sonlu miktarın, örneğin -hat, yüzey, cisim- daha küçük olanı bir ya da birkaç kat arttırıldığında, büyük olanından daha büyük olabilir. Ayrıca bir tek doğrunun, doğru olarak biri diğerine değmeksizin birden fazla doğru ile birleşemeyeceğinin de ortaya konulması gerekir. Ve şu da ifade edilmeli ki dik açıya eşit olan açı da diktir.

Belitler (*el-ulum el-mütearife*, *aksiyomlar*)

1- Aynı şeye eşit olan şeyler eşittir.

2- Eşit olan şeylere eşit olan şeyler ilave edildiğinde ya da çıkarıldığında eşit kalırlar.

3- Eşit olmayan şeylere eşit olan şeyler ilave edildiğinde ya da çıkarıldığında eşit olmazlar.

4- Aynı miktarda arttırılan ya da azaltılan şeyler eşitse kendileri de eşittir.

5- Aynı kat, sayı ya da parçadan oluşan şeyler eşittir.

6- Eşit miktarlardan oluşan şeyler aynı miktarda arttırılır ya da eksiltilirse eşit kalırlar.

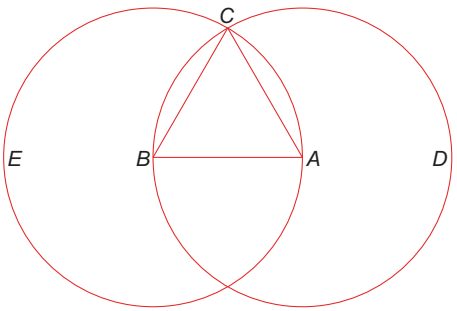
7- Her bir bütün kendi parçasından büyüktür.

Bunlar söyleyeceklerimizin başlangıcıdır. Başka tanımlar da ilgili olduğu yerlerde gelecektir. Şunu da belirtmem gerekir ki bu kitabın başından sonuncu makaleye kadar tüm nokta ve hatların bir düzlem üzerinde bulunduğu varsayılır.

Tartışmaların her neresinde bir hat, yüzey ya da açı söz konusu olursa bunlar kesinlikle bir doğru, düzlem ya da dik açıya ilişkindir.

ÖNERMELER (*şekiller*, *el-Eşkâl*)

***I. Önerme*: Verilen bir *AB* hattından bir eşkenar üçgen oluşturulması.**



Şekil 1

Merkezleri *A* ve *B* noktaları olan *AB* yarıçaplı *AEC*, *BCD* daireleri ve *AC*, *BC* hatları çizilir. Bu durumda *AB* tabanlı *ABC* üçgeni bir eşkenar üçgendir. (*Şekil 1*)

Kanıtı: *AB* ve *BC* kenarları *AEC* dairesinin yarıçapları olduğundan *AB* = *BC*, benzer şekilde *AB* ve *AC* kenarları *BCD* dairesinin yarıçapları olduğundan *AB* = *AC* olur. Şu halde *AC* = *AB* = *BC* olduğundan *ABC* bir eşkenar üçgendir.

***II. Önerme*: Belirli bir *A* noktasından başka bir doğruya eşit *BC* doğrusu çizmek**

Bunun için *A* ve *B* noktalarını birleştiren *AB* doğru parçası üzerine bir *ABD* eşkenar üçgeni oluşturulur. *B* Merkezli *BC* yarıçaplı bir *CHZ* dairesi çizilir. *HCZ* dairesi *BD* hattının devamını *Z* noktasında keser. *DZ* yarıçaplı *ZTE* dairesi çizilir. *DA* hattının devamı bu daireyi *E* noktasında keser. *AE* aranan doğru parçasıdır.

Kanıtı: *CZH* dairesinin yarıçapları olduğundan *BZ* = *BC* ve *EZT* dairesinin yarıçapları olduğundan *DE* = *DZ* eşitlikleri geçerlidir. *DE* ve *DZ* hatlarının parçaları olan *DA* ve *DB* hatları, eşkenar üçgen olup kenarları eşit olduğundan *AE* ve *BZ* hatları da eşittir. Şu halde *AE* = *BZ*=*BC* ilişkisi geçerlidir. Bu da bizim varmak istediğimiz sonuçtur.

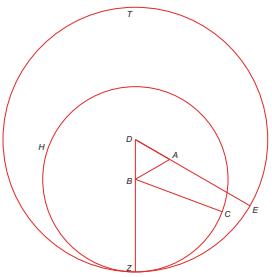
Bu işlemde bazı farklılıklar olabilir. Nokta hattan ayrık olabilir. Bu ayrıklık bizim örneğimizde olduğu gibi doğrunun temas etmeyeceği şekilde de olabilir temas edebileceği şekilde de olabilir. Bu nokta hattan ayrık da olmayabilir. Bu durumda da ya üzerinde olur ya da ucunda olur. Dört farklı durum oluşabilse bile her birinde yerleştirme yöntemi aynıdır.

1- Birinci durum yukarıda açıklanmıştır, bunun da temelinde üç durum oluşabilir:

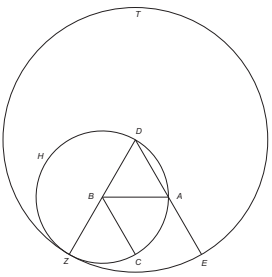
a) *AB* < *BC* (*Şekil 2*): Bu durumda *ABC* eşkenar üçgeni *CZH* dairesinin içine düşer.

b) *AB* = *BC* (*Şekil 3*): Bu durumda *A* ve *D* noktaları *CZH* dairesinin üzerine düşer.

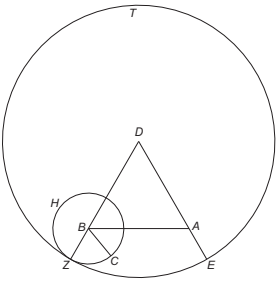
c) *AB* > *BC* (*Şekil 4*): Bu durumda *CZH* dairesi *ABC* eşkenar üçgeninin *AB* ve *BD* kenarlarını keser.



Şekil 2



Şekil 3



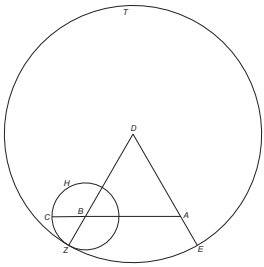
Şekil 4

2- *A* noktası *BC* hattı yönündedir. Bu duruma uygun olarak yine üç durum oluşabilir:

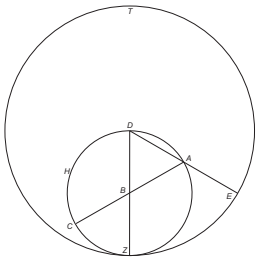
a) *AB* > *BC* (*Şekil 5*): Bu durumda *A* ve *D* noktaları *ZCH* dairesinin dışına düşer.

b) *AB* = *BC* (*Şekil 6*): Bu durumda *A* ve *D* noktaları *ZCH* dairesinin üzerine düşer.

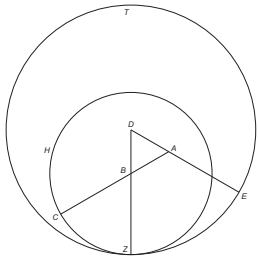
c) *AB* < *BC* (*Şekil 7*): Bu durumda *A* ve *D* noktaları *ZCH* dairesinin içine düşer.



Şekil 5

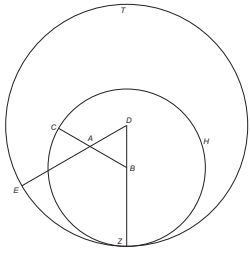


Şekil 6



Şekil 7

3- [*A* noktası *BC* hattının üzerindedir.] Bu durumda *AB* hattı *BC* hattının bir parçası olduğundan *A* ve *C* noktalarını birleştirmeye gerek yoktur. Bu durum sadece bir şekilde gerçekleşir (*Şekil 8*).



Şekil 8

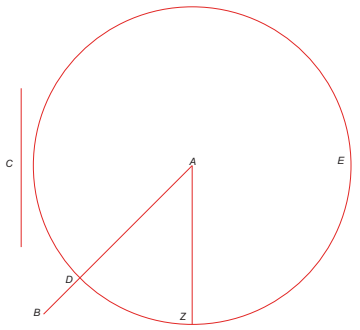
Bu durumların hepsinde üçgeni *AB* doğrusunun her iki tarafına çizilebilir. Bu nedenden doğruların bulunduğu konumda değişiklik olabilir.

4- *A* noktası *BC* hattının ucundadır. Bu durumda ne *AC* hattını, aralarında mesafe olmadığı için ne eşkenar üçgeni ne de daireleri çizmek gerekir.

Kanıtı: İki daire merkezi çakışır. Sadece çizilmek istenen hat tarafına bir daire çizilmesi yeterlidir. Daha sonra da merkezden çevreye doğru istenildiği gibi bir hat çizilir.

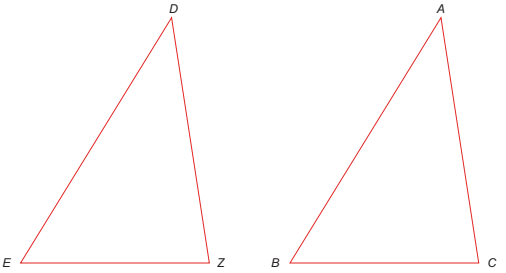
***III. Önerme*: Verilmiş olan bir *AB* hattından daha kısa bir *C* hattının çıkarılması.**

Yukarıda olduğu gibi *A* noktasında *C* hattına eşit olan *AZ* hattı çizilir. *A* merkezli *AZ* yarıçaplı *EZD* dairesi çizilir, bu daire *AB* hattını *D* noktasında keser (*Şekil 9*). Bu durumda *AD* = *AZ* olduğundan *AB* hattından *C* hattına eşit *AD* çıkarılmış olur ve geriye *BD* kalır.



Şekil 9

***IV. Önerme*: Bir üçgenin iki kenarı ve bunların arasındaki köşe bir diğer üçgenin iki kenarı ve bunların arasındaki köşeye eşitse bu iki üçgen eşittir, diğer bir deyişle uygun kenar ve köşelerin tümü eşittir.**



Şekil 10

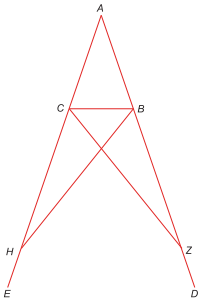
ABC ve *DEZ* üçgenlerinde *AB* = *DE*, *AC* = *DZ* ve (*A*) = (*D*) olduğu varsayılır (*Şekil 10*). Bu iki üçgenin eşit, diğer bir deyişle *BC* = *EZ*, ∠(*B*) = ∠(*E*) ve ∠(*C*) = ∠(*Z*) olduğu kanıtlanmalıdır.

Kanıtı: *ABC* üçgenini *DEZ* üçgeni üzerine *B* noktası *E* üzerine, *AB* hattı *DE* üzerine *AC* hattı *DZ* üzerine gelecek şekilde yerleştirelim. Bu durumda iki hat eşit olduğundan *A* noktası *D* üzerine gelecektir. ∠(*A*) = ∠(*D*) olduğundan *AC* hattı *DZ* hattı üzerine ve *C* noktası *Z* üzerine gelir. Böylece zorunlu olarak *BC* hattı da *EZ* hattı üzerine gelir. Aksi halde iki nokta arasında iki farklı doğru geçmiş olurdu ki, bu da temel koyuta ters düşerdi. Şu halde, kanıtlamamız gerektiği gibi, üçgenin uygun kenar ve köşeleri eşittir.

***V. Önerme*: İkizkenar üçgenlerde taban açıları eşittir.**

Söz konusu üçgende ikizkenarlar uzatıldığında, taban ve komşu açıları eşittir (*Şekil 11*).

Açıklama: *ABC* ikizkenar üçgeninde *AB* = *AC* olduğuna göre ∠(*ABC*) =∠ (*ACB*) ve *AB*, *AC* kenarları *D* ve *E* yönlerinde uzatıldığında ∠(*CBD*) = ∠(*BCE*) olduğu gösterilmelidir.



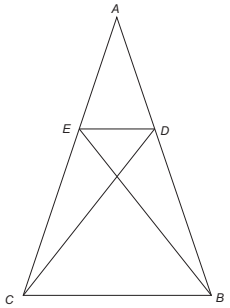
Şekil 11

Kanıtı: *BD* üzerinde herhangi bir *Z* noktası alalım. *CE* hattı üzerinde *BZ* hattına eşit *CH* kısmını ayıralım (III. Teklif). *CZ* ve *BH* hatları çekilirse, *ABH* ve *ACZ* üçgenlerinde *AB* = *AC*, *AH* = *AZ* ve ∠(*A*) ortak olduğundan, *BH* ve *CZ*'ye eşit olmasıyla bu üçgenler de eşit olur. Aynı şekilde *BZ* = *CH*, ∠(*ABH*) = ∠(*ACZ*) ve ∠(*H*) = ∠(*Z*) olur. Benzer şekilde *BCH* ve *CBZ* üçgenleri de, *BH* = *CZ*, *CH* = *BZ* ve ∠(*H*) = ∠(*Z*) nedeniyle eşittir. Şu halde ∠(*ACZ*) ve ∠(*ABH*) açılarından ∠(*ZCB*) ve ∠(*HBC*)- açıları çıkarılırsa ∠(*ACB*) ve ∠(*ABC*) açıları birbirine eşit olur.

Not: Bu önerme *el-Me'mûnî* (7. İslam Halifesi (Hilafeti M. 813-833) olarak ünlüdür. Önerme kenarlar uzatılmadan da kanıtlanabilir.

Kanıtı: İkizkenar üçgenin *AB* kenarı üzerinde herhangi bir *D* noktası alalım (*Şekil 12*). Diğer *AC* kenarı üzerinde *A* noktasından *AD* hattına eşit *AE* kısmını ayıralım. *EB*, *CD* ve *ED* hatlarını çekelim, *AD* = *AE*, *AC* = *AB* ve ∠(*A*) ortak olduğundan *ACD* ve *ABE* üçgenleri, eşittir. Benzer şekilde, *EC* = *DB* ve ∠(*ECD*) = ∠(*DBE*) olduğundan, *CED* ve *BED* üçgenleri de eşittir. Şu halde ∠(*CDE*) = ∠(*BED*), ∠(*CED*) = ∠(*BDE*) olduğundan

$\angle(DEB) - \angle(CED) = \angle(CDE) - \angle(BDE)$ yani $\angle(BEC) = \angle(CDB)$ olur. Ayrıca $BE = CD$, $BD = CE$ ve $\angle(BEC) = \angle(BDC)$ olduğundan BEC ve BDC üçgenleri de eşit ve $\angle(ABC) = \angle(ACB)$ olduğu görülür.

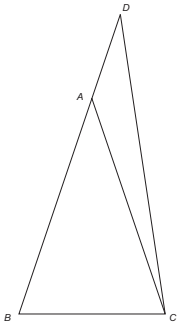


Şekil 12

***VI. Önerme*: Bir üçgenin iki açısı eşitse, eşit açılar karşısındaki kenarlar da eşittir.**

Açıklama: ABC üçgeninde $\angle(B) = \angle(C)$ olduğunda $AB = AC$ olmalıdır (*Şekil 13*).

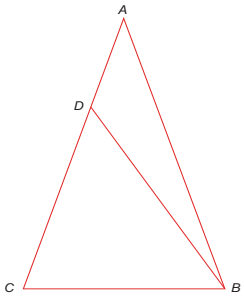
Kanıtı: Aksini yani $AB > AC$ olduğunu farz edelim. Bu durumda AC kenarı üzerinde AB hattına eşit CD parçasını çıkaralım ve D noktasını B noktasıyla birleştirelim. Bu durumda $AB = CD$, BC ortak ve $\angle(ABC) = \angle(ACB)$ olduğundan ACB ve DCB üçgenleri eşittir. Ancak bu durum, tamın kendi parçasıyla birlikte eşit olması anlamına geldiğinden mümkün değildir ve $AB = AC$ olmasını gerektirir.



Şekil 13

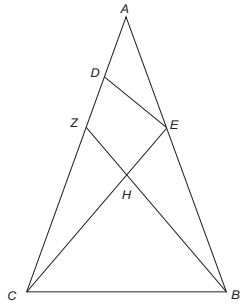
Not: Bu önerme aşağıdaki şekillerde de kanıtlanabilir;

1- *AC* devamı üzerinde *AB* = *CD* parçası ayrılır ve aynı mantık silsilesi uygulanırsa tekrar yukarıdaki çelişkiye ulaşılır (*Şekil 14*).



Şekil 14

2- *AC* > *AB* olduğunu varsayalım (*Şekil 15*). *AC* kenarı üzerinde *AB* = *CD* olacak şekilde bir *D* ve *E* noktası, *AB* üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere yine *AC* üzerinde *EB* = *CZ* şekilde bir *Z* noktası oluşturalım. Eğer *DE*, *EC* ve *ZB* hatları çekilirse, *EB* = *CZ*, ∠(*ABC*) = ∠(*ACB*) ve *CB* kenarı ortak olduğundan *CZB* ve *CEB* üçgenleri eşittir. Bu iki eşit üçgene ortak olan *CHB* üçgeni çıkarılırsa, kalan *CZH* ve *BEH* üçgenleri de eşit olmalıdır.



Şekil 15

Diğer taraftan *AB* = *CD*, *ZB* = *CE* ve ∠(*ACE*) = ∠(*ABZ*) olduğundan *DEC* ve *AZB* üçgenleri de eşittir. Bu iki eşit üçgene ortak *EHZD* yüzeyi çıkarıldığında Δ(*ZHC*) = Δ(*EHB*) + Δ(*ADE*) olur diğer bir deyişle tamı kendisiyle parçasına eşit olurdu ki bu mümkün değildir. Bu şeklin açıklaması

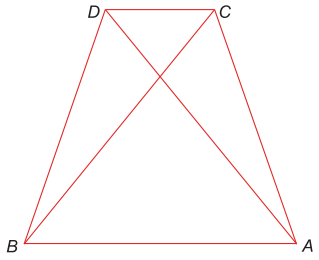
on sekizinci şeklin açıklamasından sonraya tehir edilirse [anlaşılması] çok daha kolay olur. Çünkü bu şekil bununla açıklığa kavuşmuyor.

***VII. Önerme*: Bir doğru parçasının *AB* uçları bir *C* noktasıyla birleştirilirse, aynı doğru parçasının uçlarını, *C* noktasıyla aynı tarafta, eşit uzunlukta olan iki doğru parçasıyla birleştiren başka bir nokta bulunmaz.**

Mesela *A* ve *B* uçlarından *C* noktasında birleşmek üzere *AC* ve *BC* doğrularını çıkarılsın. *C* tarafında ama *C* noktasında birleşmeyecek olan bununla birlikte *AC* ve *BC* doğrularına eşit iki doğru çıkarmak mümkün farz edilsin ve $AD = AC$ ve $BD = BC$ olacak şekilde *D* noktasında birleşsinler. *C* ve *D* noktalarını birleştiririz. $\angle(ACD)$ ve $\angle(ADC)$ açıları *AC* ve *AD* kenarlarının eşitliği sebebiyle eşit olur. $\angle(BCD) < \angle(ACD) < \angle(ADC) < \angle(BDC)$ durumunda $\angle(BCD)$, $\angle(BDC)$ açısından kat kat küçük olmasına rağmen $BC = BD$ sebebiyle eşit olması gerekirdi. Bu ise çelişkidir. Böylece bizim istediğimiz şekilde önerme ispatlanmıştır.

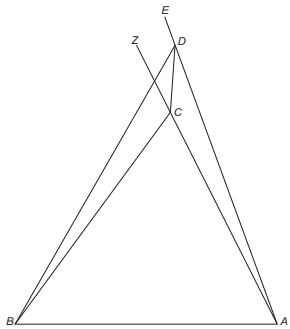
Bu önerme 5 farklı yerleşim şekline göre tartışılabilir:

1- *D* noktası *ABC* üçgeninin dışında yer alır (*Şekil 16*). Bu durumda *A* ve *B* noktalarından *C* ve *D* noktasına çekilen 4 doğrunun ikisi bazen *D* noktasından önce başka bir noktada kesişir.



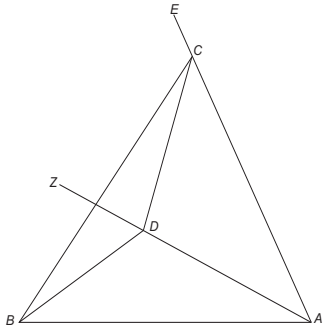
Şekil 16

2- Birinci yerleşim geneldir, ancak bazen 4 doğrunun ikisi diğer birleştirme hattının önündeki bir noktada kesişir (*Şekil 17*).



Şekil 17

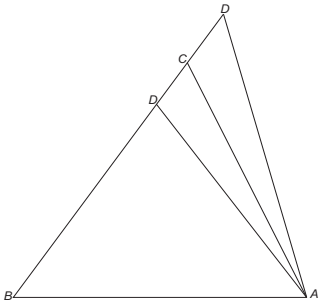
3- *D* noktası *ABC* üçgeninin içindedir (*Şekil 18*).



Şekil 18

4- *D* noktası *ABC* üçgeninin *AC* ya da *BC* kenarı üzerindedir (*Şekil 19*).

(Bu önerinin kanıtı çeviri açık anlaşılmadığından verilmemiştir).

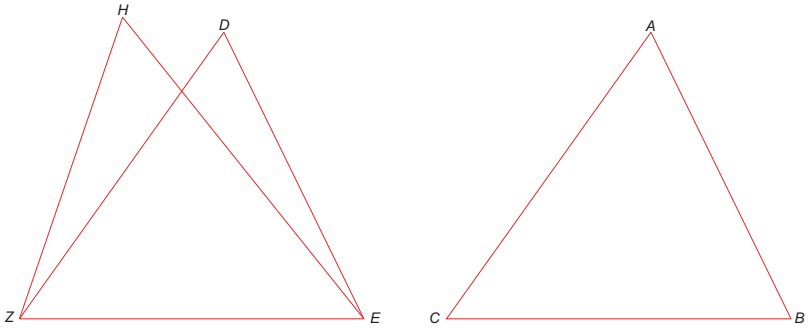


Şekil 19

***VIII. Önerme*: Bir üçgenin üç kenarı başka bir üçgenin denk gelen kenarlarına eşitse, bu iki üçgen ve onların uygun açıları da birbirine eşittir.**

Açıklama: *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde, *AB* = *DE*, *AC* = *DZ* ve *CB* = *ZE* olduğunu varsayalım. Bu durumda Δ(*ABC*) = Δ(*DEZ*) ve ∠(*A*) = ∠(*D*), ∠(*B*) = ∠(*E*), ∠(*C*) = ∠(*Z*) eşitlikleri oluşur(*Şekil 20*).

Kanıtı: *ABC* üçgenini *DEZ* üçgeni üzerine *BC* kenarı *EZ* kenarı üzerine gelecek şekilde yerleştirelim. Bu durumda geriye kalan iki uygun taraf da birbiri üzerine gelir. Aksi halde *AB* ve *AC* kenarları *DE* ve *DZ* üzerine gelecek yerde *HE* ve *HZ* üzerine gelir. Eğer *DEZ* üçgeni yerine *ABC* üçgeni yazılırsa yukarıdaki önermeye göre *ZE* hattının iki ucundan çıkan hatlar *HE* = *DE*, *HZ* = *DZ* koşulunu zedeleyecek şekilde kesişeceğinden bu durum mümkün değildir.

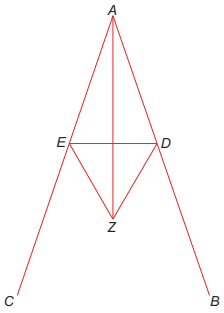


Şekil 20

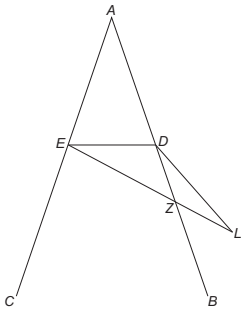
***IX. Önerme*: Verilen bir *CAB* açısının ikiye bölünmesi.**

AB hattı üzerinde herhangi bir *D* noktası alınır (*Şekil 21*). *AC* hattı üzerinde *A* noktasından itibaren *AD*' ye eşit bir *AE* parçası ayrılır. *E* ve *D* noktaları birleştirilir, *EDZ* eşkenar üçgeni oluşturulur. Bu durumda *AZ* hattı, verilen *CAB* açısını ikiye bölen hattır.

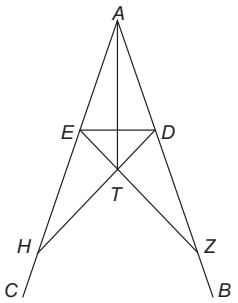
Uygun kenarlar eşit olduğundan *AEZ* ve *ADZ* üçgenleri eşittir. Bu üçgenlerin açıları da eşit olduğundan ∠(*CAZ*) = ∠(*BAZ*) olur ve önerme kanıtlanmış olur.



Şekil 21



Şekil 22



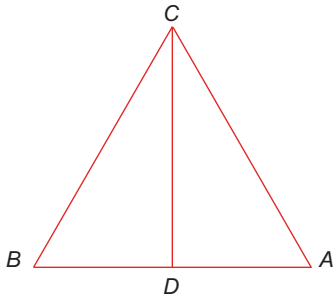
Şekil 23

Not: Daha kesin olmak için belirtelim ki Z noktası AB ve AC açı kenarlarının arasında olmalıdır. Aksi halde Z noktası ya bu iki hattın üzerinde ya da L noktasında olduğu gibi dışında bulunur (*Şekil 22*). Hâlbuki $\angle(ZED) = \angle(ZDE)$ ve $\angle(CED) = \angle(BDE)$ olduğundan, tam tamın kısmına ve tamdan daha büyük kısım tama eşit olacağından bu mümkün değildir.

Bu önerme şöyle de kanıtlanabilir: DB hattı üzerinde keyfi bir Z noktası alınır ve EC hattı üzerinde $EH = DZ$ kısmı ayrılır (*Şekil 23*). HD ve EZ hatları çekilir, bu iki hat T noktasında kesişir, AT hattı A açısını ikiye böler. Çünkü *V. Önerme* gereği $\Delta(ZED) = \Delta(EDH)$ ve bunun sonucunda $\angle(ZED) = \angle(EDH)$ ve $ET = DT$ olur. Şu halde kenarların eşitliği nedeniyle $\Delta(AET) = \Delta(ADT)$ ve bu üçgenlerde $\angle(EAT) = \angle(DAT)$ nedeniyle istenen sonuca ulaşılmış olur.

***X. Önerme*: Verilen bir *AB* hattının ikiye bölünmesi.**

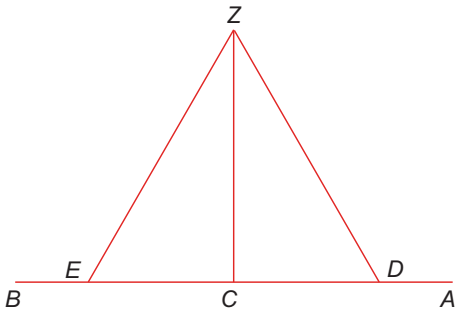
Verilen AB hattı üzerinde bir ABC eşkenar üçgeni oluşturulur ve C açısını ikiye bölen CD hattı çizilir (*Şekil 24*). $CB = CA$, $\angle(BCD) = \angle(ACD)$ ve CD ortak olduğundan $\Delta(CDA) = \Delta(CDB)$ olur. Buna göre $DA = DB$ olduğundan CD hattı isteğimiz yönünde AB hattını ikiye böler.



Şekil 24

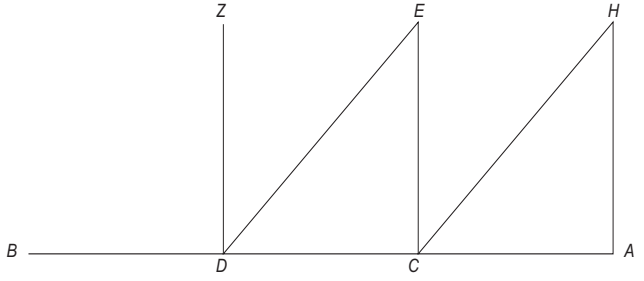
***XI. Önerme*: Bir doğru üzerindeki bir noktadan doğruya dik çıkmak.**

Kanıtı: *AB* doğrusu ve onun üzerinde herhangi bir *C* noktası verilmiş olsun (*Şekil 25*). Doğru üzerinde herhangi bir *D* noktası ve *CD* = *CE* olmak üzere bir *E* noktası alınır, *ED* hattı üzerine bir *ZED* eşkenar üçgen oluşturulur. Eğer *ZC* hattı çekilirse istenen dik elde edilmiş olur. Zira denk gelen kenarları eşit olan *ZDC*, *ZEC* üçgenleri eşittir. Bunun sonucu komşu ∠(*ZCD*) ve ∠(*ZCE*) açıları da eşittir. *ZC* doğrusu dik açı tanımı gereği aranan diktir.



Şekil 25

Not: Bir tarafı sınırlı hattın ucundan dik çıkmak istediğimizde ki bu iş ehlinin çokça ihtiyaç duyduğu bir hususdur keyfi bir *C* noktası alınır ve *AC* = *CD* alınarak *D* noktası bulunur. (*Şekil 26*). Yukarıdaki yöntem uygulanarak doğruya *CE* ve *DZ* dikleri çıkılır. ∠(*ACE*) ve ∠(*CDZ*) açılarını ikiye bölen *CH* ve *DE* hatları çizilir. [∠(*ECD*) + ∠(*CDE*)] < 180° olduğundan *C* ve *D* noktalarından çıkan *CE* ve *DE* hatları *E* noktasında kesişir. *ED* parçasına eşit *HC* parçası ayrılır ve *AH* hattı çizilir. Bu hat istenen diktir.

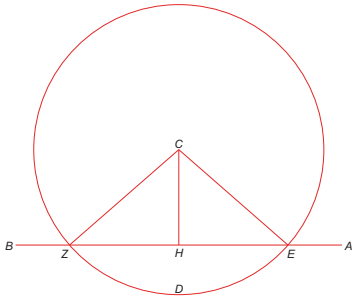


Şekil 26

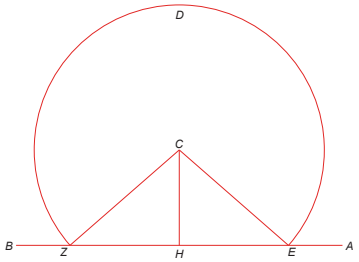
Kanıtı: "*AH*C ve *CED* üçgenlerinde *AC* = *CD*, *CH* = *DE* ve ∠(*CDE*) = ∠(*ACH*) olması sebebiyle ∠(*HAC*) = ∠(*ECD*) olur ki bu da bizim istediğimizdir."

***XII. Önerme*: *AB* doğrusu dışında verilmiş keyfî herhangi bir noktadan bu doğruya dik inmek.**

Kanıtı: *AB* doğrusu ve onun dışında keyfi bir *C* noktası verilmiş olsun (*Şekil 27*). *AB* hattı üzerinde keyfi bir *D* noktası alıp, *C* merkezli *CZ* yarıçaplı bir daire çizilir. Bu daire genellikle *AB* hattını *Z* noktası dışında bir *E* noktasında da keser. *ZE* hattını ikiye bölen *H* noktası *C* noktasıyla birleştirilirse, *ZCH* ve *ECH* üçgenlerinde tüm kenarlar eşittir. Neticede *CH* hattının her iki tarafındaki ∠(*CHZ*) ve ∠(*CHE*) açıları eşittir ve ayrıca [∠(*CDZ*) + ∠(*CHE*)] = 180° olduğundan *CD* hattı aranan diktir.



Şekil 27



Şekil 28

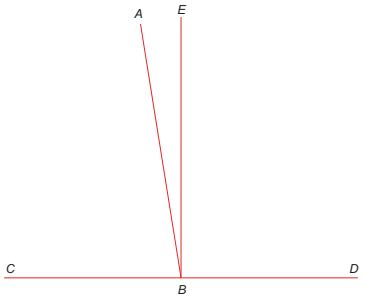
Not: Birçok geometri uzmanı hattı kesmeden dik inmek ister. Bunun için *AB* hattı üzerinde bir *E* noktası seçilir ve *C* merkezli *CE* yarıçaplı daire çizilir (*Şekil 28*). Eğer bu daire *H* noktasında verilen hatta dokunursa, *CH* aranan diktir. Eğer daire hattı *E* ve *Z* noktalarında keserse, *EZ* hattını yarıya bölen *H* noktası belirlenir. Yukarıda gösterildiği gibi *C* ve *H* noktalarını birleştiren hat aranan diktir.

***XIII. Önerme*: Bir hat üzerindeki bir noktadan herhangi bir yöne çekilen bir hattın iki yanında ya dik olan iki açı oluşur ya da iki dik açının toplamına eşit iki açı oluşur.**

Bu iki açı eşit ise, bu durumda çekilen hat ilkine diktir; eşit değilse, bu durumda açıların toplamı 180°'ye eşittir.

Kanıtı: *CD* hattı üzerindeki *B* noktasından *AB* hattı çekilir ve oluşan iki komşu açı dikse *BA* hattı diktir. Eğer *BA* hattı dik değilse *BE* dik hattı çizilir ve ∠(*CBE*), ∠(*EBA*) ve ∠(*ABF*) şeklinde üç açı oluşur (*Şekil 29*).

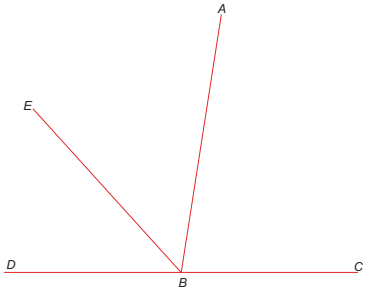
Bu durumda ∠(*CBA*) ve ∠(*ABE*) açılarının toplamı bir dik açı, ∠(*ABD*) ve ∠(*ABE*) açılarının farkı bir dik açı oluşturur. Şu halde ∠(*CBA*) ve ∠(*ABD*) açılarının toplamı iki dik açıya eşit olur ki bu da bizim kanıtlamak istediğimiz hususdur.



Şekil 29

***XIV. Önerme*: Eğer toplamları iki dik açıya eşit olan iki açının kenarları çakıştırılırsa açıların diğer kenarları bir doğru oluşturur.**

Açıklama: ∠(*DBA*) ve ∠(*ABC*) açılarının toplamı iki dik açıya eşittir, eğer *AB* hattının *B* noktasında *CB* ve *DB* hatları birleştirilirse *DBC* hattı bir doğru oluşturur (*Şekil 30*).



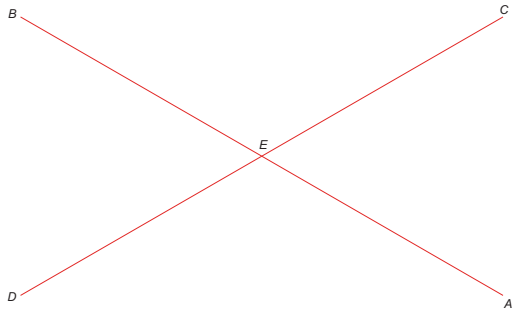
Şekil 30

Kanıtı: *DBC* hattının bir doğru olmadığını düşünelim. Bu durumda *CB* hattının *CBE* olduğunu düşünelim. Bu durumda ∠(*ABC*) ve ∠(*ABE*) açılarının toplamı iki dik açıdan küçüktür.

***XV. Önerme*: İki doğrunun kesişmesi sonucu oluşan karşılıklı açılar eşittir.**

Kanıtı: Örneğin *AC* ve *BD* doğrularının kesişmesi sonucu oluşan ∠(*AED*) ve ∠(*BEC*) açıları eşittir. Çünkü [∠(*AED*) + ∠(*BEA*)] = [∠(*CED*) + ∠(*AED*)] = (2 dik açı) olduğundan ∠(*BEA*) = ∠(*CED*) olacağı görülür.

Netice: Kanıtlanan önermeden açıkça anlaşılabileceği gibi iki hattın kesişmesi sonucu oluşan 4 açının toplamı 4 dik açıya eşittir.



Şekil 31

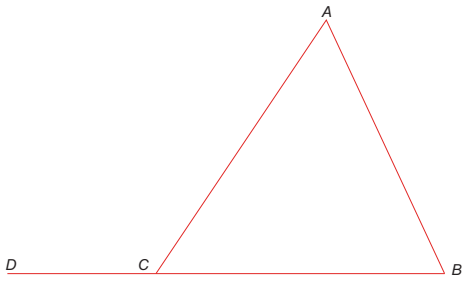
Not: Bu sonuç nokta nerede olursa olsun ve açıların sayısı kaç olursa olsun noktanın etrafında oluşan tüm [karşılıklı] açılar için sabittir.

***XVI. Önerme*: Herhangi bir üçgenin bir kenarı uzatıldığında oluşan dış açı, kendine bitişik olmayan iç açıların her birinden daha büyüktür.**

Açıklama: Bir *ABC* üçgeni verilmiş ve bu üçgende *BC* kenarı *D* noktasına kadar uzatılmış olsun (*Şekil 32*). Amaç *DCA* açısının *A* ve *B* açılarının her birinden daha büyük olduğunu kanıtlamaktır.

Kanıtı: Üçgenin *AC* kenarı ikiye bölünür ve *E* noktası elde edilir. *EB* mesafesi *EB* = *EZ* olacak şekilde kendi boyu kadar uzatılır. *C* ve *Z* noktaları birleştirilir. *EB* = *EZ*, *AE* = *CE* ve karşılıklı açılar nedeniyle ∠(*CEZ*) = ∠(*AEB*) olduğundan *ABE* ve *CZE* üçgenleri eşittir. Şu halde ∠(*A*) = ∠(*ZCE*) olduğundan ∠(*DCA*) > ∠(*ZCE*) = ∠(*A*) ilişkisi geçerlidir.

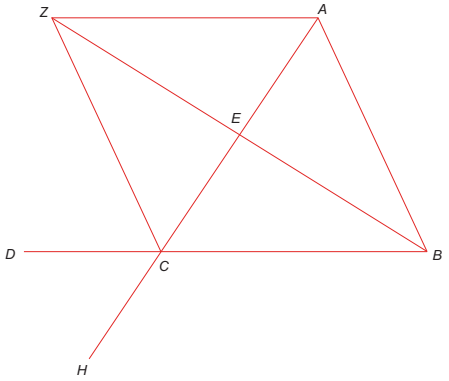
Aynı şekilde eğer *AC* kenarı *H* noktasına kadar uzatılır ve yukarıdaki düşünce sürdürülürse, ∠(*HCB*) = ∠(*DCA*) ve amaçlanan ∠(*DCA*) > ∠(*B*) sonucuna varılır.



Şekil 32

***XVII. Önerme*: Herhangi bir üçgenin iki iç açı toplamı iki dik açıdan küçüktür.**

Açıklama: Bir *ABC* üçgeninde ∠(*B*) ve ∠(*ACB*)açılarının toplamı iki dik açının toplamından küçük olduğu kanıtlanmalıdır: ∠(*B*) + ∠(*ACB*) < 180° (*Şekil 33*).

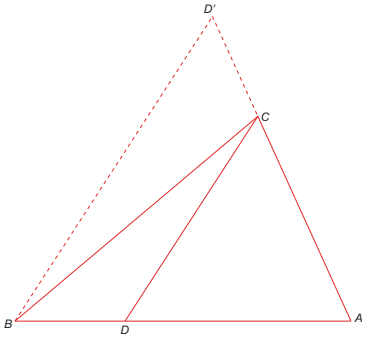


Şekil 33

Kanıtı: Üçgenin *BC* kenarı *D* noktasına kadar uzatılır. Bu durumda ∠(*ACD*) ve ∠(*ACB*) açılarının toplamı iki dik açının toplamına eşittir: [∠(*ACD*) + ∠(*ACB*)] = 180°. Ayrıca ∠(*ACD*) > ∠(*B*) olduğundan, [∠(*B*) + ∠(*ACB*)] < 180° yazılabilir. Üçgenin diğer açıları için de aynı ifadeler geçerlidir.

***XVIII. Önerme*: Üçgenlerde büyük açı büyük kenar karşısında bulunur.**

Açıklama: Eğer *ABC* üçgeninde *AB* > *AC* ise, bu durumda *ACB* açısının *CBA* açısından büyük olduğu gösterilmelidir (*Şekil 34*).

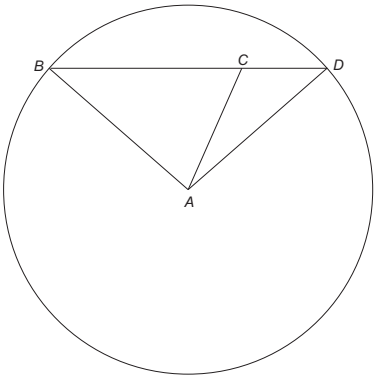


Şekil 34

Kanıtı: *AB* hattı üzerinde *AD* = AC hattı alınır ve *D* noktası *C* noktasıyla birleştirilir. Bu durumda oluşan ikizkenar *ACD* üçgeninde ∠(*ACD*) = ∠(*ADC*) olduğundan ∠(*ACB*) > ∠(*ACD*) ve istenildiği gibi ∠(*ACB*) > ∠(*CBA*) olur.

Not: Üçgenin *AC* kenarı yönünde *AB* kenarına eşit bir *D'* noktası belirlemek ve sonra *BD* hattını çekerek kanıtı yukarıda olduğu gibi gerçeklemek de mümkündür.

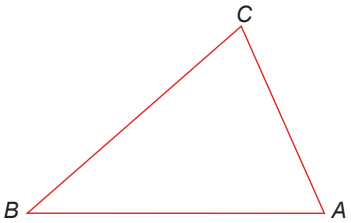
Başka bir *kanıt*: *A* noktası etrafında *AB* yarıçaplı bir daire çizilir (*Şekil 35*). Üçgenin *BC* kenarı daireyi *D* noktasında kesinceye kadar uzatılır. ∠(*ACB*) açısı, *ADC* üçgeninin dış açısı olduğundan, *ADC* açısından büyüktür. ∠(*ABC*) = ∠(*ADC*) olduğundan ∠(*ACB*) açısı ∠(*ABC*) açısından büyüktür.



Şekil 35

***XIX. Önerme*: Üçgenlerde büyük kenar büyük açı karşısında bulunur.**

Bir üçgende C açısının B açısından büyük olduğunu varsayalım (*Şekil 36*). AB kenarının AC kenarından büyük olduğunu kanıtlamalıyız. Eğer böyle olmasa $AB = BC$ ya da $AB < AC$ olması gerekir. Birinci durumda $\angle(C) = \angle(B)$ ve ikinci durumda $\angle(C) > \angle(B)$ olmalıdır. Ancak varsayım gereği C açısı B açısından büyük olduğuna göre her iki hal de olamaz ve $AB > AC$ olmalıdır.

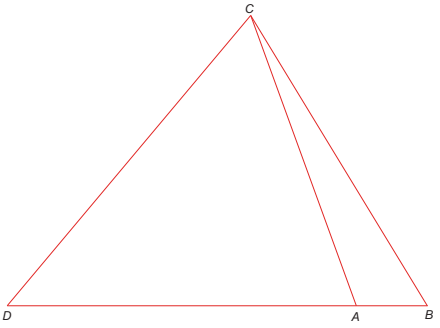


Şekil 36

***XX. Önerme*: Üçgenlerde iki kenar uzunluğu toplamı üçüncü kenardan uzundur.**

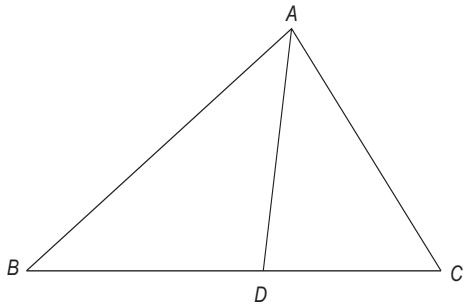
Örnek olarak ABC üçgeni alınırsa $(AB + AC) > BC$ olduğu kanıtlanmalıdır (*Şekil 37*).

Kanıtı: ABC üçgeninde BA kenarını uzatarak D noktasını $DA = AC$ olacak şekilde belirleyelim. Bu durumda $\angle(ACD)$ açısı $\angle(D)$ açısına eşit olur. Bunun sonucunda $\angle(DCB)$ açısının karşısındaki DB hattı, $\angle(CDB)$ açısının karşısındaki CB hattından büyüktür: $DB > CB$. Diğer bir deyişle $(DA + AB) > CB$ ya da $DA = AC$ olduğundan $(CA + AB) > CB$ olur ki, bu da bizim kanıtlamak istediğimizdir. Bu önermeye *el-himârî önermesi* adı verilir.



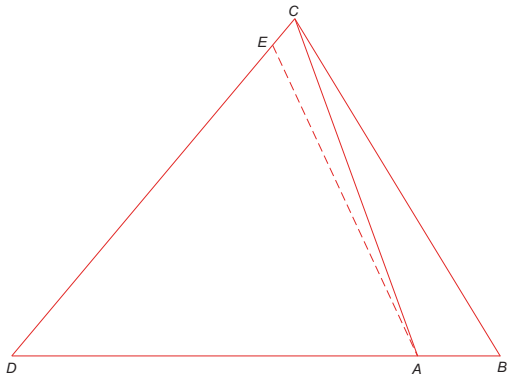
Şekil 37

Başka bir *kanıt*: *ABC* üçgeninde *A* açısını ikiye bölen *AD* hattını çekelim (*Şekil 38*). *ADC* açısı *DAB* üçgeninin bir dış açısı olduğundan ∠(*ADC*) > ∠(*DAB*) geçerlidir. Ayrıca ∠(*DAB*) = ∠(*DAC*) olduğundan ∠(*ADC*) > ∠(*DAC*) ve bunun sonucunda *AC* > *CD* olur. Aynı şekilde *AB* > *DB* olduğu da gösterilebilir. Şu halde (*AC* + *AB*) > (*DB* + *CD*) ya da neticede (*AC* + *AB*) > *CB* olduğu görülür.



Şekil 38

Daha başka bir *kanıt*: Eğer (*AC* + *AB*) > *CB* ilişkisi hatalıysa (*AC* + *AB*) = *CB* ya da (*AC* + *AB*) < *CB* olmalıdır (*Şekil 38a*). *EC* = *AB* olduğunu varsayalım. Bu durumda yukarıdaki varsayım gereği ya *CE* > *AC* ya da *CE* = *AC* olmalıdır.



Şekil 38a

Eğer *CE* = *AC* ise ∠(*CAE*) = ∠(*CEA*) olur, ayrıca ikizkenar *BAE* üçgeni nedeniyle ∠(*EAB*) = ∠(*AEB*) olduğundan ∠(*CAE*) + ∠(*EAB*) = ∠(*CEA*) + ∠(*AVB*) yazılabilir. Hâlbuki ∠(*AEB*) + ∠(*CE'A*) = 180° olduğundan

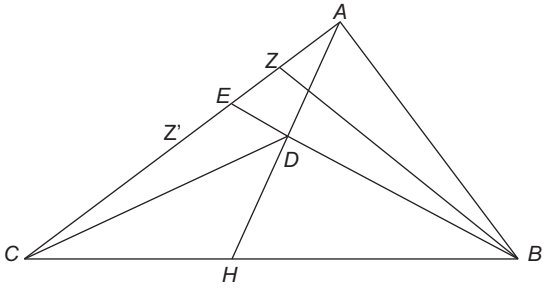
$\angle(CAE) + \angle(EAB) = 180°$ olmalıdır. Şu halde AC ve AB hatları aynı yönde olması gerekir, ancak bu yanlıştır.

Eğer $CE > AC$ ise $\angle(CAE) > \angle(CEA)$ olur. Buna göre $\angle(CAE) + \angle(EAB) > \angle(CEA) + \angle(AEB) = 180°$ diğer bir deyişle $\angle(CAE)$ ve $\angle(EAB)$ açılarının toplamı 2 dik açıdan büyük olmalıdır ki bu da yanlıştır.

***XXI. Önerme*: Herhangi bir üçgenin kenarlarından birinin uçlarından çekilen ve üçgenin içindeki bir noktada kesişen iki hattın toplamı, üçgenin diğer iki kenarının toplamından daha küçüktür. Ayrıca bu iki hattın oluşturduğu açı üçgenin diğer iki kenarı arasındaki açıdan büyüktür.**

Açıklama: Bir ABC üçgeni BC kenarının iki ucundan çekilen CD ve DB hatları D noktasında kesişmiş olsun (*Şekil 39*). $(CD + DB) < (AC + AB)$ ve $\angle(CDB) > \angle(CAB)$ olduğu kanıtlanmalıdır.

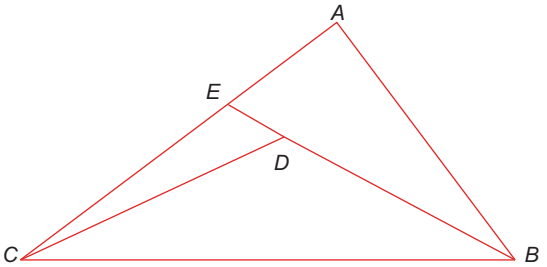
Kanıtı: Eğer BD hattı E noktasına kadar uzatılırsa $(BA + AE) > BE$ ve EC ilave edilirse $(BA + AE + EC) > (ED + DB + EC)$ yazılabilir. Bundan başka $(DB + ED + EC) > (DB + DC)$ yazılabilir. Bu son eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa: $[(BA + AE + EC) + (DB + ED + EC)] > [(ED + DB + EC) + (DB + DC)]$ ya da $(AB + AC) > (DB + EC)$ olur ve ilk koşul kanıtlanmış olur. Ayrıca CED üçgeninde $\angle(CDB)$açısı dış açı olduğundan $\angle(CDB) > \angle(CEB)$ ve $\angle(CEB) > \angle(CAB)$ olduğundan ikinci $\angle(CDB) > \angle(CAB)$ ilişkisi de kanıtlanmış olur.



Şekil 39

Başka yoldan kanıtı: Eğer $(DC + DB)$ toplamı $(AC + AB)$ toplamından küçük değilse bu durumda ya eşit ya da ondan büyüktür. Her iki durumda DC ya da DB, CA ya da AB hattından kısadır ya da değildir (*Şekil 40*). Örnek olarak $DC < CA$ ise bu durumda $DB > AB$ olmalıdır. CD, CA'dan

küçük olsun. *AZ* de *BD*'nin *BA*'ya fazlalığı kadar olsun. *AC* üzerindeki *Z* noktası *E* noktasına düşmez. Aksi halde (*AB* + *AE*) = *DB* olması gerekirdi. Ancak burada (*AB* + *AE*) < *BE* olması gerektiğinden bu yanlıştır. Benzer şekilde *Z* noktası *E* ve *C* noktaları arasına da düşemez. Eğer bu gerçekleşmiş olsa (*AB* + *AZ*') < *BE* olurdu ki bu da yanlıştır.



Şekil 40

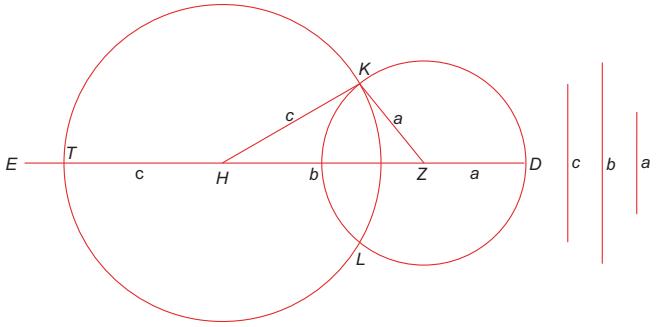
Buna göre *Z* noktası kesinlikle *A* ve *E* noktaları arasına düşmelidir. Eğer *ZB* ve *ZD* hatları çekilirse, (*AB* + *AZ*) = *DB* varsayımına göre, *DB* hattı *BZ* hattından uzundur. Şu halde ∠(*BZD*) açısı ∠(*BDZ*) açısından büyüktür ve *CD* hattı koşul gereği, ya *CZ* hattına eşit ya da ondan uzun olur.

Bundan başka ∠(*CZD*) açısı ya ∠(*CDZ*) açısına eşit ya da ondan büyüktür. Bu durumda ∠(*BZC*) açısı, ∠(*BDZ*) ve ∠(*CDZ*)açısının toplamından büyük olur, hâlbuki ∠(*BDZ*) ve ∠(*CZD*) açılarının toplamı iki dik açıdan büyük olmalıdır, buna göre de ∠(*BZC*) açısı da iki dik açıdan büyük olur ki bu da yanlıştır. İkinci durumda, *DB* ve *CD* hatlarından biri uygun olarak *CA* ve *AB* hatlarının birinden küçük olmaması için ya eşit ya da büyük olmalıdır. Bu durumda *AD* hattını çekip yukarıda olduğu gibi ∠(*CAB*) açısının ∠(*BDA*) ve ∠(*CDA*) açıları toplamından ya büyük ya da eşit olduğunu göstermemiz gerekir ki bu da yanlıştır.

Böylece zorunlu olarak, *CD* ve *DB* toplamı *CA* ve *AB* toplamından küçük olmalıdır. *AD* hattını *H* noktasına kadar uzatalım. ∠(*BDH*) açısı ∠(*ABD*) üçgeninin dış açısı olduğundan, ∠(*BDH*) açısı ∠(*BAD*) açısından büyüktür. Aynı nedenden ∠(*CDH*) açısı da ∠(*CAD*) açısından büyüktür. Neticede ∠(*CDH*) ve ∠(*BDH*) açılarının toplamı ∠(*CAD*) ve ∠(*BAD*) açıları toplamından büyük ya da ∠(*CDB*) açısı ∠(*BAC*) açısından büyüktür ki bu da bizim söylediğimize uyar.

***XXII. Önerme*: Eğer verilmiş olan üç hattan ikisinin toplamı üçüncüsünden büyükse, bu durumda kenarları her bir hatta eşit olan bir üçgen oluşturulabilir.**

Kanıtı: *a*, *b*, *c* hatlarının ve *ED* doğrusunun verildiğini varsayalım (*Şekil 41*). *ED* doğrusu üzerindeki bir *Z* noktasına *ZD* yönünde *a* hattını, *HZ* arasına *b* hattını ve *HT* arasına *c* hattını yerleştirelim. İlkin *Z* noktasında *ZD* yarıçaplı *KDL* dairesini, sonra *H* noktasında *HT* yarıçaplı *KLT* dairesini çizelim. Bu iki daire *K* ve *L* noktalarında kesişir. *KH* ve *KZ* hatları çizildiğinde aranan *KZH* üçgeni elde edilmiş olur. Gerçekten *KZ* = *ZD* = *a*, *HZ* = *b* ve *HK* = *HT* = *c* olur.



Şekil 41

Not: Üçgen oluşturmanın gerek koşulu verilen üç hattan ikisinin toplamının üçüncüsünden uzun olması, diğer bir deyişle iki dairenin birbirini kesmesidir:

1- Eğer (*a* + *b*) parçası *c* hattından büyük değilse, ya *c* hattına eşit ya da daha küçük olur. Bu durumda *DKL* dairesi ya *TKL* dairesine teğet olur ya da dairenin içinde kalır.

2- Eğer (*b* + *c*) parçası *a* hattından büyük değilse, ya *a* hattına eşit ya da daha küçük olur. Bu durumda *DKL* dairesi ya *TKL* dairesine teğet olur ya da dairenin içinde kalır.

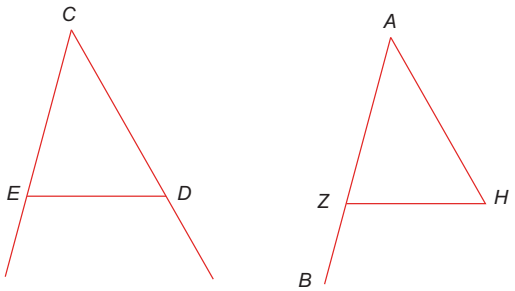
3- Eğer (*c* + *a*) parçası *b* hattından büyük değilse, yukarıda görüldüğü gibi ya *HZ* = (*HT* + *ZD*) ya da *HZ* > (*HT* + *ZD*) olur.

4- Bu durumda iki daire ne birbirini keser ne de birbirinin içinde olabilir.

5- Sadece dıştan teğet olabilir ya da teğet olamazlar.

***XXIII. Önerme*: Bir doğru üzerinde, verilen bir açıya eşit bir açı oluşturmak.**

Açıklama: Bir *AB* doğrusu ve *C* açısının verildiğini varsayalım (*Şekil 42*). Amaç *AB* doğrusu üzerindeki bir *A* noktasında *C* açısına eşit bir açı oluşturmaktır.



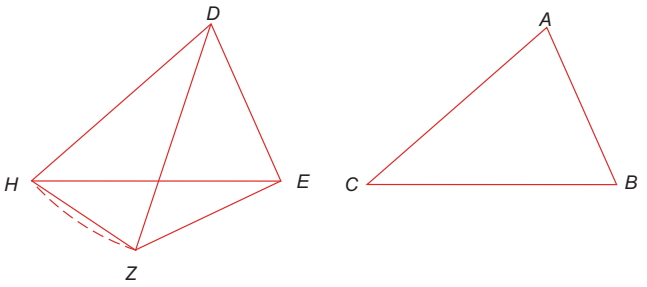
Şekil 42

Kanıtı: *C* açısı kenarlarında herhangi iki keyfi *E* ve *D* noktası alınır ve *ED* hattı çekilir. Sonra *AB* doğrusu üzerinde *CED* üçgenine eşit, tarafları uygun bir *AZH* üçgeni oluşturulur. Bu durumda $AH = CD$, $AZ = CE$ ve $ZH = ED$ olacağından *A* açısı *C* açısına eşit olur. Bu da bizim istediğimizdir.

***XXIV. Önerme*: Birbirlerine denk iki kenarı eşit olan iki üçgende, kenarlar arası açısı büyük olan üçgenin tabanı da büyüktür.**

Açıklama: *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde $AB = DE$, $AC = DZ$ ve $\angle(A)$ açısı $\angle(EDZ)$açısından büyüktür (*Şekil 43*). *CB* tabanının *ZE* tabanından daha büyük olduğunu kanıtlamamız gerekir.

Kanıtı: *DE* hattının *D* noktasından $\angle(CAB)$ açısına eşit $\angle(HDE)$ açısı alınır, *DH* hattı üzerinde *AC* parçasına eşit *DH* parçası ayrılır. *H* noktası *E* ve *Z* noktalarıyla birleştirilir. $AC = DZ = DH$ olduğundan *DHZ* bir ikizkenar üçgendir ve $\angle(DHZ) = \angle(DZH)$ geçerlidir. $\angle(EZH) > \angle(DZH)$ ve $\angle(DHZ) = [\angle(DHE) + \angle(EHZ)]$ olduğundan $\angle(EZH) > \angle(EHZ)$ olur. Şu halde *HEZ* üçgeninde $HE > ZE$ ya da $CB = HE$ olduğundan, isteğimize uygun olarak $CB > ZE$ olur.



Şekil 43

Not: Burada çeşitli durumlar oluşabilir.

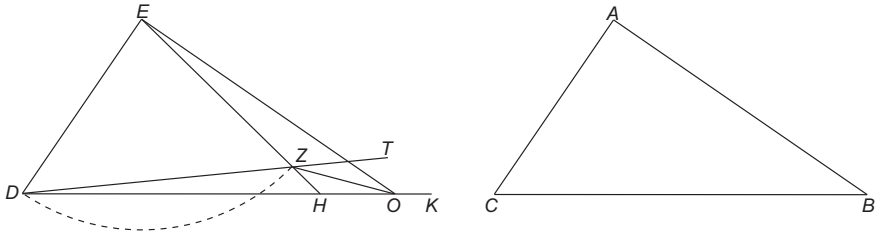
1- *HE* hattı *DZ* hattıyla kesişebilir (*Şekil 43*).

2- *HE* hattı *EZ* hattının üzerine gelebilir.

3- *HE* hattı *DZ* hattını kesmeyebilir (*Şekil 44*).

Birinci durum yukarıda incelenmişti. İkinci durumda $HE > EZ$ olacağı açıktır.

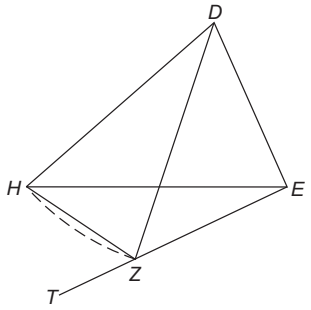
Üçüncü durumda *DH* ve *DZ* hatları *K* ve *T* noktasına kadar uzatılır (*Şekil 44*). $\angle(EDZ)$ açısı $\angle(EZD)$ açısına eşittir. Yukarıda açıklandığı gibi $\angle(DZO)$ açısı $\angle(ODZ)$ açısından büyüktür. Bunun sonucunda $DH > OZ$ ya da isteğimiz gereği $CB > OZ$ olur.



Şekil 44

Şunu da belirtmek gerekir ki eğer kanıt için ikinci üçgende kurulan üçgen geniş açının karşısında olmayan üçgen tarafları, örneğin *HE* ve *DH* üzerinde kurulursa bu farklı durumlar aradan kalkar. Eğer *DE* karşısında duran $\angle(DZE)$ bir geniş açı değilse *EZ* kenarı *T* noktasına kadar uzatılır (*Şekil 45*). Bu durumda, *DZE* üçgeni bir ikizkenar üçgen olduğundan, $\angle(DZT)$ açısı bir geniş açı ve $\angle(DZE)$ bir dar açı olur. Böylece *HE* hattı

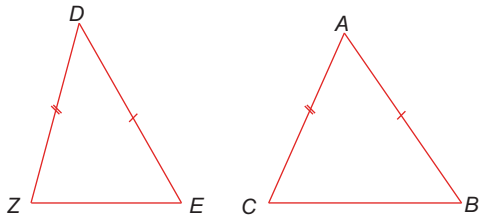
zorunlu olarak *DZ* hattını keser. Benzer şekilde *ABC* üçgeninde *AB* üzerindeki *B* noktasından *D* açısına eşit bir açı oluşturulsa onun da kanıtı önceki gibi gerçekleşir.



Şekil 45

***XXV. Önerme*: Uygun iki kenarı eşit olan iki üçgende, tabanı büyük olan üçgenin kenarlar arası açısı da büyüktür.**

Açıklama: Verilmiş *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde *AB* = *DE*, *AC* = *DZ* ve *CB* > *ZE* ise ∠(*A*) açısının ∠(*D*) açısından büyük olduğu kanıtlanmalıdır (*Şekil 46*).

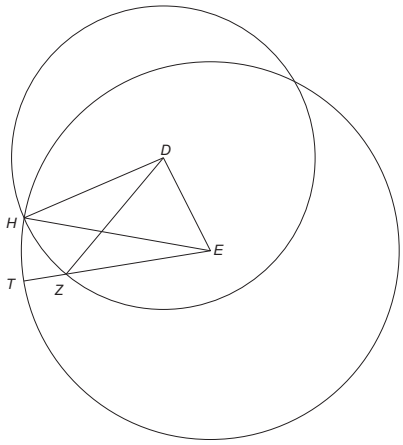


Şekil 46

Kanıtı: Eğer ∠(*A*) açısı ∠(*D*) açısından büyük değilse, eşit olamaz zira aksi halde *CB* = *ZE* olurdu. (Bir önceki *XXIV: Önerme* gereği) ∠(*A*) açısı ∠(*D*) açısından küçük de olamayacağına göre ∠(*A*) açısı ∠*(D)* açısından büyük olmalıdır.

Not: Bu önermenin bir başka kanıtı daha bulunur. *D* noktasından *DZ* yarıçaplı *ZH* dairesi çizilir (*Şekil 47*). *EZ* hattı uzatılarak *ET* = *CB* olacak şekilde *T* noktası belirlenir. Merkezi *E* noktası olan *ET* yarıçaplı *TH* dairesi çizilir. Bu iki daire *H* noktasında kesişir. *H* noktasıyla *D* ve *E* noktaları birleştirilir.

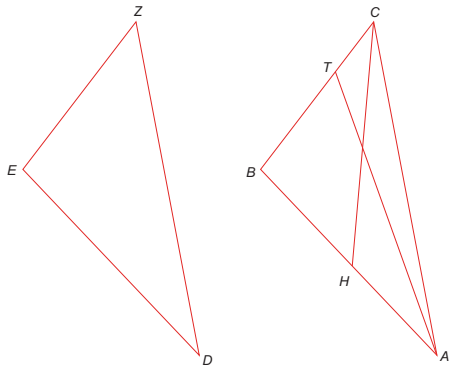
Elde edilen *DEH* üçgeni tarafları uygun olarak *ABC* üçgenine eşittir. Bu üçgende ∠(*HDE*) = ∠(*A*) ve ∠(*HDE*) açısı ∠(*ZDE*) açısından büyük olduğundan ∠(*A*) açısı ∠(*ZDE*) açısından büyük olur.



Şekil 47

***XXVI. Önerme*: Bir üçgenin iki açısı ile herhangi bir kenarı, karşılıklı uygun olacak şekilde herhangi bir üçgenin iki açısı ile bir kenarına eşitse, bu üçgenler eşittir.**

Açıklama: *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde ∠(*A*) açısı ∠(*D*) açısına, ∠(*B*) açısı ∠€ açısına ve *AB* kenarı *DE* kenarına eşittir (*Şekil 48*). Bu durumda uygun kenarlar karşılıklı uygun açılar arasında bulunur. Başka durumlarda, örneğin *AC* = *DZ* ya da *CB* = *ZE*, eşit taraflar eşit açıların karşısında bulunabilir.



Şekil 48

Kanıtı: Birinci durum için $CB = ZE$ ya da $CB \neq ZE$ olabilir. Eğer $CB = ZE$ ise, (iki taraf ve aralarındaki açı eşit olduğundan) isteğimiz yönünde bu iki üçgen eşittir.

Şunu belirtmek gerekir ki CB kesinlikle ZE kenarına eşit olmalıdır. Bunu kanıtlamak için ilkin $CB \neq ZE$ ve $TB = ZE$ olduğunu farz edelim. A ve T noktalarını birleştirelim. Bu durumda, (tıpkı yukarıda olduğu gibi) $\Delta(ATB) = \Delta(DZE)$ olur. Şu halde $\angle(TAB) = \angle(ZDE)$ olur. Hâlbuki $\angle(CAB) = \angle(ZDE)$ olması gerekir. Buna göre $\angle(TAB) = \angle(CAB)$ yani bütün parçasına eşit olması anlamına gerektiğinden bu imkânsızdır.

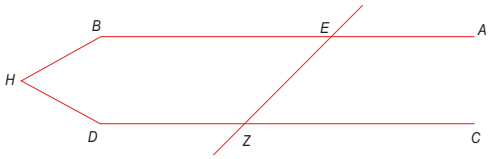
İkinci durumun (yani eşit kenarların $EZ = CB$ olması haline ilişkin) kanıtı: Bu durumda ya $AB = ZD$ ya da $AB \neq ZD$ varsayılabilir. Eğer $AB = ZD$ ise bu iki üçgen istediğimiz gibi eşittir. Eğer $AB \neq ZD$ ise, bir an $BH = ED$ olduğunu varsayalım. C ve H noktalarını birleştirdikten sonra $\Delta(ZED = \Delta(CBH)$ olmalıdır. Neticede $\angle(CHB) = \angle(ZDE)$ olur, hâlbuki $\angle(CAB) = \angle(ZDE)$ olduğundan $\angle(CHB) = \angle(CAB)$ olur ki bu da yanlıştır (Yani $AB = DE$ olmalıdır). Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdir.

Not: Bu öneriyi başka yolla kanıtlamak için AB hattını DE hattı üzerine koyalım, bu durumda AC ve BC hatları uygun olarak DZ ve EZ hatları üzerine düşer ve [$\angle(A) = \angle(D)$ ve $\angle(B) = \angle(E)$ olduğundan] C noktası Z noktasıyla çakışır. Böylece istediğimizi kanıtlamış oluruz.

Eğer $BC = EZ$ ise, B noktasını E noktası üzerine ve BA hattını ED hattı üzerine koyalım. Bu durumda C noktası Z noktası üzerine gelir, aynı şekilde A noktası A noktası üzerine gelir, başka bir noktaya gelemez. Bir an Z noktasının A noktasından farklı bir T noktasına düştüğünü farz edelim. Bu durumda $\angle(BTA) = \angle(BCA)$ olması gerekir ki bu yanlıştır. Çünkü BTA açısı TCA üçgeninin bir dış açısıdır. Şu halde Z ancak A noktasının üzerine düşebilir. Böylece isteğimiz kanıtlanmış olur.

***XXVII. Önerme*: İki hattı başka bir hat kestiğinde, çapraz açıların eşit olması halinde bu iki hat paraleldir.**

Açıklama: AB ve CD hatlarının bir EZ hattı tarafından kesildiğini ve $\angle(DZE)$ açısının $\angle(AEZ)$ açısına eşit olduğunu varsayalım (*Şekil 49*). Bu durumda AB ve CD hatlarının paralel oldukları kanıtlanmalıdır.



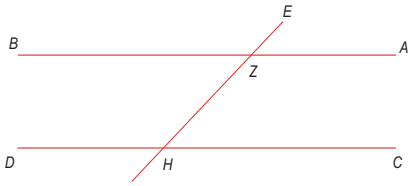
Şekil 49

Kanıtı: Eğer *AB* ile *CD* hatları paralel olmasalar, bu durumda iki hat iki yönün birinde, örneğin *H* noktasında kesişmeleri gerekirdi. Bu yanlıştır, çünkü ∠(*AEZ*) açısı *HEZ* üçgeninin dış açısıdır. Buna göre [∠(*AEZ*) açısı ∠(*EZD*) açısına eşit varsayıldığından] *AB* ve *CD* hatları, kanıtlamayı amaçladığımız gibi paralel olma zorunluluğundadır.

***XXVIII. Önerme*: İki hat başka bir hat tarafından kesildiğinde, aynı yöne bakan açılar birbirine eşit ya da karşılıklı iç açıların toplamı iki dik açıya eşitse, bu iki hat birbirine paraleldir.**

Açıklama: *AB* ve *CD* hatlarının *HE* hattı tarafından kesildiğini varsayalım (*Şekil 50*). Bu durumda eğer ∠(*EZB*) = ∠(*ZHD*) ya da [∠(*BZH*) + ∠(*ZHD*)] = 180° ise bu iki hat birbirine paraleldir.

Kanıtı: ∠(*BZE*) = ∠(*AZH*) ve ∠(*BZE*) = ∠(*DHZ*) olduğundan ∠(*AZE*) = ∠(*DHZ*), ayrıca ∠(*HZB*) ve ∠(*AZH*) açılarının toplamı iki dik açıya eşit olduğundan ∠(*HZB*) ve ∠(*DHZ*) açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. [Çünkü ∠(*DHZ*) = ∠(*AZH*) olup, yukarıdaki önerme gereği bu iki hat aslında birbirine paraleldir].

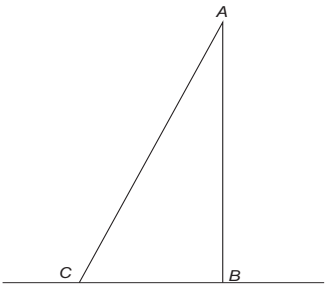


Şekil 50

Not: Öklid'in ortaya koyduğu ve benim de daha önce kitabın ilerleyen kısımlarında açıklayacağım dediğim önermeyi açıklama yeri [zamanı] geldi. Bunu yedi koyutla açıklayacağım.

***1. Koyut*: Bir doğrunun dışındaki bir noktadan o doğruya indirilen en kısa çizgi, o noktanın doğruya olan uzaklığını da belirleyen diktir.**

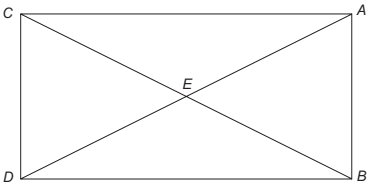
Kanıtı: Verilen nokta *A*, hat *BC* ve dik *AB* olsun (*Şekil 51*). *AB* hattı *BC* hattına çekilen hatların en kısası olduğu ifade edilmiştir. Herhangi başka bir hat, örneğin *AC* hattı, *ABC* açısı dik açı olduğundan *AB* hattından büyüktür. Hâlbuki *ACB* açısı bir dik açıdan küçüktür, bu nedenden *ACB* açısı *ABC* açısından küçük ve *AC* hattı *AB* hattından büyüktür. Aynı şekilde başka hatlar da *AB* hattından büyüktür.



Şekil 51

***2. Koyut*: Verilmiş bir hattın iki ucundan eşit uzunlukta iki dik çıkılır ve bunların uçları bir doğruyla birleştirilirse, bu sonuncu hatla dik arasında kalan iki açı da birbirine eşittir.**

Açıklama: Verilen bir *DB* hattının *D* ve *B* noktalarından birbirine eşit *BA* ve *DC* dikleri çıkılır ve *CA* hattı çizilir (*Şekil 52*). ∠(*DCA*) ve ∠(*BAC*) açılarının eşit olduğu kanıtlanmalıdır.



Şekil 52

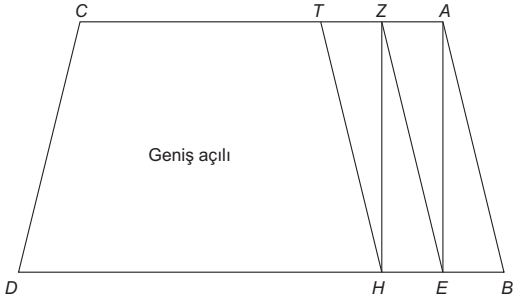
Kanıtı: *AD* ve *CB* hatları çekilir, bu iki hat *E* noktasında kesişir. *DB* hattı ortak, *AB* = *CD* ve ∠(*ABD*) = ∠(*CDB*) olduğundan *ABD* ve *CDB* üçgenleri eşittir. Buna göre bu üçgenlerin diğer kenar ve açıları da eşittir. Örneğin *CB* = *AD*, ∠(*DAB*) = ∠(*BCD*), ∠(*CBD*) = ∠(*ADB*), ayrıca *DE* = *EB*, *AE* = *EC* olur. Buradan ∠(*DAC*) = ∠(*ACB*) ve neticede [∠(*DAB*) + ∠(*DAC*)] = [∠(*ABC*) + ∠(*BCD*)] ya da ∠(*CAB*) = ∠(*ACD*) olur.

***3. Koyut*: Verilen bir doğrunun ucundan eşit uzunlukta iki dik çıkılır ve bunların uçları bir doğruyla birleştirilirse, bu doğru ile dikler arasında kalan açılar dik açılardır.**

Açıklama: *AB* ve *CD* hatları *BD* hattı (*B* ve *D* uç noktalarından çıkılan) eşit dikleri ifade etsin. Eğer *AC* hattı çizilirse *A* ve *C* açıları dik açılardır. Aksi halde geniş ya da dar açı olmaları gerekir.

Kanıt:

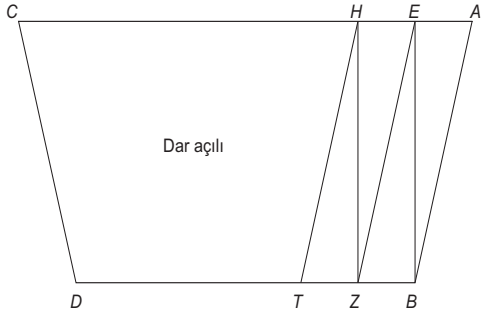
1- İlkin *A* ve *C* açılarının geniş açılar olduklarını varsayalım (*Şekil 53*). *AC* hattına *AE* dikini çıkalım Bu hat *AB* ve *CD* hatları arasına düşer. *AED* açısı bir geniş açıdır, çünkü *ABE* üçgeninin bir dış açısıdır ve *ABE* açısının dik olduğu varsayılmıştı. Bundan sonra *E* noktasından *ED* hattına *EZ* dikini çıkalım. Bu hat *AC* ve *CD* hatları arasına düşer ve *EZC* açısı da (yukarıda gösterildiği gibi) bir geniş açıdır. Daha sonra *Z* noktasından *ZC* hattına *ZH* dikini inelim. Bu işlem bu şekilde sonsuza kadar sürdürülebilir.



Şekil 53

Neticede *AC* üzerindeki *A*, *Z*, *T* noktalarından *BD* üzerine indirilen *AB*, *ZE*, *TH* diklerinin boyları *AB*'den başlayarak gittikçe artar. Çünkü *AB* hattı karşısındaki *AEB* açısı dar açıdır ve *AE* hattı *AB* hattından büyüktür. (*AEZ* üçgeninde *ZAE* dik açısı karşısında duran *ZE* hattı *AZE* dar açısı karşısında duran *AE* hattından büyüktür vs.). Böylelikle açıkça görülmektedir ki *AC* üzerinden *BD* hattına indirilen diklerin uzunlukları *C* noktasına yaklaştıkça artar. Yani *AC* hattı (*1. Koyut* gereği) *A* noktasından başlayarak *C* noktasına doğru gittikçe *BD* hattından uzaklaşır ve aksine *C* noktasından *A* noktasına gittikçe yakınlaşır.

Eğer *ACD* açısının bir geniş açı olduğunu varsayarsak yukarıdaki sonuç gereği *AC* hattının *C* noktasından başlayarak *A* noktasına doğru gittikçe *BD* hattından uzaklaşır ve aksine *A* noktasından *C* noktasına doğru gittikçe yakınlaşır. Neticede anlaşılır ki *AC* ve *BD* hatları aynı yöne doğru kesişmeden hem uzaklaşır ve hem de yakınlaşır ki bu imkânsızdır.



Şekil 54

2- İkinci olarak *C* ve *A* açılarının dar açılar olduklarını varsayalım (*Şekil 54*). *B* noktasından *AC* hattına *BE* dikini, *E* noktasından *DB* hattına *EZ* dikini ve benzeri bir sıra dik alalım. Göstermek mümkündür ki *AB* hattı *EB* hattından, *EB* hattı *EZ* hattından, *EZ* hattı *HZ* hattından, *HZ* hattı *HT* hattından büyüktür. Yürütülen bu muhakeme sonucunda *AC* hattı *A* noktasından başlayarak *C* noktasına doğru gittikçe *DB* hattına yaklaşır ve aksine *AC* hattı *A* noktasına doğru gittikçe *DB* hattından uzaklaşır.

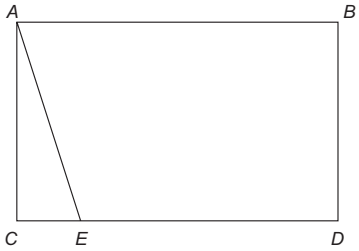
Eğer *ACD* açısının dar açı olduğunu varsayarsak, yukarıda olduğu gibi *AC* hattı *C* noktasından başlayarak *A* noktasına gittikçe *BD* hattına yaklaştığı ve aksine *C* noktasına doğru gittikçe uzaklaştığı kanıtlanabilir. Neticede anlaşılır ki *AC* hattı *BD* hattına aynı yönde kesişmeden hem yaklaşır ve hem de uzaklaşır. Böylece *BAC* ve *ACD* açılarının dik açılar olması gerektiği kanıtlanmış olur.

***4. Koyut*: Tüm açıları dik olan bir dörtgende karşılıklı kenarlar eşittir.**

Açıklama: *ABCD* dörtgeninde ∠(*A*), ∠(*B*), ∠(*C*) ve ∠(*D*) açıları diktir. *AB* kenarının *CD* kenarına ve *AC* kenarının *BD* kenarına eşit olduğunu göstermemiz gerekir (*Şekil 55*).

Kanıtı: *CD* hattının *AB* hattından büyük olduğunu varsayalım. *CD* üzerinde *AB* hattına eşit *ED* hattını ayırıp, *AE* hattını çekelim. Bu durumda

(*3. Koyut* gereği) *AB* ve *ED* hatları *BD* hattından kaldırılmış ve birbirine dik hatlar olduğundan ∠(*AED*) ve ∠(*BAE*) açılarının her biri dik olmalıdır. Hâlbuki varsayımımıza göre ∠(*BAC*) ve ∠(*DCA*) açıları dikti. Eğer ∠(*BAE*) = ∠(*AED*) = dik açı olsaydı, ∠(*AED*) açısı ∠(*ACD*) açısına eşit olurdu. Bu ise varsayım gereği mümkün değil, çünkü onlardan biri *ACE* üçgeninin dış, diğeri ise iç açısıdır. Kanıtlamak istediğimizdir de budur.

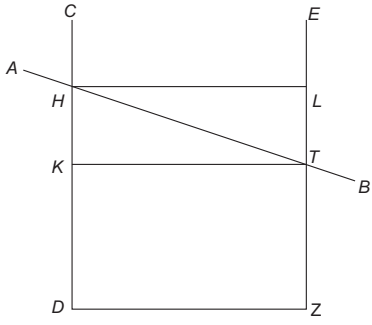


Şekil 55

***5. Koyut*: Bir hatta dik iki hattı bir diğer hat kestiğinde oluşan uygun çapraz açılar eşit, karşılıklı çapraz açıların toplamı ise iki dik açıya eşittir.**

Açıklama: Örneğin *DZ* hattına dik *CD* ve *EZ* dik hatları *AB* hattı tarafından *H* ve *T* noktalarında kesilmiş olsun (*Şekil 56*). ∠(*BTZ*) açısının ∠(*THD*) açısına, ∠(*AHC*) açısının ∠(*HTE*) açısına eşit olduğunu, ∠(*ETH*) açısıyla ∠(*CHT*) açısı toplamının iki dik açıya eşit olduğunu göstermemiz gerekir.

Kanıtı: Eğer ilkin *HD* = *TZ* olduğunu varsayarsak *H* ve *T* noktaları etrafındaki tüm açılar dik olacağından isteğimiz kesinlikle yerine gelecektir.

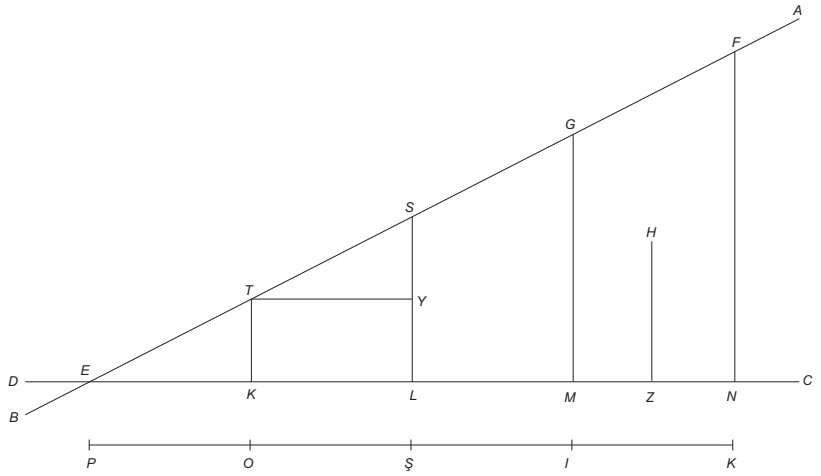


Şekil 56

İkinci olarak *HD* hattının *TZ* hattından büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda *HD* hattında TZ hattına eşit *DK* hattını ayırıp *KT* hattını çizelim ve benzer şekilde *T* noktasından *KH* hattına eşit *TL* hattını ayırıp *LH* hattını çizelim. Böylece elde edilen *HLTK* dörtgeninin tüm açıları dik olur. *HK* = *LT*, *HL* = *KT* ve ∠(*L*) = ∠(*K*) olduğundan *HLT* üçgeni HTK üçgenine eşittir ve ∠(*KHT*) = ∠(*HTL*) yazılabilir. Ayrıca ∠(*AHC*) açısı ∠(*KHT*) açısına eşit olduğundan ∠(*AHC*) açısı ∠(*HTE*) açısına eşit ve ∠(*CHT*) açısı ile ∠(*HTE*) açısının toplamı iki dik açının toplamına eşittir. Buradan anlaşılacağı gibi bir hatta dik olan iki hattan birine dik olan başka bir hat diğerine de dik olur.

***6. Koyut*: İki doğru dik olmamak koşuluyla kesiştiğinde, doğrunun birine dik bir hat, doğrular arasında oluşan dar açıda diğer doğruyu da keser.**

Açıklama: *CD* ve *AB* doğrularının *E* noktasında kesiştiklerini ve oluşan ∠(*AEC*) açısının dar, ∠(*CEB*) açısının ise bir geniş açı olduğunu varsayalım (*Şekil 57*). *CE* doğrusuna dik *ZH* hattının *AB* doğrusunu da kestiğini kanıtlamamız gerekir.



Şekil 57

Kanıtı: *AE* üzerindeki herhangi bir *T* noktasından *CD* hattına bir dik inelim. *TK* hattı ya *Z* ve *E* noktaları arasına düşer, ya da *Z* noktasını geçip

HZ hattı üstüne düşer, ya da *Z* ve *E* noktalarının arasından değil kenarından geçer. Birinci durumda *EZ* hattından uzun olan *PK* hattını götürüp bunun üzerine *EK* uzunluğunda *PO*, *OŞ*, *ŞI* ve *IK* parçalarını ayıralım. Bundan sonra, (*AE* hattı üzerinde olan ve *ET* = *TS* = *SG* = *GF* koşulunu sağlayan) *S*, *G* ve *F* noktalarından *CD* hattına dik olan *SL*, *GM* ve *FN* hatlarını ve *T* noktasından *SL* hattına *TY* dikini indirelim. Oluşan *TKE* ve *TSY* üçgenlerinde ∠(*KTE*) ve ∠(*YST*) açıları uygun açılar olduğundan birbirine eşittir. Ayrıca ∠(*TKE*) ve ∠(*SYT*) açıları dik olduğundan eşittirler. Koşul gereği *ET* hattı *TS* hattına eşittir. (*4. Koyut* gereği) *KE* hattı *YT* hattına, *YT* hattı *LK* hattına eşittir.

Buradan *LK* = *KE* olduğu anlaşılır. Yapılan işlemler gereği anlaşılacağı üzere *KE* hattı *LM* hattına, *MN* hattı *KE* hattına eşittir. Şu halde *EN* hattının tüm kısımları birbirine eşit ve bu kısımların uzunlukları *PK* kısmına eşit olmakla kısım sayısı *PK* hattındaki kısımların sayısına eşittir. Böylece *FE* hattının tüm kısımları birbirine eşit ve sayıları *PK* hattı kısımları sayısına eşittir. Şu halde *FN* diki *Z* ve *E* hattının sağ tarafına düşer. Ayrıca *HZ* diki *FNE* üçgeninin içine düşer. Eğer *HZ* diki uzatılırsa *AB* hattını *EA* yönünde keser ki bu da dar açı yönünde gerçekleşir.

Eğer ikinci durum gereği *TK* diki *Z* noktasından geçer yani *HZ* dikinin üzerine ya da *Z* ve *E* noktalarının kenarına ve üçüncü durum gereği ötesine düşerse her iki durumun kanıtı aynı şekilde sürdürülebilir.

***7. Koyut* (*temel öneri*): Herhangi iki hat bir diğer hat tarafından kesildiğinde, oluşan iki tek taraflı açıların toplamı iki dik açıdan az ise, bu iki hat bu açıların bulunduğu tarafta kesişir.**

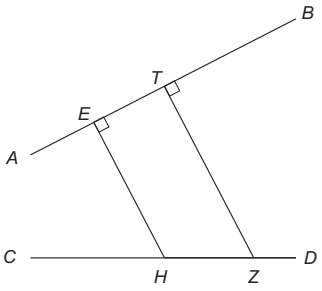
Açıklama: Eğer *CD* hattı uzatılırsa *AB* hattını keser (*Şekil 58*). *HE* hattı *AB* ve *CD* hattını keser. ∠(*AEZ*) ve ∠(*CZE*) açılarının toplamı iki dik açıdan küçüktür. Eğer bu iki hat *A* ve *C* noktaları yönünde uzatılırsa kesişirler.

Kanıtı: Bu açılardan biri dik ya da geniş diğeri dar veya her ikisi de dar açı olabilir.

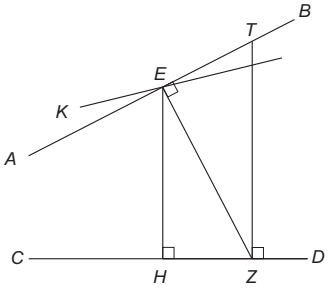
I. Durum: Eğer açılardan biri dik olursa, *6. Koyut* gereği öbür açı dar açı olmak zorundadır. Bu iki hat dar açı yönünde kesişirler.

II. Durum: Eğer bu açılardan biri örneğin ∠(*AEZ*) bir geniş açı ise, *H* noktasından *AB* hattına *EH* diki indirilebilir (*Şekil 58-1*). Benzer şekilde *Z* noktasından *AB* hattına *ET* diki çıkılabilir. *TZ* ve *EH* diklerinin *EZ* hattıyla oluşturduğu ∠(*TZE*) açısı ∠(*HEZ*) açısına eşittir. Koşul gereği ∠(*AEZ*) açısıyla ∠(*EZC*) açılarının toplamı 2 dik açıdan küçüktür. ∠(*AEH*) açısı diktir. Buna göre ∠(*AEH*), ∠(*HEZ*) ve ∠(*EZC*) açılarının toplamı 2 dik açıdan küçük olduğu için ∠(*HEZ*) ve ∠(*EZC*) açılarının toplamı bir dik açıdan küçüktür. Diğer bir deyişle ∠(*TZH*) açısı [bu açı ∠(*TZE*) ve ∠(*EZH*) açılarının toplamından oluşur] bir dik açıdan küçük olmalıdır. Hâlbuki ∠(*AEH*) açısı bir dik açıya eşittir. Buna göre (*AB* ve *CD* hatları) *A* ve *C* noktaları yönünde kesişmelidir.

III. Durum: Her iki açının dar olması halinde, *E* noktasından *CD* hattına *EH* diki indirilir ve *Z* noktasından *CD* hattına *ZT* diki kaldırılır (*Şekil 58-2*). Bu durumda ∠(*TZE*) açısı ∠(*HEZ*) açısına eşit ve ∠(*CHE*) açısı bir dik açıdır. Ayrıca ∠(*AEZ*) ve ∠(*CZE*) açılarının toplamından ∠(*CZT*) açısı çıkarılırsa, fark ∠(*AEH*) açısına eşit olur. Hâlbuki ∠(*AHZ*) ve ∠(*CZE*) açılarının toplamı 2 dik açıdan küçüktür. Şu halde ∠(*AEH*) bir dik açıdan küçüktür. Koşul gereği ∠(*EHC*) bir dik açıdır. Neticede iki doğru *A* ve *C* noktaları yönünde kesişir.



Şekil 58-1



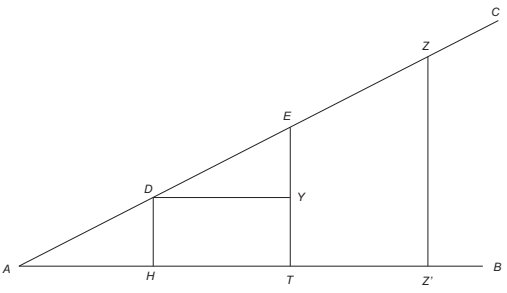
Şekil 58-2

III. Durumun başka yoldan kanıtı: *EZ* hattına *EK* diki çekilir (*Şekil 58-2*). ∠(*KEZ*) açısı diktir. Koşul gereği ∠(*EZC*) açısı dar açı olduğundan *EK* ve *ZC* hatları kesişir. Böylece *EA* ve *ZC* hatları *C* noktası yönüne uzatıldığında kesişmek zorunda kalırlar.

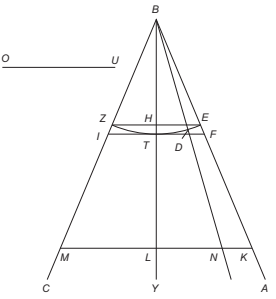
Bu önerme toplamda sekiz koyuttan oluşacak şekilde başka bir yolla da kanıtlanabilir. Bunların ilk beşi daha önce zikrettiğimiz birden beşinci koyuta kadar olan koyutlardır. Kalan üç tane de şunlardır:

***6'. Koyut*: Her dar açının iki kenarından biri eşit parçalara bölünür ve bu bölüm noktalarından açının ikinci tarafına dik hatlar çekilirse, bu dik hatlar ikinci açı tarafını da eşit parçalara böler.**

Açıklama: Verilen ∠(*BAC*) açısının *AC* kenarı birbirine eşit *AD*, *DE* ve *EZ* parçalarına ayrılır ve *D*, *E* ve *Z* noktalarından *AB* hattına *DH*, *ET* ve *ZZ'* dikleri inilirse *AH*, *HT* ve *TZ'* parçalarının eşit oldukları kanıtlanmalıdır (*Şekil 59*).



Şekil 59



Şekil 60

Kanıtı: *H* noktasına *A* açısına eşit ∠(*EDY*) açısı çizilir. Koşul gereği ∠(*HAD* açısı ∠(*EDY*) açısına, *5. Koyut* gereği uygun üçgen kenarları olduğundan ∠(*ADH*) açısı ∠(*DEY*) açısına ve koşul gereği *DE* hattı *AD* hattına eşit olduğundan *AHD* ve *DYE* üçgenleri eşittir. Bunun sonucu *AH* hattı *DY* hattına eşit ve ∠(*AHD*) ile ∠(*DYE*) açıları diktir. Neticede *DYTH* dört kenarlı açıları dik bir dörtgendir. Şu halde *DY* hattı *HT* hattına eşittir. Bu ise *HT* hattının *AH* hattına eşit olması anlamına gelir. Aynı şekilde *AH* hattının *TZ'* hattına eşit olması kanıtlanabilir.

***7'. Koyut*: Bir açının iki kenarı arasındaki bir noktadan, o açının her iki kenarını kesen bir doğru çekmek mümkündür.**

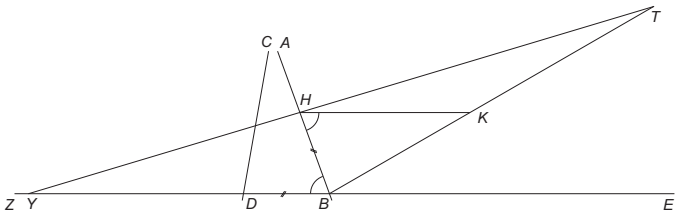
Kanıtı: *D* noktasının *ABC* açısının *CB* ve *BA* kenarları arasında bulunduğunu varsayalım (*Şekil 60*). *BD* yarıçaplı bir yay çizerek açı kenarları üzerindeki *E* ve *Z* noktalarını belirlenir, *EZ* hattı ve *ABC* açısını ikiye bölen

BH hattı çizilir. *BE* = *BZ*, *BT* hattı müşterek ve ∠(*EBH*) = ∠(*ZBH*) olduğundan *BEH* ve *BHZ* üçgenleri eşittir. Bunun sonucunda ∠(*BHE*) ve ∠(*BHZ*) açıları eşit ve diktir.

BH hattı *Y* yönünde uzatılırsa bu hat *EDZ* kavsini *T* noktasında keser. *BH* hattı ona eşit, ya da onun birkaç katı olan *OU* hattından yararlanılarak, *BT* yönünde (*BH* = *OU* = *HL* olmak üzere) belirli bir oranda *L* noktasına uzatılır. Benzer şekilde *AB* hattı üzerindeki *E* noktasından *BE* = *EK* olmak üzere aynı oranda *EK* hattı ayrılır. *E* ve *K* noktalarından *BY* hattına *KL* ve *EH* dikleri inilir. *HL* = *BH* = *OU* ve (*HL* + *BH*) > *BT*. Buna göre *KL* dikinin *BY* hattını kestiği *L* noktası *BT* hattının devamı üzerine düşer. *BC* hattı üzerinde *BK* boyunda *BM* hattını ayıralım. *M* noktasından *L* noktasına bir hat çekelim. *BM* = *BK*, *BL* hattı ortak, ∠(*MBL*) = ∠(*LBK*) olduğundan *BKL* ve *BML* üçgenleri eşittir. Şu halde ∠(*BLM*) = ∠(*BLK*) ve ∠(*BLK*) dik açı olduğundan ∠(*BLM*) açısı da diktir. Buna göre *MLK* bir doğrudur. Bundan sonra *BD* hattı çekilir ve *N* noktasına kadar uzatılır. Aynı hat üzerindeki *D* noktasından *DNL* açısına eşit *NDF* açısı çizilir. Çapraz açıların eşitliği nedeniyle *MK* hattı *DF* hattına paraleldir. *FD* hattı *I* noktasına kadar uzatılır. Böylece *F* noktasından geçen ve ∠(*ABC*) açısının her iki tarafını kesen *FL* hattı bizim istediğimiz doğrudur.

***8. Koyut*: Bu koyut da önermenin ispatı içindir.**

BD hattı, *CD* ve *AB* hattını ∠(*CDB*) ve ∠(*ABD*) açıları toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde keser (*Şekil 61*). *BD* hattını *E* ve *Z* noktalarına kadar uzatalım. *AB* hattı üzerinde *BD* hattına eşit *BH* parçasını ayıralım. Bu durumda [∠(*ABE*) + ∠(*ABD*)], (2 dik açı)'ya eşittir. Ancak koşul gereği [∠(*CDB*) + ∠(*ABD*)] < (2 dik açı) olması gerektiğinden ∠(*ABE*) > ∠(*CDB*) olmalıdır.



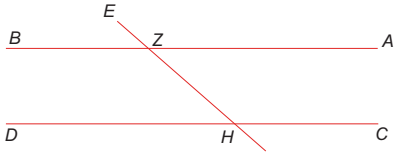
Şekil 61

AH hattı üzerinde *B* noktasında ∠(*CDB*) açısına eşit ∠(*HBT*) açısını çizelim. Sonra *H* noktasından *THY* doğrusunu çekelim. Bu doğru (7. koyut gereği) ∠(*TBZ*) açısının her iki tarafını keser. Bu durumda ∠(*THB*) açısı ∠(*HBY*) üçgeninin dış açısı olduğundan ∠(*THB*) açısı ∠(*HBY*) açısından büyüktür. *HB* hattı üzerindeki *H* noktasında ∠(*ABY*) açısına eşit ∠(*BHK*) açısını oluşturalım. *CD* ve *AB* hatları kesişmelidir zira *BD* hattının eşi *BH* üstüne konursa [∠(*CDB*) = ∠(*ABK*) olduğundan] *DC* hattı *BK* hattıyla çakışır. Benzer şekilde [∠(*ABY*) + ∠(*BHK*) olduğundan] *BA* da *HK* hattıyla çakışır. Böylece *HK* ve *BT* hatları zorunlu olarak *K* noktasında kesişirler. Açıklamaya çalıştığımız husus budur.

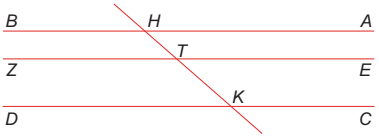
Şimdi tekrar kitabın yorumuna dönelim.

***XXIX. Önerme*: İki paralel hattı başka bir hat keserse, çapraz uygun iki iç ve dış açı birbirine eşit, karşılıklı çapraz iki açının toplamı ise iki dik açıya eşittir.**

Kanıtı: *AB* ve *CD* paralel hatları *EH* hattıyla kesilmektedir (*Şekil 62*).



Şekil 62



Şekil 63

I. ∠(*DHZ*) = ∠(*HZA*): Böyle olmadığını ve örneğin ∠(*DHZ*) < ∠(*HZA*) olduğunu varsayalım. Bu durumda [∠(*BZH*) + ∠(*HZA*)] > [∠(*DHZ*) + ∠(*BZH*)] > (2 dik açı) olmalıdır. Bu durumda *CD* ve *AB* hatları *B* ve *D* noktaları yönünde kesişmeleri gerekir, bu ise varsayıma aykırıdır.

II. ∠(*EZB*) = ∠(*EHD*): Çünkü ∠(*EZB*) = ∠(*AZH*) ve ∠(*EHD*) = ∠(*AZH*) eşitlikleri geçerlidir.

III. [∠(*BZH*)+ ∠(*ZHD*)] = (2 dik açı): Çünkü [∠(*BZH*) + ∠(*HZA*)] = (2 dik açı) ve ∠(*HZA*) = ∠(*ZHD*) ilişkileri geçerlidir.

***XXX. Önerme*: Bir hatta paralel iki hat birbirine de paraleldir.**

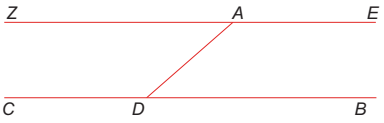
Açıklama: *AB*∥*EZ* ve *CD*∥*EZ* olduğuna göre *CD*∥*AB* olduğu kanıtlanmalıdır (*Şekil 63*).

Kanıtı: Bu hatları kesen *HK* hattını çekelim. Koşul gereği $AB \parallel EZ$ olduğuna göre $\angle(AHT) = \angle(HTZ)$ ve $\angle(DKT) = \angle(HTZ)$. Buna göre $\angle(AHT) = \angle(DKT)$ ya da kanıtlamak istediğimiz gibi $AB \parallel CD$ olduğu görülür.

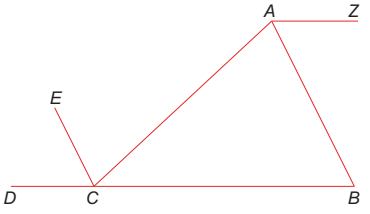
***XXXI. Önerme*: Verilen bir noktadan bir hatta paralel bir hat çekmek**

Açıklama: Örneğin *A* noktasından *BC* hattına paralel hat çekmek isteyelim (*Şekil 64*).

Bunun için *CB* hattı üzerinde herhangi bir *D* noktası belirlenir ve *AD* hattı çekilir. *AD* hattı üzerinde $\angle(ADC)$ açısına eşit $\angle(DAE)$ açısı oluşturulur. *AE* hattı *Z* noktasına kadar uzatılır. Bu durumda, çapraz açılar eşit olduğundan, kanıtlamak istediğimiz gibi *EZ* hattı *BC* hattına paraleldir.



Şekil 64



Şekil 65

***XXXII. Önerme*: Bir üçgenin bir tarafı uzatıldığında elde edilen dış açı komşu olmayan iç açıların toplamına ve üçgen iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir.**

Açıklama: Verilen üçgen *ABC* ve *BC* uzatılan taraftır (*Şekil 65*).

Kanıtı: *C* noktasından *AB* hattına paralel *CE* hattı çekilir. Oluşan çapraz ve uygun açılar için $\angle(ECA) = \angle(A)$ ve $\angle(ECD) = \angle(B)$ geçerlidir. Neticede $[\angle(ECA) + \angle(ECD)] = [\angle(A) + \angle(B)]$ ya da $\angle(ACD) = [\angle(CAB) + \angle(ABC)]$ olur. Ayrıca $\angle(ACB)$, $\angle(ABC)$ ve $\angle(CAB)$ açılarının toplamı iki dik açıya eşittir. Çünkü $\angle(ACD)$ ve $\angle(ACB)$ açılarının toplamı istendiği gibi iki dik açıya eşittir.

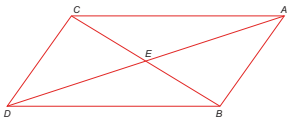
Not: Eğer *A* noktasından *CB* hattına paralel *AZ* hattı çekilirse, oluşan çapraz açılar için $\angle(ZAB) = \angle(ABC)$ ve $\angle(ZAC) = \angle(ACD)$ geçerlidir. Neticede *ACD* açısı *CAB* ve *ABC* açılarının toplamına eşit olur.

***XXXIII. Önerme*: İki eşit ve paralel hattın uçları arasında aynı yönde çekilen iki hat eşit ve paraleldir.**

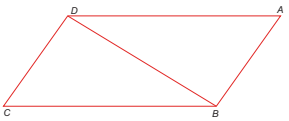
Açıklama: Örneğin $AB = CD$ ve $AB \parallel CD$ olsun. Bunların uçları arasında çekilen AC ve BD hatları eşittir. AC hattı BD hattına hem eşit ve hem de paraleldir (*Şekil 66*).

Kanıtı: BC hattını çekelim. Bu durumda $AB = CD$, CB ortak ve $\angle(ABC) = \angle(BCD)$ olduğundan ABC ve BCD üçgenleri eşittir. Şu halde kanıtlamayı amaçladığımız gibi $AC = BD$, ayrıca $\angle(ACB) = \angle(DBC)$ olduğundan $AC \parallel BD$ olur.

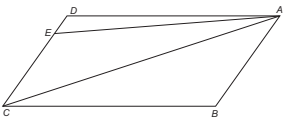
Not: Önermenin bir başka kanıt şekli daha vardır. BC hattını E noktasında kesen AD hattı çekilirse AEB ve CED üçgenlerinde $\angle(AEB) = \angle(CED)$, $\angle(ABE) = \angle(ECD)$ ve $AE = ED$ olduğundan $BE = CE$ olur. Buna göre iki kenar ve aralarındaki açılar eşit olduğundan AEC ve BED üçgenleri de eşittir. Buna göre $AC = BD$ ve $\angle(ACE) = \angle(EBD)$ olduğundan $AC \parallel BD$ olur.



Şekil 66



Şekil 67



Şekil 68

***XXXIV. Önerme*: Bir paralelkenarda karşı kenar ve karşı açılar eşittir, köşegen ise paralelkenarı iki eşit kısma böler.**

Kanıtı: $ABCD$ bir paralelkenar ve BD onun diyagonali olsun (*Şekil 67*). $\angle(ADB) = \angle(DBC)$, $\angle(BDC) = \angle(DBA)$ ve BD hattı ortak olduğundan ABD ve CBD üçgenleri eşittir. Buna göre $BC = AD$, $AB = DC$ ve $\angle(A) = \angle(C)$, $\angle(ADC) = \angle(CBA)$ olduğundan BD köşegeni, kanıtlamak istediğimiz gibi, paralelkenarı iki eşit kısma böler.

Bir an $AB \angle CD$ ve $AB = CE$ olduğunu varsayalım ve A ile E arasını birleştirelim. AE, AD'ye paralel olan BC'ye eşit ve paralel olur. [Bu durumda] AE ve AD hem birbirlerini keser hem de paralel olurlar ki bu çelişkidir. Aynı yolu izleyerek $AB = CD$ olduğu kanıtlanabilir. Açılara gelince $\angle(BAD)$

$\neq \angle(BCD)$ olsa $\angle(BAE) = \angle(BCD)$ olurdu. AC hattı çekilirse $\angle(BAC)$ ve $\angle(ECA)$ karşılıklı açılarının eşitliğinden $\angle(CAE) = \angle(ACB)$ olurdu. Böyle bir durumda $[\angle(CAD) = \angle(ACB)] = \angle(CAE)$ olurdu ki bu çelişkidir. Yine buradan yola çıkarak $\angle(B) = \angle(D)$ olduğunu, açı ve kenarların eşitliklerinden yararlanarak ADC veABC üçgenlerinin eşitliğini açıklarız. Böylece bu hattın düzlemi iki eşit parçaya bölmediği sadece o açıdan çıkan çap dışında bir hat olduğu ortaya çıkar..

***XXXV. Önerme*: İki paralel hat arasında yer alan müşterek tabanlı iki paralelkenarın alanları eşittir.**

Açıklama: $ABCD$ ve $EBCZ$ paralelkenarın BC tabanları müşterektir ve BC ile AZ paralelleri arasında yer alırlar (*Şekil 69*).

Kanıtı: $BC = EZ$ ve $BC = AD$, ya da $AD = EZ$, buna göre $(AD + DE) = (DE + EZ)$ ya da $AE = DZ$ olur. EAB ve ZDC üçgenlerinde $ZD = EA$, $DC = AB$ ve $\angle(BAE) = \angle(CDZ)$ yazılabilir. Buna göre alanlar yönünden aşağıdaki ilişkiler yazılabilir: $\Delta(AEB) = \Delta(ZDC)$, $\Delta(AEB) - \Delta(EHD) + \Delta(CHB) = S(DABC)$ ve $[\Delta(ZDC) - \Delta(EHD) + \Delta(CHB)] = S(ZEBC)$. Şu halde kanıtlamak istediğimiz gibi $DABC$ alanı $ZEBC$ alanına eşittir.

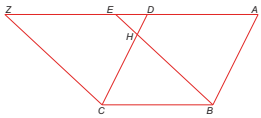
Not: Bu önermede E noktasının konumuna bağlı olarak 3 farklı durum oluşabilir:

I. E noktası AD hattının dışına düşebilir (*Şekil 69*). Bu durumda BE ve CD hatları H noktasında kesişirler.

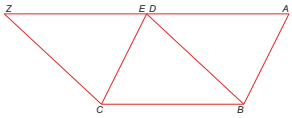
II. E noktası D noktası üzerine düşebilir (*Şekil 70*).

III. E noktası A ve D noktası arasına düşebilir (*Şekil 71*).

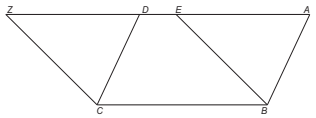
Son iki durum kanıtlanırken eşit üçgenlere aynı alanlar ilave edilir.



Şekil 69



Şekil 70

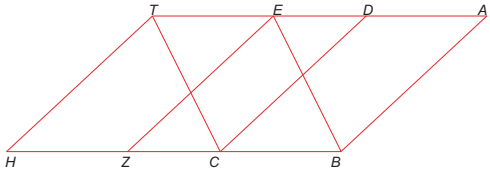


Şekil 71

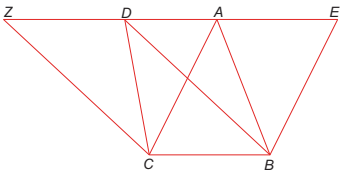
***XXXVI. Önerme*: İki paralel hat arasında yer alan eşit tabanlı iki paralelkenarın alanları eşittir.**

Açıklama: *ABCD* ve *EZHT* paralelkenarlarında *CB* = *HZ* ve *AT* // *BH* olduğu varsayılmaktadır. Bu iki paralelkenar alanlarının eşit olduğu kanıtlanmalıdır (*Şekil 72*).

Kanıtı: *EB* ve *TC* hatları çekilir. Bu hatlar birbirine paralel ve eşittir. *BCTE* dörtgeni bir paralelkenardır. Önceki öneri gereği S(*ABCD*) ve S(*BCTE*) ile S(*EZHT*) ve S(*EBCT*) paralelkenarların alanları eşittir. Buna göre kanıtlamamız istenen S(*ABCD*) ve S(*EZHT*) paralelkenarların alanları da eşittir.



Şekil 72



Şekil 73

***XXXVII. Önerme*: İki paralel hat arasında yer alan aynı tabanlı iki üçgenin alanları eşittir.**

Açıklama: *CB* ortak tabanlı *ABC* ve *DBC* üçgenleri, paralel *DA* ve *CB* hatları arasında yer almaktadır (*Şekil 73*). Üçgenlerin eşit alanlı olduğu kanıtlanmalıdır.

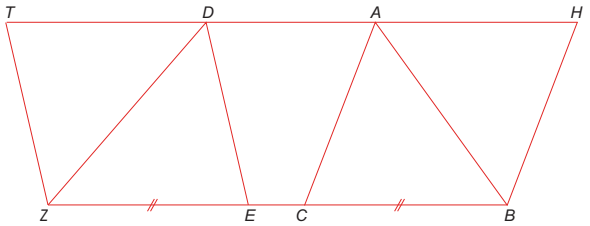
Kanıtı: *CA* hattına paralel *BE* hattını ve *BD* hattına paralel *CZ* hattını çekelim. Bu iki hat *DA* hattının devamını *E* ve *Z* noktalarında keser. *XXXV. Öneri* gereği *AEBC* ve *ZDBC* paralelkenarlarının alanları eşittir. Bu paralelkenarların yarısı S(*DCB*) ve S(*ABC*) üçgenlerinin alanları da kanıtlamamız gerektiği gibi eşittir.

***XXXVIII. Önerme*: İki paralel hat arasında yer alan ve aynı yöne uzanan eşit tabanlı iki üçgenin alanları eşittir.**

Açıklama: Δ(*ABC*) ve Δ(*DEZ*) üçgenlerinde *CB* = *ZE* ve *AT* hattı *BZ* hattına paraleldir (*Şekil 74*). Üçgenlerin eşit alanlı oldukları kanıtlanmalıdır.

Kanıtı: *AC* hattına paralel *BH* hattını ve *ED* hattına paralel *ZT* hattını çekelim. *DA* hattı her iki yönde *H* ve *T* kesişme noktasına kadar uzatılır. *HT* ve *BZ* paralelleri arasında *ZE* ve *CB* eşit tabanlı S(*TDEZ*) ve S(*AHBC*)

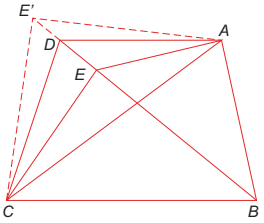
paralelkenarların alanları eşittir. Neticede kanıtlanması istendiği gibi bu paralelkenarların yarısı S(*ABC*) ve S(*DEZ*) üçgenlerinin alanları da eşittir.



Şekil 74

***XXXIX. Önerme*: Eşit, aynı tabanlı ve aynı yöne yönelik iki üçgen, iki paralel hat arasında yer alır.**

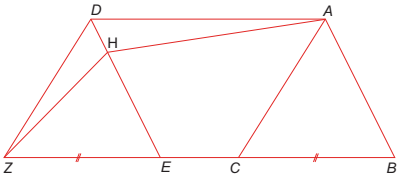
Açıklama: Aynı *CB* tabanlı Δ(*ABC*) ve Δ(*DBC*) üçgenleri eşittir (*Şekil 75*). Bu üçgenlerin *A* ve *D* noktalarını birleştiren *AD* hattının *BC* hattına paralel olduğu kanıtlanmalıdır.



Şekil 75

Kanıtı: Aksine *AD* hattının *BC* hattına paralel olmadığını varsayalım. *AE* // *BC* hattını oluşturalım. (*XXXVIII. Öneri* gereği) Δ(*EBC*) = Δ(*ABC*) olmalı, ancak koşul gereği Δ(*DBC*) = Δ(*ABC*) olmalıdır. Şu halde Δ(*EBC*) = Δ(*DBC*) olmalıdır ki bu yanlıştır.

Not: *E* noktası üçgenin dışına örneğin *E'* noktasına düşebilir. Bu durumda önerme aynı yukarıda olduğu gibi kanıtlanabilir.



Şekil 76

***XL. Önerme*: Aynı yöne yönelik, taban ve alanları eşit iki üçgen iki paralel hat arasında yer alır.**

Açıklama: *BZ* hattı üzerindeki *BC* ve *EZ* eşit tabanlarına sahip Δ(*ABC*) ve Δ(*DEZ*) üçgenlerini farz edelim. [Bunların iki paralel hat arasında yer aldığını kanıtlamalıyız].

Kanıtı: *BZ*' ye paralel olan *A* ve *D* noktaları arasını birleştiririz. Aksine *AH* // *ZB* olduğunu *AH* hattının *DE* hattını *H* noktasında kestiğini varsayalım (*Şekil 76*). *HZ* hattını çekelim. (*XXXVIII. Öneri* gereği) Δ(*HEZ*) = Δ(*ABC*) olmalı, ancak koşul gereği Δ(*DEZ*) = Δ(*ABC*) olduğundan Δ(*HEZ*) = Δ(*DEZ*) olmalıdır. Bu ise tamın kendi parçasına eşit olması gerektiği anlamına gelir ki bununla varsayımın yanlış olduğu kanıtlanmış olur.

***XLI. Önerme*: İki paralel hat arasında, aynı yöne yönelik yerleştirilmiş bir paralelkenarın alanı, ortak tabanlı bir üçgen alanının iki katına eşittir.**

Açıklama: *AE* hattı *BC* hattına paralel olmak üzere, *BC* hattı *ABCD* paralelkenarın ve *EBC* üçgeninin ortak tabanını oluşturmaktadır (*Şekil 77*). S(*ABCD*) = [2 × S(*EBC*)] olduğu kanıtlanmalıdır.

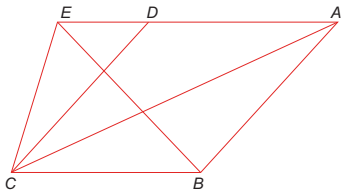
Kanıtı: *AC* köşegenini çekelim. Bu durumda S(*ABCD*) = [2 × S(*ABC*)] ve S(*EBC*) = S(*ABC*) olduğundan S(*ABCD*) = [2 × S(*EBC*)] olduğu kanıtlanmış olur.

Not: Bu önerme tabanların aynı olması yerine eşit olması için verilmiş olsa da geçerli olurdu. Kitabın yazarı bu önermeyi *12. Makalenin 3. Önermesinde* vermiştir.

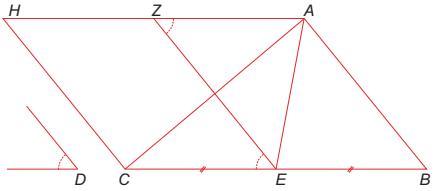
***XLII. Önerme*: Bir açısı verilen ve alanı verilmiş bir üçgenin alanına eşit olan bir paralelkenarın oluşturulması.**

Kanıtı: *D* açısı ve *ABC* üçgeni verilmiştir (*Şekil 78*). *CB* hattını *E* noktasında yarıya bölüp *AE* hattını çekelim. *E* noktasında *EC* hattı üzerinde *D* açısına eşit *CEZ* açısını oluşturalım. *A* noktasından *BC* hattına paralel *AZ* hattını çekelim. *EZ* hattı *AZ* paralel hattını dik açıdan küçük bir açıyla *Z* noktasında keser. Bundan sonra *C* noktasından *EZ* hattına paralel *CH* hattı çekilir. *AZ* hattı *H* noktasına kadar uzatılır. (*XXXVIII*: *Öneri* gereği) S(*AEC*) = S(*ABE*) = ½ S(*ABC*) olduğundan S(*CHZE*) = [2 × S(*AEC*)] = S(*ABC*) yazılabilir ve *CHZE* aranan paralelkenardır.

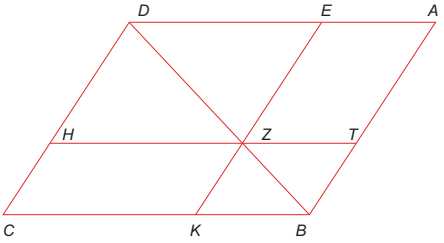
Not: Burada çekilen *EZ* hattının *AH* üzerindeki *A* noktasının soluna, üstüne ya da sağına gelmesine göre değişik durumlar oluşabilir.



Şekil 77



Şekil 78



Şekil 79

***XLIII. Önerme*: Verilen bir paralelkenarın içerisinde birer ortak açıları olan ve karşı açıları diyagonal üzerinde bulunan paralelkenarların alanları eşittir.**

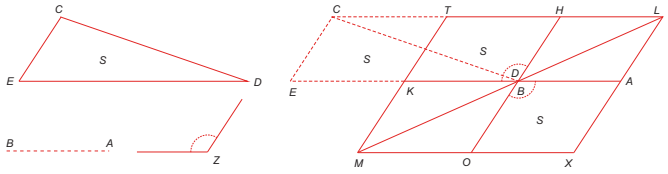
Açıklama: Bu özelliğe sahip paralelkenarlara *tamamlayıcı* denir. *ABCD* paralelkenarı içinde kurulmuş *ATZE* ve *ZKCH* paralelkenarların *A* ve *C* açıları *ABCD* paralelkenarıyla ortaktır ve *Z* noktası *DB* diyagonali üzerinde yer alır (*Şekil 79*). *ATZE* ve *ZKCH* paralelkenarların eşit alanlı oldukları kanıtlanmalıdır.

Kanıtı: Koşul gereği *ABCD*, *ATZE* ve *ZKCH* birer paralelkenardır. Buna göre $\Delta(DEZ) = \Delta(DZH)$, $\Delta(TBZ) = \Delta(KZB)$ ve $\Delta(ABD) = \Delta(CDB)$ ilişkileri geçerlidir. Şu halde $[S(CDB) - S(KBZ) - S(DZH)] = [S(ABD) - S(TBZ) - S(DEZ)]$ ya da $S(ATZE) = S(ZKCH)$ bulunur. Bu da kanıtlamak istediğimiz hususdur.

***XLIV. Önerme*: Bir hat üzerinde yer alan, bir açısı verilen bir açıya, alanı verilen bir üçgenin alanına eşit olan bir paralelkenarın oluşturulması.**

Açıklama: *AB* hattı, $\Delta(CDE)$ üçgeni ve $\angle(Z)$ açısı verilmiştir (*Şekil 80*). $S(ABHL)$ alanı $S(CDE)$ üçgen alanına eşit ve $\angle(B)$ açısı $\angle(Z)$ açısına eşit bir paralelkenar elde edilmek istenmektedir.

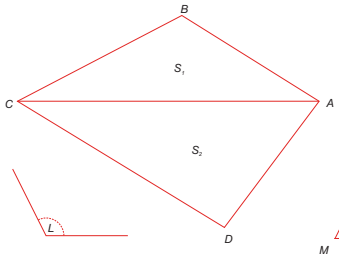
Kanıtı: İlkin *AB* hattı *K* yönüne uzatılır. *AK* hattı üzerinde, *D* ve *B* noktaları çakışmak üzere bir *CDE* üçgeni oluşturulur. Ayrıca *B* noktasında ∠(*KBH*) = ∠(*Z*) açısı oluşturulur. *EB* hattının yarısı *K* noktasını belirler ve *C* noktasından *AE* hattına paralel bir hat çizilerek *EH* hattını kesen *H* noktası bulunur. BH hattına paralel *KT* ve *AX* hatları *CL* hattı üzerindeki *L* ve *T* noktalarını belirler. *LB* diyagonali çizilir ve uzatılarak *TK* hattının uzantısıyla kesiştirilerek *M* noktası elde edilir. *HB* ve *LA* hatları uzatılır ve *AE* hattına paralel *MX* hattıyla kesiştirilerek *O* ve *X* noktaları elde edilir. THBK paralelkenarına eşit olan *ABOX* paralelkenarı, bir kenarı *AB* doğrusu, bir açısı *Z* açısı ve alanı S(*CED*) üçgen alanına eşit aranan paralelkenardır.



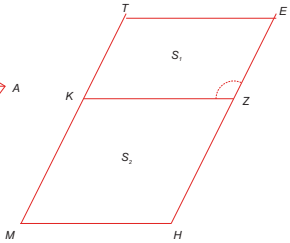
Şekil 80

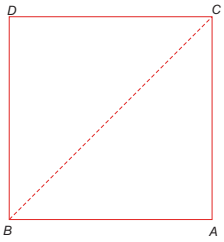
***XLV. Önerme*: Verilen bir hat üzerine alanı bir dörtgenin alanına, bir açısı verilen bir açıya eşit bir paralelkenarın oluşturulması.**

Kanıtı: *TE* hattı, *ABCD* dörtgeni ve ∠(*L*) açısı verilmiştir (*Şekil 81*). Verilen dörtgen *ABC* ve *ADC* üçgenlerine ayrılır. *TE* hattı üzerine alanı *ABC* üçgeninin alanına eşit *TEZK* paralelkenarı, bir açısı ∠(*L*) = ∠(*T*) olacak şekilde kurulur. Aynı şekilde *KZ* = *TE* üzerine alanı *ADC* üçgeni alanına eşit olacak şekilde *KZHM* paralelkenarı oluşturulur. ∠(*MKZ*) = ∠(*L*) = ∠(*T*) olduğundan ∠(*TEZ*) ve ∠(*MEZ*) açılarının toplamı iki dik açıya eşittir ve *TM* bir doğrudur. Aynı nedenden dolayı *EH* hattı da bir doğru olduğundan, *TEHM* şekli *TE* üzerine kurulu, *T* açısı *L* açısına eşit ve alanı *ABCD* dörtgeni alanına eşit bir paralelkenardır. Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdir. Bu önerme Haccâc'ın nüshasında yer almayan önermelerdendir."



Şekil 81





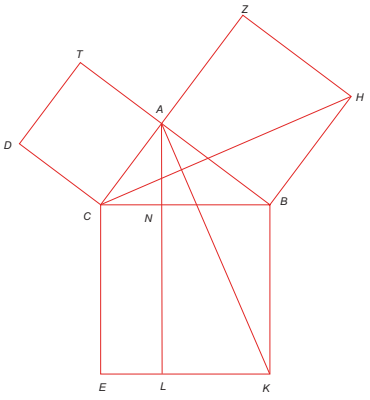
Şekil 82

***XLVI. Önerme*: Verilen bir hat üzerine bir kare oluşturulması.**

Kanıtı: Eğer *AB* verilen hat ise *AB* hattının *A* noktasından *AB* hattına eşit olacak şekilde *AC* diki dikilir (*Şekil 82*). *B* noktasından *AC* hattına ve *C* noktasından *AB* hattına paralel *BD* ve *CD* hatları çekilir. Bu hatlar *D* noktasında kesişinceye kadar uzatılır. Bu hatlar kesişir çünkü *CB* köşegeni ile dik açıdan küçük olan tek taraflı açılar oluşur. Neticede *ABDC* paralelkenarı oluşur. Bu paralelkenarda $DC = DB = AB = AC$ kenarları eşit ve $\angle(A) = \angle(B) = \angle(C) = \angle(F)$ açıları dik olduğundan *ABDC* isteğe uygun olarak *AB* hattı üzerine kurulmuş bir karedir.

***XLVII. Önerme*: Bir dik üçgende hipotenüsün karesi iki kenar karelerinin toplamına eşittir.**

Kanıtı: Bir $\angle(ABC)$ dik üçgeni verilmiştir. $CB^2 = (AC^2 + AB^2)$ olduğunu kanıtlamamız gerekir (*Şekil 83*).



Şekil 83

Üçgenin kenarlarına *ACDT*, *ABHZ* ve *BCEK* kareleri çizilir. ∠(*ZAB*), ∠(*CAB*) ve ∠(*TAC*) dik açılar olduğundan *ZC* ve *TB* hatları doğrudur. *A* noktasından *BK* hattına paralel *AL* hattı çekilir. ∠(*ABK*) açısı geniş ve ∠(*BAC*) açısı ∠(*BAL*) açısından büyük olduğu için *AL* hattı *ABC* üçgeninin içinden geçer. *AL* hattı *BC* hattını *N* noktasında keser. *NL* hattı *BCEK* karesini *CNLE* ve *NLKB* olmak üzere iki kısma böler. *CH* ve *AK* hatlarını çekelim. *HB* = *AB*, *CB* = *BK* ve ∠(*HBC*) = ∠(*ABK*) olduğundan Δ(*ABK*) = Δ(*CBH*) eşitliği geçerlidir. *BH* tabanı ortak, *CZ* // *BH* olduğundan [½ × S(*AZHB*)] = S(*CHB*) yazılabilir. Aynı şekilde *BK* tabanları ortak ve *AL* // *BK* olduğundan [½ × S(*BNLK*)] = S(*ABK*) geçerlidir. Neticede her ikisinin yarısı eşit olduğundan S(*BAZH*) = S(*BNLK*) yazılabilir. Aynı yol izlenerek S(*ACDT*) = S(*CNLE*) olduğu, neticede S(*BCEK*) = [S(*ABHZ*) + S(*ACDT*)] ya da $CB^2 = (AC^2 + AB^2)$ olduğu görülür. Buda bizim kanıtlamak istediğimizdir.

Not: Bu önermeye *arus* (*gelin*) adı verilir. Her kenarın 2 tarafı bulunduğuna göre, karelerin üçgen kenarlarının hangi taraflarına yerleştirildiklerine bağlı olarak önerme (2 × 2 × 2) = 8 farklı şekilde çizilebilir. Bu nedenden dolayı önerme farklı şekillerde açıklanır ve farklı yollar izlenerek kanıtlanır. Bazen *AL* paraleli oluşturulamaz veya üçgenin iki kenarından birine ya da hiçbir tarafına kare çizilemez. Bu durumlarda iki kenar toplamı ya da farkına ilişkin karelerin oluşturulması gerekebilir. Her ne kadar sözü uzatacak olsa da bunların çoğuna işaret edeceğim.

(1- Birinci durum yukarıda verilen temel önermeye karşı düşer).

2- (*ABC* dik ikizkenar üçgende *AB* = *AC* olması halinde) üçgen kenarlarına kurulan kareler üçgenin diğer kenarları üzerine düşer (*Şekil 84*). *DH* hattı çekildiğinde ∠(*ABC*) ve ∠(*DBH*) olur, çünkü koşul gereği ∠(*ABH*) ve ∠(*CBD*), ∠(*ABC*) ve ∠(*CBH*) açılarının toplamı ∠(*HBD*) ve ∠(*CBH*) açılarının toplamına, yani bir dik açıya eşittir.

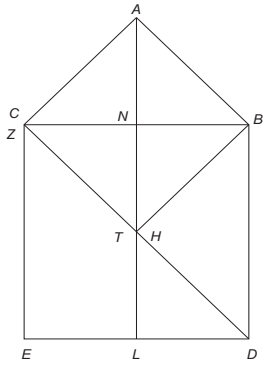
Ayrıca *AB* = *BH*, *BC* = *BD* ve ∠(*ABC*) = ∠(*HBD*) olduğundan Δ(*ABC*) üçgeni Δ(*BDH*) üçgenine eşittir ve neticede ∠(*BAC*) = ∠(*BHD*) olduğundan Δ(*BHD*) üçgeni diktir. Bunun sonucunda *DZ* bir doğrudur ve *AL* hattını *T* noktasında keser. Aynı şekilde *DZ* // *AB* ve ∠(*CBA*) = ∠(*NAC*)

olduğundan $\angle(AZH)$ açısı diktir. H ve T noktaları çakışır. Bu durumda $AB = AC$ ya da $\Delta(ABC)$ bir dik ikizkenar üçgen olur.

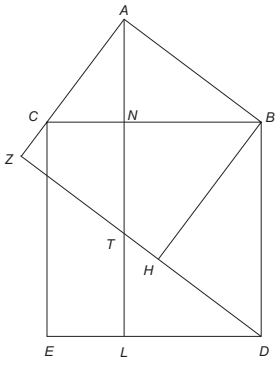
3- $AB > AC$ olması halinde AL ile ZD hatlarının T kesişme noktası ZH hattı üzerine düşer ve $\angle(ABC)$ açısı dik açının yarısından küçük olur (*Şekil 85*).

4- $AB < AC$ olması halinde AL ile ZD hatlarının T kesişme noktası ZH hattının dışına düşer ve $\angle(ABC)$ açısı dik açının yarısından büyük olur (*Şekil 86*).

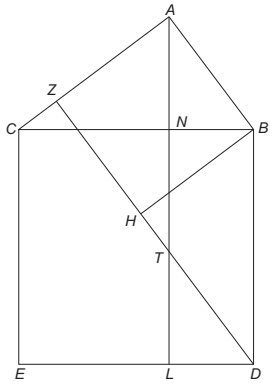
Her iki durumda AB müşterek taban ve $ZD \mathbin{/\!/} AB$ olduğundan $S(ABHZ) = S(ABDT)$, aynı şekilde BD müşterek taban ve $AL \mathbin{/\!/} BD$ olduğundan $S(ABDT) = S(BDLN)$ ya da $AB^2 = S(BDLN)$ olduğu kanıtlanır. Aynı şekilde $AC^2 = S(CNLH)$ olduğu gösterilebilir.



Şekil 84



Şekil 85



Şekil 86

Böylece 8 durumun 4'ü kanıtlanmış olur ve geriye dört durum kalır. Bu durumlarda hipotenüs üzerine kurulan kare üçgenin üzerine getirilir. Bu kareyi daha önce gösterdiğimiz gibi BC hattını N noktasında kesen ve DE hattını L noktasında kesen paralel LN hattını çekelim (*Şekil 87*).

İlkin AB kenarına ilişkin karenin üçgenin üzerine düşmediğini varsayalım. Bu durumda üçgenin AC kenarı uzatılırsa 3 farklı durum oluşabilir:

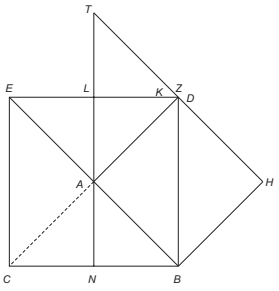
1- Eğer $AB = AC$ ise [ya da $\angle(ABC)$ bir ikizkenar dik üçgense), $AD = AB$ ve $\angle(ABD)$ ve $\angle(ACB)$ açılarının her biri dik açının yarısına eşit olduğundan AC hattının devamı D noktasından geçer (*Şekil 87*).

2- Eğer $AB > AC$ ise AC hattının devamı DE hattını K noktasında keser (*Şekil 88*). Bu durumda $KE < EC$, $\angle(ECK)$ ve $\angle(ABC)$ açılarının her biri dik açının yarısından küçük olur.

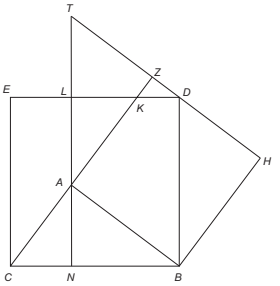
3- Eğer $AB < AC$ ise, AC hattının devamı DB hattını K noktasında keser (*Şekil 89*). Bu durumda $KB < BC$, $\angle(KBA)$ ve $\angle(ACB)$ açılarının her biri dik açının yarısından küçük olur.

Her 3 durumda AB hattına dik BH hattı çizilir ve bu hatta D noktasından DH diki indirilirse, AK hattı uzatıldığında bu hat DH hattını Z noktasında keser. Böylece $ABHZ$ tüm açıları dik olan bir paralelkenardır. $BC = BD$, $\angle(DHB) = \angle(BAC)$, $S(DHB) = S(ABC)$, ayrıca $\angle(DBH) = \angle(CBA)$ olduğundan $AB = BH$ ve $S(ABHZ)$ karesinin alanı isteğimize uygun olarak $\Delta(ABC)$ üçgeni AB kenarının karesine eşit olur.

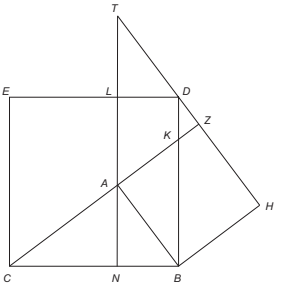
HZ ve AL hatları T noktasında kesişinceye kadar uzatılır. Bu hatların kesişme nedeni şudur: AZ hattı bu iki hat tarafından toplamı iki dik açıdan küçük olan tek taraflı [$\angle(AZT)$ ve $\angle(ZAT)$] açılar altında kesilir. BA hattı HT hattına paralel olduğundan, ortak tabanları BA olan $S(DBAT)$ paralelkenarının alanı $S(ABHZ)$ karesi alanına eşittir. [Ayrıca $\Delta(TLD) = \Delta(ANB)$ olduğundan] $AB^2 = S(BNLD)$ olduğu görülür.



Şekil 87



Şekil 88



Şekil 89

İkinci olarak AB kenarına ilişkin karenin üçgenin üzerine düştüğünü varsayalım. Bu durumda da 3 farklı durum oluşabilir:

1- Eğer $AB = AC$ ise [$\Delta(ABC)$ bir ikizkenar dik üçgense], Z noktası C noktası üzerine düşer (*Şekil 90*).

2- Eğer $AB > AC$ ise, Z noktası AC hattının devamı üzerine düşer (*Şekil 91*).

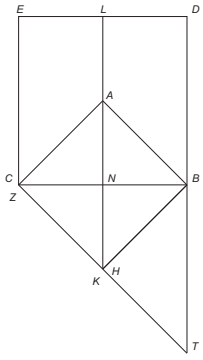
3- Eğer $AB < AC$ ise, Z noktası AC hattının üzerine düşer ve ayrıca $\angle(NAC) = \angle(CBA)$ olur çünkü bu açıların her biri $\angle(BAN)$ açısıyla birlikte bir dik açı oluşturur. (*Şekil 92*).

Her üç durumda AN hattını ZH hattını K noktasında kesene kadar uzatırsak burada da üç durum oluşur:

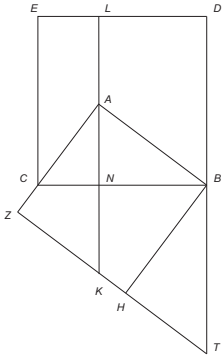
1- Eğer $AB = AC$ ise [$\Delta(ABC)$ bir ikizkenar dik üçgense], $\angle(NAC)$ yani $\angle(CBA)$ açıları dik açının yarısına eşit olur ve K noktası H noktasının üzerine düşer (*Şekil 90*).

2- Eğer $AB > AC$ ise, $\angle(CBA)$ açısı yarı dik açıdan küçük olur ve K noktası HZ hattı üzerine düşer (*Şekil 91*).

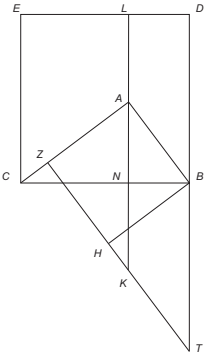
3- Eğer $AB < AC$ ise, $\angle(CBA)$ açısı yarı dik açıdan büyük olur ve K noktası HZ hattı dışına düşer (*Şekil 92*).



Şekil 90



Şekil 91



Şekil 92

Her 3 durum için DB ve ZK hatları T noktasında kesişinceye kadar uzatılır. $AB = AZ$ ve $\angle(BAC) = \angle(AZK)$, $\angle(ABC) = \angle(ZAK)$ olduğundan $\Delta(ABC) = \Delta(AZK)$, bu nedenden $AK = BC$ ya da $AK = DB$ ve $BT = AK$ olur. Bu durumda AB müşterek taban, $AB /\!/ ZT$ olduğundan $ABHZ$ paralelkenar alanı $ABTK$ paralelkenar alanına eşittir. Ayrıca $BT = BD$ olduğuna göre $S(ABHZ) = S(DBNL)$ ya da $AB^2 = S(DBNL)$ elde edilir. Aynı yol izlenerek $AC^2 = S(CELN)$ olduğu gösterilebilir.

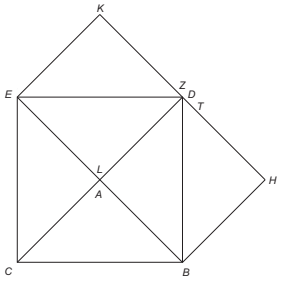
Bu önermeyi başka bir yol izleyerek de kanıtlamak mümkündür. Bunun için dik üçgen hipotenüsüne ilişkin kare diğer iki kenarın karelerine

eşit olacak şekilde bölünür. Yöntemi uygulamadan önce ilkin hipotenüsün karesini oluşturduktan sonra, kenarlardan birine ilişkin kare, örneğin *AC* kenarını bu kareyi *T* noktasında kesinceye kadar uzatalım. Burada 3 farklı durumla karşılaşılabilir:

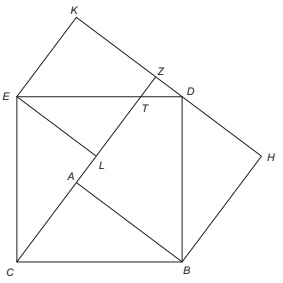
1- Eğer *AB* = *AC* ise [∠(*ABC*) bir ikizkenar dik üçgense], *T* noktası *D* noktası üzerine düşer (*Şekil 93*).

2- Eğer *AB* > *AC* ise, *T* noktası *ED* hattı üzerine düşer (*Şekil 94*).

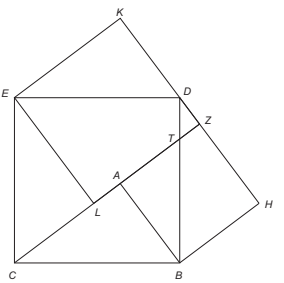
3- Eğer *AB* < *AC* ise, *T* noktası *DB* hattı üzerine düşer (*Şekil 95*).



Şekil 93



Şekil 94



Şekil 95

Tüm durumlar için *D* noktasından *AC* hattı devamına *DZ* diki inilir, bu dik her iki yöne doğru uzatılır ve ona *B* ve *E* noktalarından *BH* ve *EK* dikleri indirilir. Burada da 3 durumla karşılaşılır:

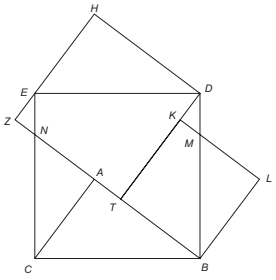
1- Eğer *AB* = *AC* ise [Δ(*ABC*) bir ikizkenar dik üçgense], *L* noktası *A* noktası üzerine düşer, *EALB* bir doğruya dönüşür (*Şekil 93*).

2, 3- Eğer *AB* > *AC* ya da *AB* < *AC* ise, *L* noktası *A* noktasından başka bir noktaya düşer (*Şekil 94* ve *95*).

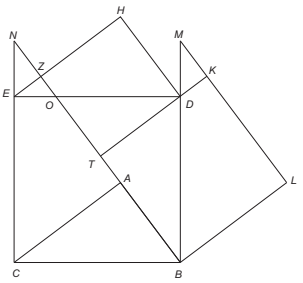
Tüm durumlar için *BC* = *BD* = *DE* = *EC*, ∠(*A*) = ∠(*H*) = ∠(*K*) = ∠(*L*) = dik açı, diğer tüm açılar uygun olarak eşit olduğundan, örneğin ∠(*ABC*) = ∠(*HBD*), çünkü bu iki açının her biri ∠(*DBA*) ile birlikte bir dik açıdır, Δ(*ABC*) = Δ(*HBD*) = Δ(*KDE*) = Δ(*LCE*) üçgenleri eşittir. Neticede kenarları paralel ve *AB* = *BH* olduğundan *ABHZ* dörtgeni bir karedir ve AB^2 = S(*ABHZ*) ilişkisi geçerlidir. Aynı şekilde *EKZL* dörtgeni de *EK* = *EL* olduğundan bir karedir ve ayrıca *AC* = *EL* olduğundan AC^2 = S(*EKZL*) olur.

[S(*HDB*) + S(*DKE*)] = [S(*ABC*) + S(*ELC*)] ya da [S(*HDB*) + S(*DKE*) + S(*DELAB*)] = [S(*ABC*) + S(*ELC*) + S(*DELAB*)] olduğundan [S(*EKZL*) + S(*ABHZ*)] = S(*BCED*) ya da ($AB^2 + AC^2$) = BC^2 olduğu kanıtlanır.

I)- Eğer *AB* ve *AC* karelerinin kendi kenarları üzerinde olması istenmezse, *AB* hattı *EC* hattını *N* noktasında kesinceye kadar uzatılır. *E* ve *D* noktalarından *AB* hattına ve uzantısı üzerine *EZ* ve *DT* dikleri indirilir (*Şekil 96* ve *97*). Sonra *ZE* hattı uzatılır ve *D* noktasından bu hatta *DH* diki inilir. *TD* hattında *TB* hattına eşit *TK* hattı ayrılır ve *TB* hattına paralel *KL* hattı çizilir. Bu hat *DB* hattını *M* noktasında keser. *B* noktasından *TB* hattına *BL* diki çekilir. Bu durumda (uygun açıların eşitliğinden) Δ(*HDE*) = Δ(*ABC*) = Δ(*TDB*) olduğu açıkça görülür.



Şekil 96



Şekil 97

Bu durumda *TKLB* ve *ZHDT* birer karedir ve alanları toplamı ($AC^2 + AB^2$) değerine eşittir. *LB* = *AC* ve uygun açılar eşit olduğundan Δ(*ACN*) = Δ(*LBM*) ve *DM* = *EN* olduğundan Δ(*KDM*) = Δ(*ZEN*). Bundan dolayı S(*BNC*) = [S(*KMD*) + S(*TBMK*)] = [S(*LBM*) + S(*DBT*)] olur.

1- Eğer *AB* > *AC* ise [S(*KMD*) + S(*TBLK*) + S(*HDE*) + S(*DTNE*)] = [S(*BNC*) + S(*DBT*) + S(*DTNE*)] ya da ($AB^2 + AC^2$] = BC^2 olur (*Şekil 96*).

2- Eğer *AB* < *AC* ise [S(*KMD*) + S(*TBLK*) + S(*HDE*) - S(*OEN*)] = [S(*BNC*) + S(*ODB*) - S(*OEN*)] ya da ($AB^2 + AC^2$) = BC^2 olur (*Şekil 97*).

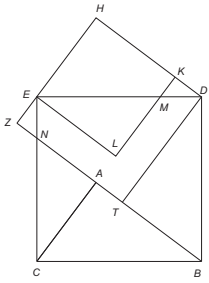
II)- Eğer üçgen kenarlarından birinin karesi diğer kenarın karesi üzerine düşmesi istenirse önceki şekilde yaptığımızı yaparız ancak *HK*, *HE* hatları *HZ* ve *HD* hatlarıyla beraber çekilirken *KL* ve *EL* hatları bunlara paralel çekilir (*Şekil 98*). Bu iki hat *L* noktasında kesişir, *KL* hattı ise *ED* hattını *M*

noktasında keser. $AC = EL$ ve açılar uygun olarak eşit olduğundan $\Delta(CNA) = \Delta(ELM)$, $ZE = DK$ olduğundan $\Delta(DKM) = \Delta(EZN)$ ve neticede $\Delta(BNC) = \Delta(DHE) + \Delta(ELM)$

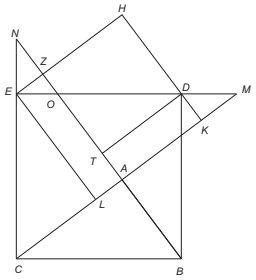
1- Eğer $AB = AC$ ise, KL ve AC hatları KC doğrusunu oluşturur.

2- Eğer $AB > AC$ ise bu durumda $[S(HELK) + S(EZN) + S(DHE) + S(EDTN)] = [S(BNC) + S(DHE) + S(EDTN)]$ ya da $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olur (*Şekil 98*).

3- Eğer $AB < AC$ ise $[S(HELK) + S(EZN) + S(DHE) + S(OZE)] = [S(BNC) + S(DHE) + S(OZE)]$ ya da $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olur (*Şekil 99*).



Şekil 98



Şekil 99

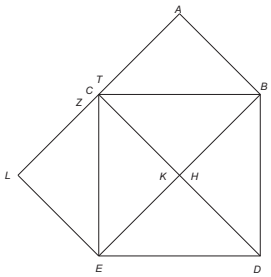
III)- Eğer ABC üçgeni üzerine sadece kenarlardan biri, örneğin AB karesi $AEDE$ düşerken, hipotenüsün karesinin düşmemesi istenirse, (AB kenarına dik BH hattı üzerinde $ABHZ$ ve BH kenarına dik DZ hattı üzerine $ZKEL$ dörtgenleri oluşturulur) 3 farklı durumla karşılaşılır:

1- Eğer $AB = AC$ ise Z noktası C noktası üzerine düşer, EK ve HB hatları EB doğrusuna dönüşür (*Şekil 100*).

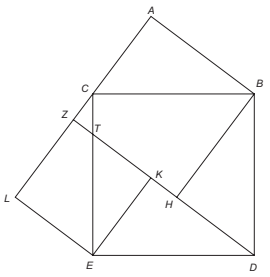
2- Eğer $AB > AC$ ise bu durumda Z noktası AC hattı devamı üzerine düşer (*Şekil 101*).

3- Eğer $AB < AC$ ise bu durumda Z noktası AC hattı üzerine düşer (*Şekil 102*).

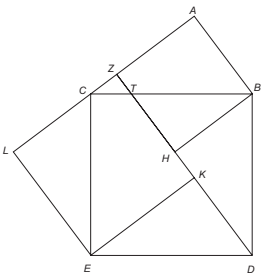
Buna göre $S(ZKEL) = AC^2$, $S(ABC) + S(LCE) + S(CTHB) = S(KDE) + S(HBD) + S(CTHB)$ olduğundan diğer bir deyişle $AB^2 + AC^2 = BC^2$ olur.



Şekil 100



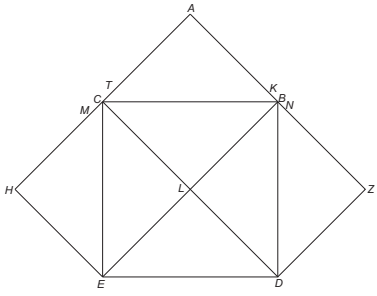
Şekil 101



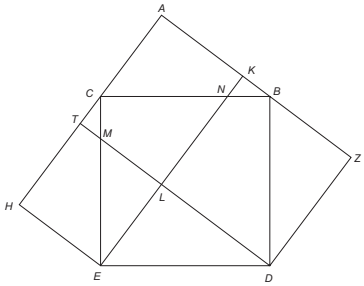
Şekil 102

IV)- Eğer kenar karelerinin hiçbiri üçgenin üzerine düşmesi istenmezse, *ABC* dik üçgen hipotenüs karesi *BDEC* elde edildikten sonra *AC* ve *AB* kenarları uzatılıp bunların üzerine *D* ve *E* noktalarından *DZ* ve *EH* dikleri inilir. Ayrıca üçgen kenarlarına paralel *DT* ve *EK* hatları çizilir. Bu iki hat *L* noktasında kesişir. *AB* ve *BC* kenarlarıyla ilişkili aşağıdaki durumlar oluşabilir:

1- Eğer $AB = AC$ ise, *T* ve *M* noktaları *C* noktası, *K* ve *N* noktası *B* noktası üzerine düşer (*Şekil 103*). Bu durumda $\Delta(CHE) = \Delta(BZD) = \Delta(BCL) = \Delta(EDL)$ olduğundan $S(BCED) = S(BLDZ) + S(CHEL)$ ya da $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olduğu görülür.



Şekil 103



Şekil 104

2- Eğer $AB > AC$ ise bu durumda *T* ve *M* noktası *CH* ve *CE* hatları üzerine, *K* ve *N* noktası *AB* ve *CB* hatları üzerine düşer (*Şekil 104*). Bu durumda $S(ABC) = S(ZDB) = S(LDE) = S(HCE)$, ayrıca *DLKZ* ve *THEL* dörtgenleri birer kare olup alanlarının toplamı $(AB^2 + AC^2)$ olur. Bütün açılar eşit ve $BK = CT$ olduğundan $S(CTM) = S(BKN)$ olur. Aynı şekilde $S(DME) = S(ENC)$ yazılabilir. Bu nedenden dolayı $S(LDE) = S(NLMC)$

= S(*CHE*) ya da S(*NLMC*) = [S(*KBN*) + S(*MEHT*)] veya [S(*NLMC*) + S(*DME*) + S(*NBDL*)] = [S(*MEHT*) + S(*BKN*) + S(*DBZ*) + S(*LDBN*) + S(*MLE*)] diğer bir deyişle ($AB^2 + AC^2$) = BC^2 olduğunu görülür.

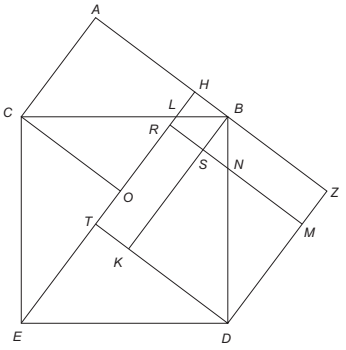
3- Eğer *AB* < *AC* ise bu durumda *T* ve *M* noktası *AC* ve *CN* hatları üzerine, *K* ve *N* noktası *BC* ve *BD* hatları üzerine düşer ve benzer sonuçlar elde edilir.

Diğer bir yöntemde kareler bir tarafta toplanır. *AB* üçgen kenarı uzatılır, bu hatta *D* ve *E* noktalarından *DZ* ve *EH* dikleri çekilir, *D* noktasından *HE* hattına *DT* diki ve *B* noktasından *DT* hattına *BK* diki inilir (*Şekil 105*). Daha sonra *DZ* hattı üzerinde *DK* hattına eşit *DM* parçası ayrılır ve *M* noktasından *DT* hattına *MR* paraleli çekilir. Bu hat *BD*, *BK* ve *HE* hatlarını *N*, *S* ve *R* noktalarında keser.

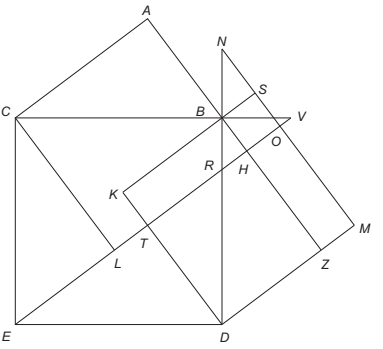
Bu durumda S(*ABC*) = S(*TDE*) = S(*BZD*) = S(*DBK*) olur. Ayrıca *MDKS* ve *ZDTH* dörtgenleri kare olur ve alanlarının toplamı [S(*MDKS*) + S(*ZDTH*)] = ($AB^2 + AC^2$) ilişkisini sağlar. Ayrıca *CO* = *MD* ve uygun açıları eşit olduğundan Δ(*NMD*) ve Δ(*COL*) üçgenleri ve alanları eşittir: S(*NMD*) = S(*COL*). Aynı şekilde S(*BLH*) = S(*BNS*) olur. Aşağıdaki iki farklı durumla karşılaşılır:

1- Eğer *AB* = *AC* ise *CD* ve *BE* hatları *L* noktasında kesişir (*Şekil 103*).

2 - Eğer *AB* ≠ *AC* ise *T* noktası *O* noktasının soluna ya da sağına düşer (*Şekil 105* ve *106*).



Şekil 105

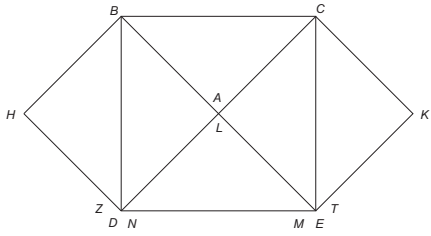


Şekil 106

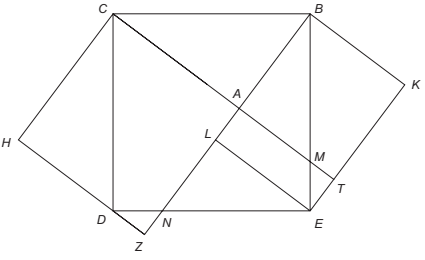
V)- Üçgen kenarları karelerle aynı tarafta üçgenin üzerinde olup olmamasına bağlı olarak bir kısmı yukarıda verilen 8 durum söz konusu olabilir. Bunlardan birinde sadece hipotenüsün karesi üçgenin üzerine gelir. Üçgenin *AB* ve *AC* kenarlarını uzatılırsa iki durumla karşılaşılır:

1- Eğer *AB* = *AC* ise, *AB* ve *AC* kenarlarının uzantısı *E* ve *D* noktalarından geçer (*Şekil 107*).

2 ve 3- Eğer *AB* ≠ *AC* ise *AB* ve *AC* kenarlarının uzantısı hipotenüsün karesini *M* ve *N* noktalarında keser (*Şekil 108*). *D* ve *E* noktalarından *AB* ve *AC* kenarlarının uzantısına *DZ* ve *ET* dikleri inilir ve uzatılır. Bundan sonra *B* ve *C* noktalarından *DZ* ve *ET* devamına *CH* ve *BK* dikleri inilir.



Şekil 107



Şekil 108

Eğer *AB* < *AC* ise *E* noktasından *BZ* hattına inilen *EL* dikinin *L* noktası *A* noktasından farklıdır. Bu durumda *ELBK* bir paralelkenar ve *AZHC* bir karedir. Bütün taraflar uygun ve açılar eşit olduğundan S(*ABC*) = S(*KEB*) = S(*LEB*) = S(*HCD*) yazılabilir. Ayrıca tüm açılar uygun olarak eşit *AB* = *LE* olduğundan S(*ABM*) = S(*LEN*) geçerlidir. Bu nedenden *BM* = *EN* ya da *ME* = *ND* olduğundan ve uygun açıların eşitliğinden S(*EMT*) = S(*DNZ*) bulunur. Buna göre [S(*ABM*) + S(*LEMA*)] = [S(*LEMA*) + S(*LEN*)] ya da S(*CEL*) = S(*MANE*) ya da S(*KEB*) = S(*MANE*) ya da [S(*MBKT*) + S(*DNZ*)] = S(*MANE*) yazılabilir. Neticede [S(*MBKT*) + S(*DNZ*) + S(*HCD*) + S(*DCAN*)] = [S(*MANE*) + S(*ABC*) + S(*ABM*) + S(*DCAN*)] ya da (AB^2 + AC^2) = BC^2 olduğunu kanıtlanmış olur.

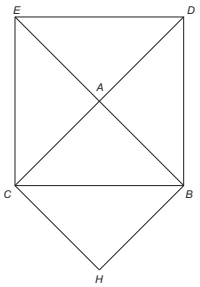
Eğer *AB* > *AC* ise *ELBK* bir kare, buna karşın *AZHC* bir paralelkenardır. Bu durum yukarıdakine benzer şekilde kanıtlanabilir.

VI)- Eğer hipotenüs ve bir kenarın karesi üçgen üzerine düşerse aşağıdaki durumlar oluşur:

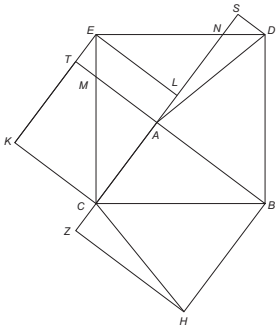
1- Eğer $AB = AC$ ise tüm üçgenler birbirine eşit olur (*Şekil 109*). Bu durumda AB kenarın karesi AB^2 iki üçgen alanına eşit olduğundan, $EDBC$ alanı hipotenüsün karesine eşittir: $CB^2 = 2.AB^2$.

2- Eğer $AB > AC$ ise AC hattı ED hattı N noktasında kesilene kadar uzatılır (*Şekil 110*). D ve E noktalarından AC hattının devamına EL ve DS' dikleri inilir. C noktasından AC hattına CK diki inilir. E noktasından EL hattına EK diki çekilir. AB hattı EK hattını T noktasında kesinceye kadar uzatılır. $KTAC$ dörtgeni ileride kanıtlanacağı gibi bir karedir. B noktasından AB hattına dik inilir ve $BH = AB$ alınır. H noktasından AC hattının devamına EZ diki inilir. CH ve DA hatları çekilir. S(AMC) = S(LEN) ya da [S(AMC) + S($AMEL$)] = [S(LEN) + S($AMEL$)] ya da S($NAME$) = S(ECK) ve ayrıca $SD = EM$, $EC = ED$ olduğundan $ME = ND$ olur. Uygun açıları eşit olduğundan S(DSN) = S(EMT), aynı şekilde kenarları dik $\angle(DBA) = \angle(CBH)$ ve $BC = BD = BH = BA$ olduğundan S(DBA) = S(CBH) yazılabilir.

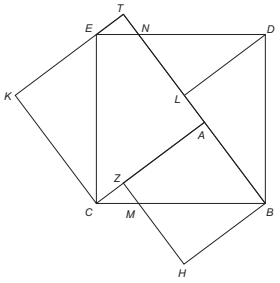
Bunun sonucunda $\angle(DAS) = \angle(CHZ)$, $\angle(S) = \angle(Z)$ ve $HC = AD$ olduğundan S(ADS) = S(CHZ) geçerlidir. S($CBHZ$) = S($DBAN$) ya da [S($CBHZ$) + S($MCKT$)] = [S($DBAN$) + S($NAME$)] ya da [S(CBH) + S($MCKT$)] = S($FBMH$) ya da [S($CBHZ$) + S($MCKT$) + S(BMC)] = [S($DBAN$) + S(BMC)] diğer bir deyişle ($AB^2 + AC^2$) = BC^2 olduğu kanıtlanır.



Şekil 109



Şekil 110



Şekil 111

3- Eğer $AB < AC$ ise, AB hattı DE hattını T noktasında kesinceye kadar uzatılır, D noktasından AT hattına DL diki ve E noktasından AT uzantısına ET diki çekilir (*Şekil 111*). Ayrıca C noktasından da TE uzantısına CK

diki indirilir. Açı ve kenarların eşitliğinden $\Delta(ABC) = \Delta(KEC) = \Delta(DLB)$ ve *KTAC* dörtgeninin bir kare olduğu görülür. $BH = DL$ ve uygun açıların eşitliğinden $S(DLN) = S(BHM)$, ayrıca $EN = MC$ olduğundan $\Delta(ENT) = \Delta(MCZ)$ yazılabilir. Böylece $[S(BDN) + S(CMZ)] = [S(KEC) + S(ENT) + S(BMH)]$ ya da $[S(BDN) + S(CMZ) + S(ENBMZC)] = [S(KEC) + S(ENT) + S(BMH) + S(ENBMZC)]$ ya da diğer bir deyişle $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olduğu anlaşılır.

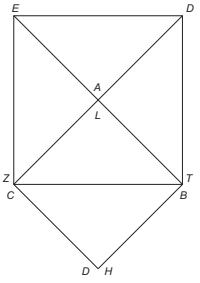
VII)- Eğer üçgen kenar karelerinin tümü üçgenin üzerine düşürülürse aşağıdaki durumlar oluşur:

1- Eğer $AB = AC$ ise üçgenin iki kenarı birbiri üzerine düşer ve önerme kolaylıkla kanıtlanır (*Şekil 112*).

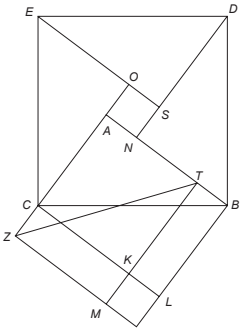
2- Eğer $AB > AC$ ise, bu durumda *ABHZ* karesi oluşturulduktan sonra *CK* hattı *L* noktasına ve *TK* hattı *M* noktasına kadar paralel uzatılır (*Şekil 113*). *AB* hattına *D* noktasından *DN* diki ve *E* noktasından *DN* dikine *ES* diki inilir. *CA* ve *ES* hatları *O* noktasında kesişir.

Böylece *CEDB* karesi 4 eşit dik üçgene ve bir *AOSN* karesine bölünmüş olur. Bu karenin kenarları $(AB - AC)$'ye eşittir. $AB = AZ = ZH = HB$ alınarak *ABHZ* karesi oluşturulur. *CL* ve *MT* hatları *ATKC* karesi oluşacak şekilde çekilir. $BC^2 = S(EDBC) = [S(AOSN) + 4.S(ABC)]$ ve $S(KLHM) = S(AOSN)$ olduğundan, $(AB^2 + AC^2) = [S(KLHM) + 4.S(ABC)]$ ilişkisiyle $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$ kanıtlanmış olur.

3- Eğer $AB < AC$ ise, önerme benzer şekilde kanıtlanır.



Şekil 112

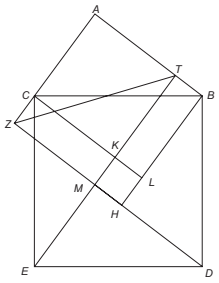


Şekil 113

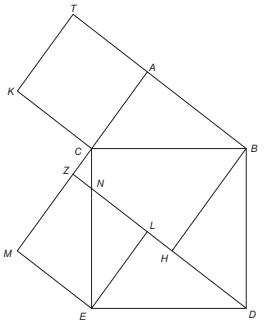
VIII)- Eğer üçgen hipotenüsü üçgenin dışına kenar kareleri de üçgenin üzerine düşürülürse aşağıdaki durumlar oluşur:

1- Eğer $AB = AC$ ise önerme yukarda olduğu gibi kolayca kanıtlanabilir.

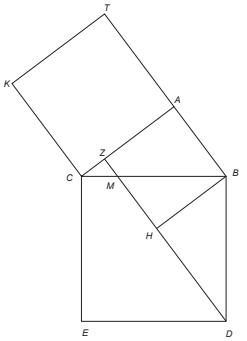
2- Eğer $AB \neq AC$ ise ilkin AC ve AB kenarlarına eşit $ACKT$ ve $AZHB$ kareleri oluşturulur, daha önceki örneklerden bilindiği üzere ZD ve TE düz hatlardan oluşur (*Şekil 114*). CK hattı BH hattını L noktasında kesinceye kadar uzatılır. Böylece $CBDE$ karesi dört üçgene ve $KLHM$ karesine bölünür. Sonra TZ hattı çekilir. Böylece S($ACLB$) ve S($ATMZ$) dörtgenlerinin alanı 2.S(ABC) eşit olur. Bu ise $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$ anlamına gelir.



Şekil 114



Şekil 115



Şekil 116

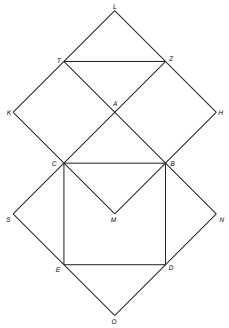
IX)- Eğer üçgen hipotenüsü üçgenin dışına kenar karelerinden sadece biri üçgenin üzerine düşürülürse aşağıdaki durumlar oluşur:

1- Eğer $AB = AC$ ise önerme yukarıdaki örneklerde olduğu gibi kolayca kanıtlanabilir.

2- Eğer $AB > AC$ ise, ilkin $ABHZ$ ve $ACKT$ kareleri oluşturulur (*Şekil 115*). Burada da ZD bir doğrudur. AC hattı uzatılır ve devamına EM diki ve DZ hattına EL diki inilir. Bu durumda $\Delta(ABC) = \Delta(HBD) = \Delta(LDE) = \Delta(MCE)$ ve S($ZLEM$) = S($KTAC$) olduğu görülür. Şu halde [S(DLE) + S(LEN)] = [S(MCE) + S(LEN)] ya da S(DNE) = [S($LEMZ$) + S(CZN)] ya da [S(DNE) + S(HBD) + S($CBHN$)] = [S($LEMZ$) + S(CZN)+ S(HBD) + S($CBNN$)] yazılabilir. Diğer bir deyişle $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$.

3- Eğer $AB < AC$ ise, DH hattı çekilir ve $\Delta(ABC) = \Delta(HBD)$ olduğu görülür (*Şekil 116*). $S(DECM) + S(MZC) = S(ACKT)$ ya da $S(BDM) = [S(BHZA) + S(MZC)]$ ya da $[S(DECM) + S(HBM) + S(HBD)] = [S(ACKT) + S(BHZA)]$ diğer bir deyişle $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$.

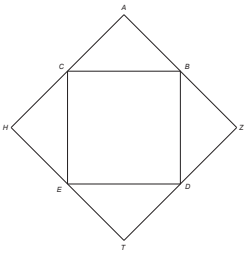
X)- Eğer hiçbir kenar karesi üçgenin üzerine düşmez ise, HZ ve KT hatları L noktasında, HB ve KC hatları M noktasında kesişinceye kadar uzatılır (*Şekil 117*, çizim $AB = AC$ için yapılmıştır). Bu durumda $S(MKLH) = (AC + AB)^2$ olur. Sonra AB ve AC hatları uzatılır, D ve E noktalarından bu hatlara çekilen DN ve ES dikleri O noktasında kesişinceye kadar uzatılır. $\Delta(ZLT) = \Delta(ZAT) = \Delta(ABC) = \Delta(BMC) = \Delta(BND) = \Delta(EDO) = \Delta(CES)$ üçgenleri eşittir. $S(KLHM) = S(ANOS)$ olduğuna göre, üçgenlerden geriye kalan alanlar için $[S(AZHB) + S(KTAC)] = S(CBDE)$ diğer bir deyişle $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$ olduğu görülür.



Şekil 117

XI)- Eğer sadece hipotenüs karesi göz önünde bulundurulursa, AB ve AC hatları uzatılır, D ve E noktalarından DZ ve EH dikleri inilir ve bunlar T noktasında kesişinceye kadar uzatılır (*Şekil 118*, çizim $AB = AC$ için yapılmıştır). Oluşan $S(AHTZ)$ karesinin alanı $(AB + BC)^2$'ye eşittir. Burada birbirine eşit 4 üçgen oluşur: $[S(CHE) + S(BDZ)] = (AB \times AC)$ ve $[S(CHE) + S(BDZ) + S(ETD) + S(ABC)] = 2(AB \times AC)$ ya da $\{S(AHTZ) - [S(CHE) + S(BDZ) + S(ETD) + S(ABC)]\} = (AB + BC)^2 - 2(AB \times AC) = (AB^2 + AC^2) = S(CBDE) = BC^2$ yazılabilir. Şu halde $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ ilişkisi geçerlidir.

Bu önerme *2. Makalenin IV.* önermesinde de açıklandığı için üzerinde durmaya gerek yoktur. Bu ve bundan önceki önermelerde *AB* kenarının *AC* kenarına eşit olması ya da olmaması kanıt yönünden hiçbir fark getirmemektedir.

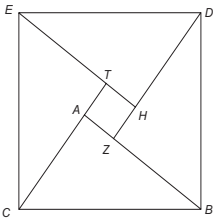


Şekil 118

XII)- Eğer hipotenüs karesi üçgenin üzerine düştüğünü varsayarsak, *AB* hattına ve AC uzantısına *EH* ve *DZ* dikleri indirilir ve aşağıdaki iki durum oluşur (*Şekil 119*):

1- Eğer $AB = AC$ ise çekilen bütün dik hatlar A noktasında birleşir ve bu durumda açıkça görüldüğü gibi $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olur.

2- Eğer $AB \neq AC$ ise *EDBC* karesinden birbirine eşit 4 üçgen çıkarıldığında $S(ATHZ) = (AB - AC)^2$ olur. $S(EDBC) = [2(AB \times AC) + S(ATHZ)] = [2(AB \times AC) + (AB - AC)^2] = (AB^2 + AC^2)$ ilişkilerinden $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olduğu kanıtlanmış olur.

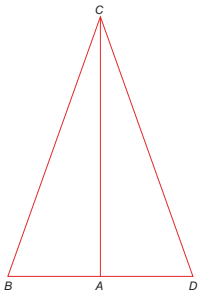


Şekil 119

Burası anlatacaklarımızın sonudur. Bu şekillere tek tek yer vererek sözü bu kadar uzatmamızın sebebi bunun geometride meleke sağlamasından dolayıdır. Şimdi tekrar kitabın açıklamasına dönelim.

***XLVIII. Önerme*: Bir üçgende bir kenarın karesi kalan iki kenar karelerinin toplamına eşitse diktir.**

ABC üçgeninde $(AB^2 + AC^2) = BC^2$ olduğunu varsayalım, bu durumda $\angle(CAB)$ bir dik açıdır (*Şekil 120*).



Şekil 120

Kanıtı: Üçgenin *A* noktasından *AB* hattına eşit *AC* kenarına dik *AD* hattını çekelim. Bu durumda $AD = AB$, $CD^2 = (AD^2 + CA^2)$ ve $CB^2 = (AB^2 + AC^2)$ olduğundan $CD^2 = CB^2$ ya da $CD = CB$ olur. Buna göre $\Delta(ABC) = \Delta(CAD)$ ve kanıtlamak istediğimiz gibi $\angle(CAB) = \angle(CAD)$ bir dik açıdır.

Birinci makale bitti.

İKİNCİ MAKALE

Bu makale 14 önermeden oluşur.

GİRİŞ

Bir dikdörtgende dik açı oluşturan iki dik doğruya, *oluşturan doğrular* denir. Dikdörtgen alanı bu iki dik doğru çarpılarak elde edilir.

Bir paralelkenarın tanımladığı köşegensel alana *'alem* ya da *gnomon* denir.[1]

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Bir hattın diğer bir hatla çarpılması sonucu elde edilen alan, birine ilişkin kısımların diğerleriyle çarpım toplamına eşittir.[2]**

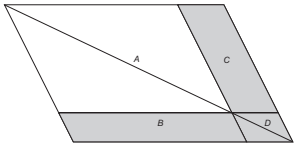
Açıklama: *BC* hattının *BD*, *DE* ve *EC* kısımlarından oluştuğunu varsayalım (*Şekil 1*). Bu durumda (*A* × *BC*) = [*A* × (*BD* + *DE* + *EC*)] olduğunu kanıtlamalıyız.

Kanıtı: *DB* hattının *B* noktasından *A* hattına eşit *BZ* diki çekilir ve *CBZH* dikdörtgeni oluşturulur ve *BZ* hattına paralel *DT* ve *EK* hatları çekilir. Bu iki paralel hat *BZ* hattına ve bunun sonucu *A* hattına eşittir. Buna göre *A* × (*BD* + *DE* + *EC*) = S(*DBZT*) + S(*EDTK*) + S(*CEKH*) diğer bir deyişle S(*CBZH*) = S(*DBZT*) + S(*EDTK*) + S(*CEKH*) = (*A* × *BD*) + (*A* × *DE*) + (*A* × *EC*) olur ki bu da bizim istediğimizdir.

Not: Başka bir deyişle, eğer (*BD* + *DE* + *EC*) ≠ *BC* olsaydı bu durumda S(*DBZT*) + S(*EDTK*) + S(*CEKH*) ≠ S(*CBZH*) olurdu. Çünkü *DBZT*, *EDTK*, *CEKH* alanlarının bir tarafları *A* hattına eşit diğer tarafları ise *BD*, *DE* ve *EC* hat parçalarının toplamına eşit olduğu varsayılır.

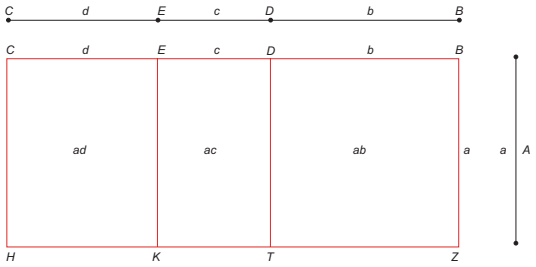
---

1 Öklides *genomu*nu aşağıdaki şekil aracılığıyla açıklar. Verilen bir *A* alanının *gnomon*u (*B* + *C* + *D*) alanlarından oluşur, burada *B* ve *C* tamlayıcı alanlar, *D* ise onların arasında kalan paralelkenardır:



2 Bu önerme, *a* birinci hat ve *b*, *c*, *d*, … ikinci hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

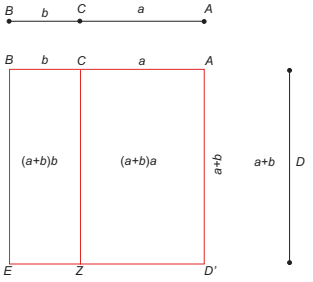
$$a.(b + c + d + \dots) = a.b + a.c + a.d + \dots$$



Şekil 1

***II. Önerme*: Her hattın karesi, o hat kısımlarına ilişkin alanların toplamına eşittir.**[1]

Açıklama: Örneğin *AB* hattı *AC* ve *CB* kısımlarından oluştuğunda $AB^2 = (AC \times CZ) + (BC \times CZ)$ yazılabilir (*Şekil 2*).



Şekil 2

Kanıtı: *AB* hattı üzerine *ABE'* karesini ve *AD'* hattına paralel *CZ* hattını çekelim. Bu durumda S(*ABED'*) = [S(*ACZD'*) + S(*CBEZ*)] = [*AB* × (*AC* + *CB*)] = [(*AB* × *AC*) + (*AB* × *CB*)] ya da kanıtlamak istediğimiz gibi AB^2 = [(*AB* × *AC*) + (*AB* × *CB*)] olduğu görülür.

Not: Bu önermenin bir diğer kanıtlama yolu; *AD* hattı *AB* hattına eşittir. Yukarıda gösterildiği gibi (*D* × *AB*) = [*D* × (*AC* + *CB*)] ya da AB^2 = [(*AB* × *AC*) + (*AB* × *CB*)] yazılabilir.

***III. Önerme*: Bir hattın kısmıyla çarpımı, kısmın karesiyle kısımların çarpımı toplamına eşittir.**[2]

---

1 Bu önerme, *a* ve *b* hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) = [(a + b).a] + [(a + b).b].$$

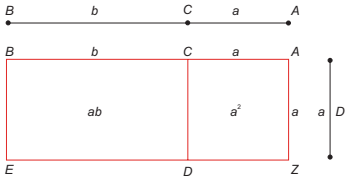
2 Bu önerme, *a* ve *b* hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$(a + b).a = a^2 + ab.$$

Açıklama: $(AB \times BC) = [BC^2 + (AC \times CB)]$ (*Şekil 3*).

Kanıtı: *BC* üzerine *BCDE* karesini ve sonra *ACDZ* dörtgenini kuralım. Böylece *AZ* yani *CD* = *AC* olur ve $S(ABEZ) = (AB \times AZ) = S(ACZD) + S(CBED) = [AC^2 + (BC \times AC)]$ ile kanıtlamak istediğimiz sonuca erişmiş oluruz.

Not: Bu önermenin bir diğer kanıtlama yolu: *D* = *CB* olsun. Bu durumda $(D \times AB) = (AB \times BC) = [D \times (AC + CB)]$ ya da $(AB \times AC) = [AC \times (AC + BC)] = [AC^2 + (BC \times AC)]$ olduğu görülür.



Şekil 3

***IV. Önerme*: İki kısımlı bir hattın karesi, kısım karelerinin toplamıyla kısımlar çarpımının iki katı toplamına eşittir.**[1]

Açıklama: Örneğin *AB* hattı bir *C* noktasıyla *AC* ve *CB* kısımlarına bölünmüştür (*Şekil 4*). Bu durumda $AB^2 = [AC^2 + BC^2 + 2.(AC \times BC)]$ ilişkisi geçerlidir.

Kanıtı: *ABED* karesini, *AD* hattına paralel *CZ* hattını ve *BD* köşegenini çizelim. *BD* köşegeni *CZ* hattını *H* noktasında keser. *D* noktasından *BA* hattına paralel *YT* hattı çizilir. *BAD* üçgeninde *BA* = *AD* olduğundan $\angle(CHB) = \angle(ADB)$ ve $\angle(ADB) = \angle(ABD)$ olur. Şu halde $\angle(CHB) = \angle(ABD)$ ya da *BC* = *CH* yazılabilir.

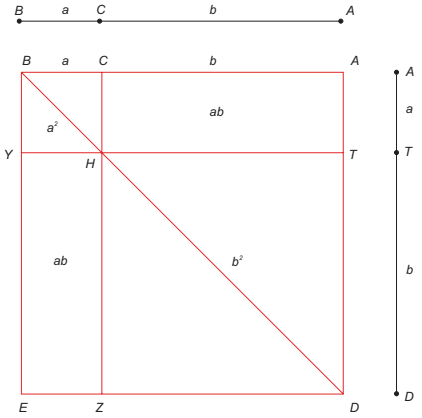
Bunu başka yolla da kanıtlayabiliriz: *ADB* üçgeninde *AB* = *AD*, *A* açısı dik olduğundan $\angle(ABD) = \angle(ADB) = 45°$. Aynı şekilde *A* ve *BCH* açıları da eşit olduğundan *BCH* üçgeninde *CDH* açısı da 45°'dir. Neticede *BC* = *CH* = *BY* ve tüm açılar dik olduğundan *BCHY* bir karedir. Aynı yolla *HTDZ* dörtgenin de kare olduğu gösterilebilir. Buna göre $S(BCHY) = BC^2$,

1 Bu önerme, *a* ve *b* hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

S(*HTDZ*) = CA^2 ve S(*ATHC*) = (*AC* × *CH*), S(*YHZE*) = (*YE* × *YH*) ve S(*ATHE*) ya da kanıtlamak istediğimiz gibi AB^2 = [AC^2 + BC^2 + 2(*AC* × *BC*)] olduğu görülür.

Anlaşılacağı gibi köşegen üzerindeki paralelkenarlar birer karedir. Aksine bir kare kenarı kısımlarından oluşan kareler söz konusu karenin içine yerleştirilmeye çalışılırlarsa karenin köşegeni üzerine gelirler.



Şekil 4

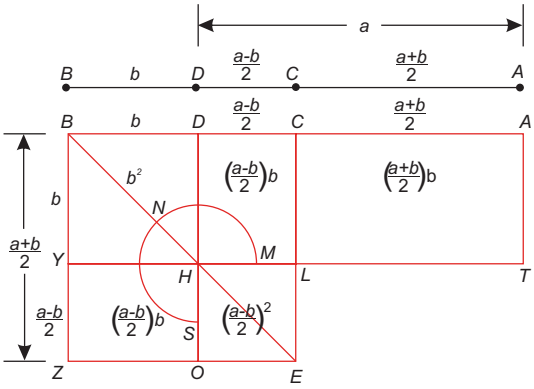
Not: Bu önermenin bir diğer kanıtlama yolu: (*AB* × *BC*) = [(*AC* + *BC*)×-*BC*] = [(*BC* × *AC*) + BC^2], (*AB* × *AC*) = [(*AC* + *BC*) × *AC*] = [AC^2 + (*AC* × *BC*)] ve AB^2 = [*AB* × (*AC* × *BC*)] olduğundan AB^2 = [*AB* × (*AC* + *BC*)] = [(*AB* × *AC*) + (*AB* × *BC*)] = [AC^2 + BC^2 + 2(*AC* × *BC*)] bulunur.

***V. Önerme*: Bir hat hem eşit hem de eşit olmayan iki kısma bölünür. Eşit olmayan kısımların çarpımı ile eşit olmayan iki kısmın uzun olanından eşit olan kısım çıkarıldığında ortaya çıkan farkın karesinin toplamı, eşit kısmın karesine eşittir.**[1]

Açıklama: *AB* hattının *C* noktasında *AC*, *BC* iki eşit kısma ve *D* noktasında eşit olmayan *AD* ve *DB* kısma bölündüğünü varsayalım (*Şekil 5*). Burada kanıtlanması istenen: (*AD* × *DB*) + CD^2 = CB^2 ilişkisidir.

1 Bu önerme, *a* hattın eşit, *b* eşit olmayan şekilde bölünen kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$a.b + [(a - b)/2]^2 = [(a + b)/2]^2.$$



Şekil 5

Kanıtı: *CB* ve *DB* hatları üzerine *BCEZ* ve *BDHY* karelerini kuralım. *BE* köşegenini çizelim, *DH* ve *YH* hatlarını *O* ve *T* noktalarına kadar uzatalım. *A* ve *T* noktaları birleştirildiğinde S(*YHOZ*) = S(*DCLH*) olur bu eşitliğin her iki tarafına S(*BDHY*) ilave edilirse S(*BDOZ*) = S(*BCLY*) ya da S(*BDOZ*) = S(*CATL*) olur. Bu eşitliğin her iki tarafına S(*DCLH*) ilave edilirse gnomon alanı G(*SNM*) elde edilir: G(*SNM*) = [S(*BDOZ*) + S(*DCLH*)] = [S(*CATL*) + S(*DCLH*)] = S(*ADHT*). Eşitliğin her iki tarafına ayrıca S(*HLEO*) ilave edilirse: [S(*ADHT*) + S(*HLEO*)] = [S(*DCLH*) + S(*DCLH*) + S(*BDHY*) + S(*HLEO*)] elde edilir. Burada S(*ADHT*) = (*AD* × *DB*), S(*HLEO*) = CD^2 ve [S(*DCLH*) + S(*DCLH*) + S(*BDHY*) + S(*HLEO*)] = CB^2 = AC^2 olduğundan [(*AD* × *DB*) + CD^2] = AC^2 ilişkisi kanıtlanmış olur.

Not: Bu önermenin bir diğer kanıtlama yolu: (*AD* × *DB*) = [(*AC* × *DB*) + (*DC* × *DB*)] = [(*BC* × *DB*) + (*DC* × *DB*)]. Eşitliğin her iki tarafına CD^2 ilave edilirse [(*AD* × *DB*) + CD^2] = [(*BC* × *DB*) + (*DC* × *DB*) + CD^2] = CB^2 olduğundan [(*AD* × *DB*) + CD^2] = AC^2 bulunur.

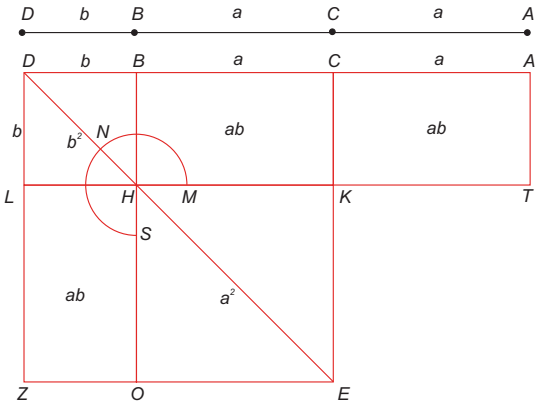
***VI. Önerme*: Bir hat yarıya bölünür ve sonra ona aynı yönde başka bir hat ilave edilir. Bu durumda eğer önceki ve ilave edilen hattın toplamı ilave hatla çarpılır ve buna ilk yarı hattın karesi ilave edilirse, yarı hat ile ilave edilen hat toplamının karesi elde edilir.**[1]

1 Bu önerme, ilk hat 2*a*, ilave edilen hat *b* ise, şu anlama gelir:

$$(2a + b).b + a^2 = (a + b)^2.$$

Açıklama: *AB* hattı *C* noktasında ikiye bölünür ve ona aynı yönde *DB* hattı ilave edilir (*Şekil 6*). [(*AD* × *DB*) + BC^2] = CD^2 olduğu kanıtlanmalıdır.

Kanıtı: *CD* ve *DB* hattı üzerine *CDZE* ve *BDLH* kareleri kurulur, *AT* ve *KT* hatları çekilir. Buna göre S(*LHOZ*) = S(*BCKH*) = S(*CATK*) olduğundan gnomon alanı G(*SNM*) = [S(*LHOZ*) + S(*CATK*)] = [S(*CATK*) + S(*BCKH*)] = S(*ADLT*) ya da [G(*SNM*) + S(*HKEO*)] = [S(*ADLT*) + S(*HKEO*)] = S(*DCEZ*) = CD^2 yazılabilir. Ayrıca G(*SNM*) = (*AD* × *DB*) ve S(*HKEO*) = BC^2 olduğundan (*AD* × *DB*) + BC^2 = CD^2 kanıtlanmış olur.



Şekil 6

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir diğer yolu: (*AD* × *DB*) = [(*AB* × *DB*) + BD^2] = [(2.*BC* × *DB*) + BD^2] ya da her iki tarafa CB^2 ilave edilirse [(*AD* × *DB*) + CB^2] = [(2.*BC* × *DB*) + BD^2 + CB^2] = CD^2 olduğundan kanıtlamamız gereken [(*AD* × *DB*) + BC^2] = CD^2 bulunur.

Bu ve bundan önceki önerme aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir. Verilmiş olan bir *AB* hattı *C* noktasında ikiye bölünüp *B* noktasının iki tarafından, *V. Önerme* için *C* noktasına doğru, *VI. Önerme* için aksi yönde *BD* hattını eklediğimizi ya da ayırdığımızı varsayalım. Bu durumda aşağıdaki iki eşitlik geçerlidir:

CB^2 = [(*AD* × *DB*) + CD^2] (*V. Önerme*),

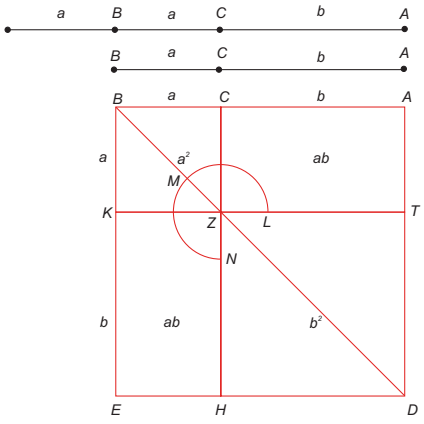
[CB^2 + (*AD* × *DB*)] = CD^2 (*VI. Önerme*).

***VII. Önerme*: Bir hattın karesiyle o hattın iki kısmından birisinin karesinin toplamından çıkan sonuç, hattın söz konusu kısımla çarpımının iki katı ile diğer kısmın karesinin toplamına eşittir.**[1]

Açıklama: $(AB^2 + BC^2) = [2.(AB \times BC) + AC^2]$ (*Şekil 7*).

Kanıtı: *AB* hattı üzerine *ABED* karesi kurulur, *BC* hattına eşit olan *BK* hattı ayrılır ve *CBKZ* karesi oluşturulur, *KZT* ve *CZH* hatları çizilir. Bu durumda S(*ACZT*) = [S(*KZHE*), S(*ACZT*) + S(*BCZK*) = S(*KZHE*) + S(*BCZK*)], S(*ABKT*) = S(*BCHE*), [S(*ABKT*) + S(*BCHE*)] = [G(*NML*) + S(*BCHE*)] = 2.S(*ABKT*) ya da [G(*NML*) + S(*BCHE*) + S(*ZTDH*)] = [2.S(*ABKT*) + S(*ZTDH*)] yazılabilir. Başka deyişle $(AB^2 + BC^2) = [2.(AB \times BC) + AC^2]$ geçerlidir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha bulunur: $AB^2 = [AC^2 + BC^2 + 2.(AB \times BC)]$, her iki tarafa BC^2 eklenirse $(AB^2 + BC^2) = [AC^2 + 2.BC^2 + 2.(AB \times BC)]$, ayrıca $[BC^2 + (AC \times BC)] = (AB \times BC)$ olduğundan $(AB^2 + BC^2) = [AC^2 + 2.(AB \times BC)]$ bulunur.



Şekil 7

Dördüncü önerme ve bu önerme tek bir şekilde ifade edilebilir. Eğer *AB* hattının *B* noktasında her iki yönde *BC* hattı ayrılırsa eşitlik doğruluğunu korur. *IV. Önerme*'ye ilişkin $AB^2 = [AC^2 + BC^2 + 2.(AC \times BC)]$ ilişkisi

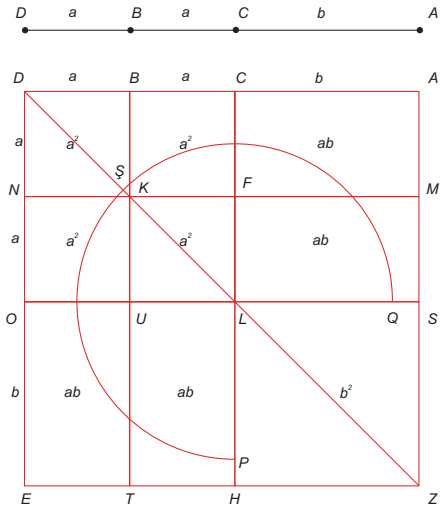
1 Bu önerme, *a* ve *b* hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$(a + b)^2 + a^2 = 2.(a + b).a + b^2.$$

$(AC^2 + BC^2) = [AB^2 - 2.(AC \times BC)]$ şeklinde yazılır ve $BC = -CB$ ve eşitlikte *B* ile *C* harflerinin yerleri değiştirilirse *VII. Önerme*'ye ilişkin $(AB^2 + BC^2) = [AC^2 + 2.(AB \times BC)]$ ilişkisi elde edilir.

***VIII. Önerme*: Bir hattın bir kısmıyla çarpımının dört katının, diğer kısmının karesiyle toplamından çıkan sonuç hattın ilk kısımla toplamının karesine eşittir.**[1]

Açıklama: Eğer verilen hat *AB*, onun kısmı *BC* ve arttırılan kısım *BD* ise $(BD = BC = a)$, bu durumda kanıtlanması istenen ilişki $[4.(AB \times BC) + AC^2] = AD^2$ şeklindedir (*Şekil 8*).



Şekil 8

Kanıtı: *AD* hattı üzerine *ADEZ* karesini kurup, *DZ* köşegenini çekelim. *AZ* hattına paralel *CH* ve *BT* hatlarını çizelim. Bu iki paralel *DZ* köşegenini *K* ve *L* noktalarında keser. Aynı şekilde *AD* hattına paralel *MN* ve *SO* hatlarını çekelim. *CB* = *BD* olduğundan bunun sonucunda elde edilen *DBKN*, *BCFK*, *NKUO* ve *KFLU* alanları kareseldir. Bu durumda $BD^2 = S(DBKN)$, $CB^2 = S(BCFK)$ vs. olduğundan, neticede bu dört karenin toplamı $4.S(DBŞN)$'ye eşittir.

1 Bu önerme, *a* ve *b* hattın kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$4.(a + b).a + b^2 = [(a + b) + a]^2.$$

Aynı şekilde S(*ULHT*) = S(*A'C"TH*) = S(*F'F"C'L*) = S(*ACF'F"*) yazılabilir. Ayrıca *AM* = *MS* olduğundan S(*ACLC'*) = S(*OUTE*) = S(*CAMF*) = S(*FMSL*) geçerlidir. Buna göre S(*ABŞM*) = (*AB* ×*BC*) olduğundan S(*ADEZ*) = [4.S(*ABŞM*) + S(*SLHZ*)] ya da AD^2 = [4.(*AB* × *BC*) + AC^2] olur.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha bulunur: (*AB* × *BC*) = [(*AC* × *BC*) + BC^2] geçerlidir. Ancak koşul gereği *BD* = *BC* olduğundan, *BC* = ½*CD* ya da 4.BC^2 = CD^2 ve 4.(*AC* × *BC*) = 2. (*AC* × *CD*) yazılabilir. Şu halde 4.(*AB* × *BC*) = [4.(*AC* × *BC*) + 4.BC^2] = [2. (*AC* × *CD*) + CD^2] neticede [4.(*AB* × *BC*) +AC^2] = [2. (*AC* × *CD*) + CD^2 +AC^2] = AD^2 elde edilir.

***IX. Önerme*: Bir hat eşit ve eşit olmayan iki kısma bölünür. Eşit olmayan kısımların kareleri toplamı, hattın yarısının karesi ile eşit olmayan iki kısmın uzun olanından hattın yarısının çıkarılmasıyla ortaya çıkan farkın karesinin toplamına eşittir.**[1]

Açıklama: Verilen *AB* hattı *C* noktasında iki eşit kısma ve *D* noktasında iki eşit olmayan kısma bölünmüştür (*Şekil 9*). Aşağıdaki ilişki kanıtlanmalıdır:

(AD^2 + DB^2) = 2.(AC^2 + DC^2).

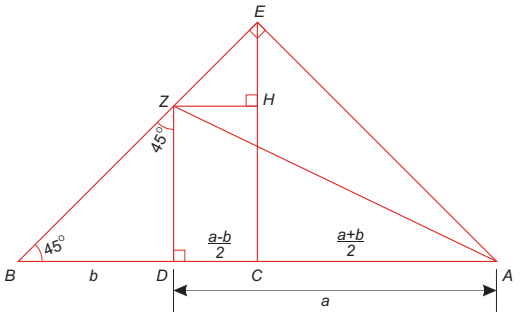
Kanıtı: *C* noktasından *AC* hattına eşit ve dik olan *CE* hattı çekilir. *E* noktası *A* ve *B* noktalarıyla birleştirilir. Sonra *D* noktasından *EC* hattına paralel *DZ* hattı çekilir. *Z* noktasından ise *DC* hattına paralel *ZH* hattı çekilir. Bundan sonra *Z* ve *A* noktaları *ZA* hattıyla birleştirilir. Bu durumda *CB* = *EC* = *CA* ve ∠(*BEC*) = ∠(*CEA*) olduğundan Δ(*BCE*) = Δ(*ECA*) ikizkenar üçgenlerdir.

BDZ üçgeninde ∠(*BDZ*) = 90°, ∠(*ZBD*) = 45° olduğundan ∠(*BZD*) = 45° ve neticede *BD* = *DZ* olur. Benzer şekilde *EZH* dik üçgeninde *EH* = *HZ* olduğundan ZE^2 = 2.ZH^2 = 2.DC^2,ayrıca *AEC* dik üçgeninde *AC* = *CE* olduğundan, ZA^2 = (ZE^2 + EA^2) = (2.DC^2 + 2.AC^2) = 2.(AC^2 + DC^2) ve *ZDA* dik üçgeninde ZA^2 = (ZD^2 + AD^2) = (AD^2 + DB^2) yazılabilir. Neticede kanıtlamak istediğimiz (AD^2 + DB^2) =2.(AC^2 + DC^2) sonucuna ulaşmış oluruz.

---

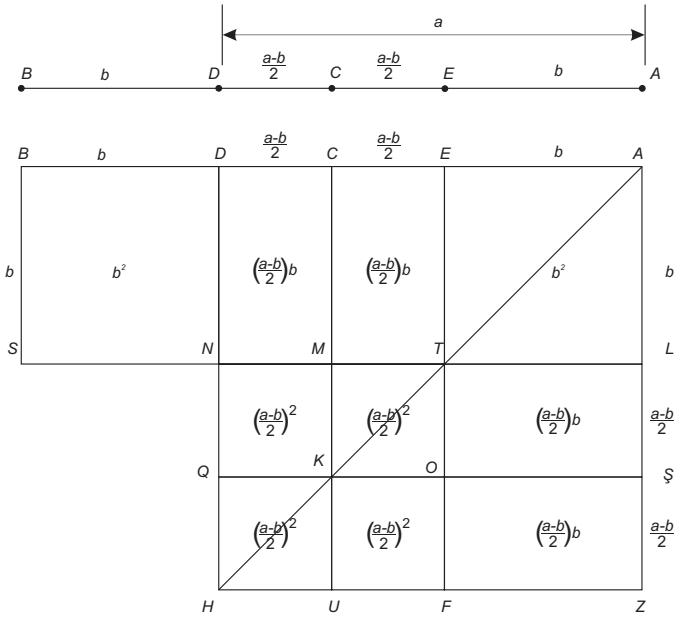
1 Bu önerme, *a* ve *b* hattın eşit olmayan kısımları olmak üzere, cebirsel şu anlama gelir:

$$a^2 + b^2 = 2.\{[(a + b)/2]^2 + [(a + b)/2 - b]^2\} = 2.\{[(a + b)/2]^2 + [(a - b)/2]^2\}.$$



Şekil 9

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha bulunur: *AD* ve *BD* hatları üzerinde *DAZH* ve *BDNS* kareleri kurulur (*Şekil 10*). *AD* hattı üzerinde *DC* hattına eşit *CE* hattı ayrılır ve *AH* köşegeni çekilir. *SN* hattı *L* noktasına kadar uzatılır. *AZ* hattına paralel *EF* ve *CU* hatları çekilir. *AH* ve *CU* hatlarının kesiştiği *K* noktasından *AB* hattına paralel *QŞ* hattı çekilir.



Şekil 10

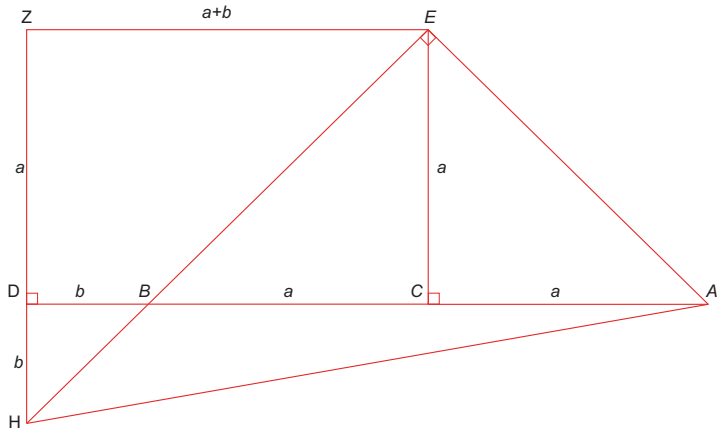
EALT ve *BDNS* karelerinin eşit olduğu açıktır. Aynı şekilde S(*DCMN*) = S(*CETM*) = S(*TLŞO*) = S(*OŞZF*) dikdörtgenleri ve S(*NMKQ*) = S(*MTOK*) = S(*QKUH*) = S(*KOFU*) kareleri eşittir. Buna göre *Şekil 10*'da

5 alanı kaplayan [S(*QKUH*) + S(*CAŞK*)] = (AC^2 + CD^2) ve tüm 10 alanı kaplayan [S(*BDNS*) + S(*DAZH*)] = (BD^2 + AD^2) şeklinde yazılabilir. İlk 5 alan geri kalan 5 alana eşit olduğundan (AD^2 + DB^2) = 2.(AC^2 + DC^2) ilişkisi geçerlidir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha bulunur (*Şekil 10* üzerindeki *AB* hattına bakınız). *AB* hattı üzerinde *DC* hattına eşit *CE* kısmı ayrılır. Bu durumda *VII. Öneri* gereği (AC^2 + CE^2) = [2.(*AC* × *CE*) + AE^2] yazılabilir. Ancak *CE* = *DC* ve *AE* = *BD* olduğundan (AC^2 + DC^2) = [2.(*AC* × *DC*) + BD^2] ilişkisi geçerlidir. Her iki tarafa (AC^2 + DC^2) ilave edersek 2.(AC^2 + DC^2) = [2.(*AC* × *DC*) + BD^2 + AC^2 + DC^2] = (AD^2 + BD^2) olacağından önermeyi kanıtlamış oluruz.

***X. Önerme*: Bir hat yarıya bölünür ucuna başka bir hat ilave edilir. Hatla ilavenin toplamı karesine ilavenin karesi ilave edilirse, bu büyüklük hat yarısının karesi ile hat yarısı ve ilavenin toplamları karesi toplamının iki katına eşittir.**[1]

Açıklama: *AB* hattı *C* noktasında ikiye bölünmüş ve buna *DB* hattı ilave edilmiştir (*Şekil 11*). Kanıtlanması istenen ilişki: (AD^2 + BD^2) = 2.(AC^2 + CD^2).



Şekil 11

Kanıtı: *C* noktasından *AC* hattına eşit ve *AB* hattına dik *CE* hattı çekilir. Bundan sonra *EA* ve *EB* hatları, *D* noktasından *DC* hattına dik *DZ* ve *E* noktasından *DC* hattına paralel *EZ* hatları çekilir. Bu iki hat *Z* noktasında kesişir.

1 Bu önerme, *a* hattın yarısını ve *b* ilave edilen hattı ifade etmek üzere, cebirsel şu anlama gelir:

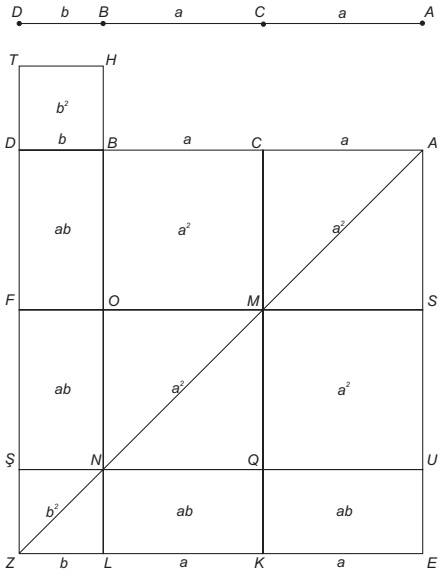
$$(2a + b)^2 + b^2 = 2.[a^2 + (a + b)^2].$$

CEZ ve *DZE* açılarının toplamı 180° olduğundan *DZE* ve *ZEB* açılarının toplamı iki dik açıdan küçüktür. *EB* ve *ZD* hatları *H* noktasında kesişinceye kadar uzatılır. $\angle(BEA) = [\angle(BEC) + \angle(CEA)]$ ve *ECA* ve *ECB* ikizkenar üçgenlerinde $BC = CA = CE$ ve *ECA*, *ECB* açıları dik, $\angle(EBC) = \angle(EAC) = \angle(BEC) = \angle(CEA) = 45°$ ve *BEA* açısı diktir.

Benzer şekilde *EZH* dik üçgeninde *EZH* dik açı ve $\angle(ZEH) = \angle(ZHE) = 45°$ olduğundan $ZH = ZE$ ve aynı nedenden dolayı *FDH* üçgeninde de $DH = DB$ geçerlidir.

AEC ikizkenar dik üçgeninde $EC = AC$ olduğundan $AE^2 = 2.AC^2$, *ZEH* ikizkenar dik üçgeninde $ZE = ZH$ olduğundan $EH^2 = 2.ZE^2$ ya da $EH^2 = 2.CD^2$ yazılabilir. Böylece kanıtlamamız gereken $2.(AC^2 + CD^2) = (AE^2 + EH^2) = AH^2 = (AD^2 + DH^2) = (AD^2 + BD^2)$ sonucuna ulaşmış oluruz.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. *AD* ve *DB* üzerinde *ADZE* ve *DBHT* kareleri kurulur ve *AZ* köşegeni çekilir (*Şekil 12*). *C* ve *B* noktalarından *AE* hattına paralel *CK* ve *BL* hatları çizilir, *AZ* köşegeninin *CK* ve *BL* hatlarıyla kesiştiği *M* ve *N* noktalarından *AD* hattına paralel *FS* ve *ŞU* hatları çekilir.



Şekil 12

THBD ve *ŞNLZ* karelerinin, *DBOF*, *FONŞ*, *NQKL* ve *QUEK* dikdörtgenlerinin eşit olduğu açıktır. *Şekil 12*'de 5 dikdörtgeni kapsayan [S(*FMKZ*) + S(*CASM*)] = (CD^2 + AC^2) alanı geriye kalan 5 dikdörtgenin alanına eşittir. Buna göre 10 dikdörtgenin alanı [S(*THBD*) + S(*ADZE*)] = (AD^2 + BD^2) olduğundan neticede (AD^2 + BD^2) = 2.(AC^2 + CD^2) bulunur.

Başka bir kanıtlama yolu: [2.(*CB* ×*CD*) + BD^2] = (CB^2 + CD^2) ya da *CB* = *AC* olduğundan [2.(*AC* ×*CD*) + BD^2] = (AC^2 + CD^2). Her iki tarafa (AC^2 + CD^2) ilave edilirse [2.(*AC* ×*CD*) + BD^2 AC^2 + CD^2] = 2(AC^2 + CD^2) ya da (AD^2 + BD^2) = 2.(AC^2 + CD^2) bulunur.

Bu öneri ilerdeki öneriyle genelleştirilebilir. *C* noktasıyla yarıya bölünen *AB* hattı *B* noktasının iki yönüne doğru *DB* hattı kadar uzatılırsa, bu durumda (AD^2 + BD^2) = 2.(AC^2 + CD^2) ilişkisi geçerlidir.

***XI. Önerme*: Bir hat öyle ikiye ayrılmak istenmektedir ki, hattın parçalardan biriyle çarpımı diğer parçanın karesine eşit olsun.**[1]

AB hattı üzerine *ABDC* karesi oluşturulur ve *AC* hattı *E* noktasında yarıya bölünür (*Şekil 13*). Sonra *BE* hattı çekilir ve *BE* hattına eşit *EZ* hattı çizilir. *ZA* üzerine *ZATH* karesi kurulur. Bu durumda *HTK* hattı *AB* hattını isteğimize uygun olarak bölmüştür.

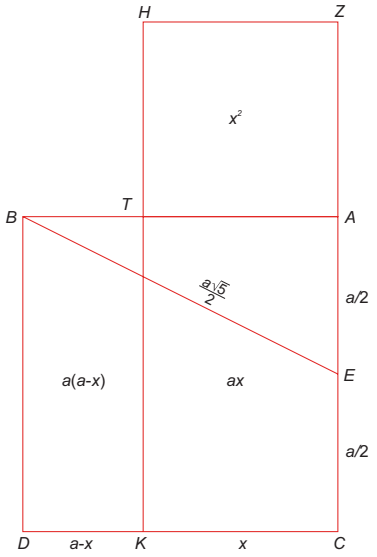
HTK hattı *AB* hattını kesmelidir, çünkü *BE* < (*BA* +*AE*) ya da *ZE* < (*BA* +*AE*) ve *ZE* = (*ZA* + *AE*) olduğundan (*ZA* + *AE*) < (*BA* + *AE*) ya da *ZA* < *AE*.

Buna göre, EZ^2 ve [(*CZ* × *AZ*) + AE^2] alanlarının eşitliği ve *BAE* dik üçgeni nedeniyle], [(*CZ* × *AZ*) + AE^2] = EZ^2 = (AE^2 + BA^2) ya da (her iki taraftan AE^2 silinirse), (*CZ* × *AZ*) = (*CZ* × *ZH*) = AB^2 olduğu görülür. Burada (*CZ* × *ZH*) = S(*HZCK*) olduğuna göre S(*HZCK*) = S(*BACD*) anlamına gelir. Şu halde müşterek alanlar nedeniyle S(*HZAT*) = S(*BTKD*) diğer bir deyişle S(*HZAT*) = AT^2 = (*BT* × *AC*) = (*BT* × *AB*) ya da kanıtlamak istediğimiz AT^2 = (*BT* × *AB*) sonucuna ulaşmış oluruz.[2]

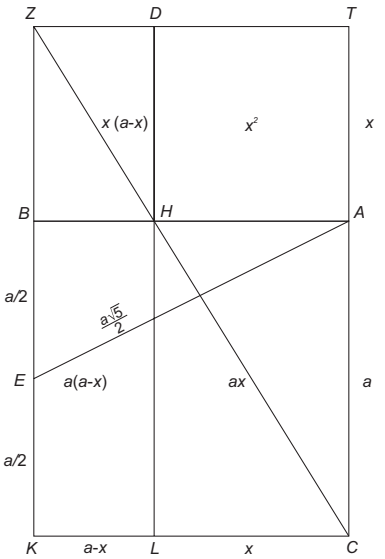
---

1 Bu önerme, eğer *a* hattın boyunu, *x* ve (*a* - *x*) hattın iki parçasını ifade ederse, cebirsel olarak *a*(*a* - *x*) = x^2 ya da x^2 + *a*.*x* - a^2 = 0 denklemi anlamına gelir. Denklemin çözümü *x* = - *a* (1 - $\sqrt{5}$)/2 şeklindedir.

2 Diğer önermelerden farklı olarak burada alanlar eşitliğinin sadece verilen *a* hat uzunluğuna bağlı belirli bir *x* = - *a* (1 - $\sqrt{5}$)/2 değeri için geçerli olduğunu unutmamak gerekir.



Şekil 13



Şekil 14

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Verilen *AB* hattı üzerinde *ABKC* karesi kurulur, *BK* hattı *E* noktasında yarıya bölünür ve *EA* hattı çekilir (*Şekil 14*). Sonra *EB* hattı üzerinde *EA* hattına eşit *EZ* hattı uzatılır ve *ZC* hattı çizilir. Böylece *AB* hattı *T* noktasında istediğimiz oranda bölünmüş olur.

Daha sonra *Z* noktasında *AB* hattına *ZT* paraleli çekilir ve *CA* hattı *ZT* hattını kesinceye kadar uzatılır. *H* noktasından *BK* hattına *DL* paraleli çekilir. Elde edilen şekille bir önceki *Şekil 13* arasında hiçbir fark yoktur. Burada benzer bir mantık yürütülürse yine $AH^2 = (BH \times AB)$ sonucuna ulaşılır.

***XII. Önerme*: Herhangi bir geniş açılı üçgende, geniş açının karşısındaki kenarın karesi, diğer kenarların kareleri toplamından, tabanla geniş kenarın tabana izdüşümü farkı çarpımının iki katı kadar fazladır.**

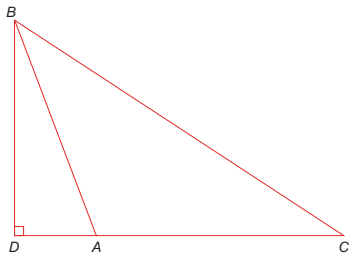
Kanıtı: *ABC* üçgeninin *A* aşısı bir geniş açıdır. Kanıtlamamız gereken ilişki şudur (*Şekil 15*):

$BC^2 = [AB^2 + AC^2 + 2.(AC \times AD)]$.

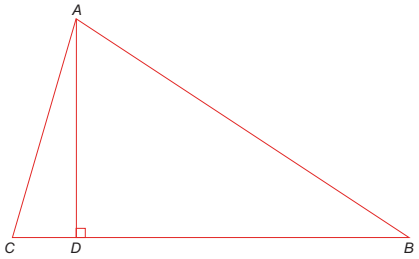
Üçgenin *B* noktasından *CA* devamına *BD* diki inilir. *D* noktası *CA* hattının *A* noktası tarafındaki devamına düşmelidir. Eğer böyle olmayıp *D*

noktası üstüne veya *CA* hattı üstüne ya da *CA* hattının *C* tarafındaki devamı üzerine düşmüş olsaydı, bu durumda *ABF* üçgeni hem dik ve hem de geniş açılı olması gerekirdi. Bu ise mümkün değildir.

CD hattı *A* noktasında bölündüğüne göre şu ilişki yazılabilir: $CD^2 = (AD + AC)^2 = [AD^2 + AC^2 + 2.(AC \times AD)]$ ya da $(CD^2 + BC^2) = [AD^2 + AC^2 + 2.(AC \times AD) + BC^2]$ ve $CD^2 = (AD^2 + AC^2)$ olduğundan neticede kanıtlamamız gereken ilişkiye ulaşırız: $BC^2 = [AB^2 + AC^2 + 2.(AC \times AD)]$.



Şekil 15



Şekil 16

***XIII. Önerme*: Herhangi bir üçgende dar açı karşısında duran kenarın karesi, diğer kenarların kareleri toplamından, tabanla söz konusu kenarın tabana izdüşüm fazlası çarpımının iki katı kadar küçüktür.**

Kanıtı: Verilen *ABC* üçgeninin *B* aşısı bir dar açıdır. *A* noktasından tabana *AD* diki inilir. Bu dik *BC* hattını *B* ve *C* noktaları arasında kesmelidir. Aksi halde *AB*, *AD* ve CB devamında oluşacak olan üçgen hem dik ve hem de geniş açılı olur. Kanıtlamamız gereken ilişki şudur (*Şekil 16*):

$AC^2 = [AB^2 + BC^2 - 2.(BC \times BD)]$.

BC hattı *D* noktasında bölündüğü için şu ilişki yazılabilir: $CB^2 = (CD + DB)^2 = [CD^2 + DB^2 + 2.(CD \times DB)]$ veya bu ilişki geliştirilirse $(CB^2 + BD^2) = \{CD^2 + AD^2 - AD^2 + 2.DB^2 + 2.[(CB - DB) \times DB]\}$ ya da $(CB^2 + DB^2) = \{AC^2 - AD^2 + 2.[(CB \times BD]\}$ yazılabilir. Ancak $AB^2 = (BD^2 + AD^2)$ olduğundan son ilişki düzenlenirse kanıtlamamız gereken: $AC^2 = [AB^2 + BC^2 - 2.(BC \times BD)]$ ilişkisine ulaşırız.

Not: Bu önermenin kanıtlanmasında çeşitli durumlarla karşılaşılabilinir:

1- Eğer *C* açısı bir dik açıysa, tabana indirilen dik üçgenin *AC* kenarıyla çakışır. Bu durumda tabanla izdüşüm aynı hatta dönüşür.

2- Eğer *C* açısı dik açıdan büyükse bu durumda tabana inilen dik *BC* hattının *C* noktası tarafındaki devamı üzerine düşer. Bu durumda izdüşüm tabandan büyük olur.

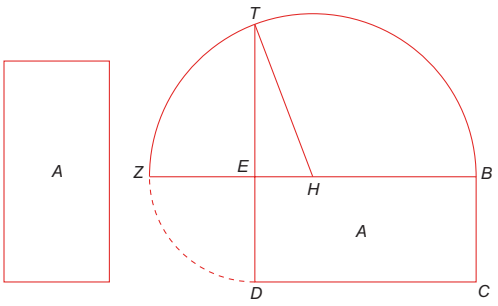
3- Eğer *C* açısı dik açıdan küçükse bu durumda tabana inilen dik *BC* hattının üzerine düşer. *Şekil 16*'da resmedilen durum buna ilişkindir.

XII ve *XIII. Önerme*ler birleştirilerek şu şekilde ifade edilebilir ve kanıtlanabilir:

Herhangi bir üçgende dik açı olmayan açının karşısındaki kenarın karesi ile diğer kenarların kareleri toplamı arasındaki fark, tabanla söz konusu kenarın tabana izdüşüm fazlası çarpımının iki katına eşittir.

***XIV. Önerme*: Bir çokgen alanına eşit karenin elde edilmesi.**

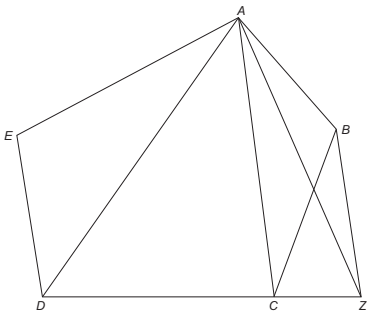
İlkin verilen çokgenin *A* alanına eşit olan bir *BCDE* dörtgeni oluşturulur (*Şekil 17*). Eğer bu alan bir kareyse önerme kanıtlanmış olur. Aksi halde *BE* hattı *EZ* = *ED* olacak şekilde *Z* noktasına kadar uzatılır. Çapı *ZB* ve merkezi *H* olan bir *ZTB* yarı dairesi çizilir ve *DE* hattı *T* noktasına kadar uzatılır. *TH* hattı aradığımız karenin kenarıdır. Çünkü *BZ* hattı *H* noktasında yarıya ve *E* noktasında eşit olmayan iki kısma bölündüğünden *III. Önerme* gereği $(BE \times EZ) + EH^2 = HB^2$ olmalıdır. Ancak $HB^2 = HT^2 = (TE^2 + EH^2)$ olduğundan $(BE \times EZ) = TE^2$ diğer bir deyişle aranan $A = S(BCDE) = TE^2$ sonucuna ulaşılmış olur.



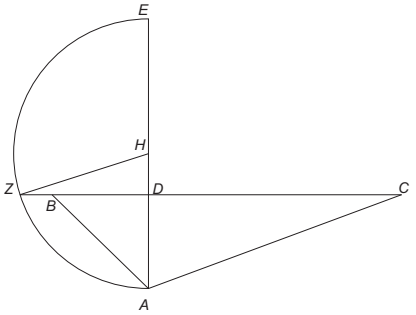
Şekil 17

Not: Kitabın eski nüshalarında verilen şeklin bir üçgen olduğu varsayılır. Bu durumda öncelikle verilen bir *ABCDE* çokgen alanına eşit bir üçgenin

nasıl elde edileceğini göstermek gerekir. Bunun için *ABCDE* çokgeni *ABC*, *ACD* ve *ADE* üçgenlerine ayrılır (*Şekil 18*). İlkin [S(*ABC*) + S(*ACD*)] alanına eşit bir üçgenin nasıl elde edileceğini gösterelim. Bunun için *DC* hattı uzatılır ve *B* noktasından *AC* hattına *BZ* paraleli çekilir. Bu paralel hat *DC* hattının devamını *Z* noktasında keser. *AC* tabanı müşterek ve *AC* // *BZ* olduğundan S(*ABC*) = S(*AZC*) olduğundan S(*AZD*) = [S(*AZC*) + S(*ABC*)] olur. Aynı yöntem uygulanarak alanı [S(*AED*) + S(*ADZ*)] olan bir üçgen oluşturulur. Neticede *ABCDE* çokgen alanına eşit yeni bir *ABC* üçgeni elde edilmiş olur. Amaç bu üçgen alanına eşit bir kare elde etmektir.



Şekil 18



Şekil 19

Bunun için *ABC* üçgeninin *A* noktasından *BC* kenarına *AD* diki inilir (*Şekil 19*). Bu hat *D* noktasında *ED* = *BC*/2 kadar uzatılarak *E* noktası belirlenir. Çapı *AE* olan *AZE* yarı dairesi çizilir. Bu daire *CB* hattının devamını *Z* noktasında keser. *ZD* hattı aradığımız karenin kenarıdır. Çünkü: ZD^2 = (*AD* × *DE*) = (*AD* × *BC*/2) = S(*ABC*) ilişkisi önermenin doğruluğunu kanıtlar.

İkinci makalenin sonu.

ÜÇÜNCÜ MAKALE

Bu makale 35 önermeden oluşur.

Sâbit nüshasında bundan bir fazla önerme bulunur. Bu da makalenin sonunda yer alır.

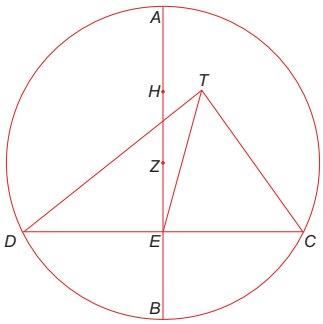
TANIMLAR

1- Çapları ya da yarıçapları eşit olan daireler eşittir.
2- *Daireye teğet doğru* daireyle temas eder, ancak doğru ne yöne uzatılırsa uzatılsın daireyi kesmez.
3- *Teğet daireler* birbirleriyle temas eder, lakin kesişmez.
4- Bir daireye eşit mesafedeki doğrularda merkezden inilen dikler eşittir.
5- Daireye en uzak doğru en büyük dike sahip olandır.
6- *Kesek*; bir dairede bir yayla bunu sınırlayan kiriş arasındaki daire parçasıdır.
7- *Kesek açısı*; daire keseğini sınırlayan kirişle çevre yayı arasındaki açıdır.
8- *Kesek iç açısı*; daire çevresinde alınan bir noktadan kesek sınırını oluşturan kiriş uçlarına çekilen hatlar arasındaki açıdır.
9- *Daire çevresi açısı*; daire çevresinin herhangi bir noktasıyla merkezden geçen ve çevre yayının bir kısmını sınırlayan iki hat arasındaki açıdır.
10- *Daire dilimi* merkezden geçen iki hat ve bir kısım yayla sınırlanmış daire parçasıdır.
11- *Benzer kesekler* (ya da *eşit açılı kesekler*); bir dairede çevre açıları eşit olan keseklere denir.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Bir dairenin merkezini belirleme.**

Bunun için *AB* daire çevresi üzerinde herhangi iki *C* ve *D* noktası alınır, *CD* hattı birleştirilir (*Şekil 1*). *CD* hattı *E* noktasında yarıya bölünür ve *AE* diki çekilir. Bu hat her iki yöne doğru, çevreyi *A* ve *B* noktalarında kesinceye kadar uzatılır. *AB* hattı *Z* noktasında ikiye bölünür. *Z* noktası dairenin aranan merkezidir.



Şekil 1

Aksine merkezin *T* noktası olduğunu varsayalım. *TC*, *TD* ve *TE* hatlarını çekelim. Oluşan Δ(*TCE*) ve Δ(*TDE*) üçgenlerinin kenarları uygun olarak, eşit olmalıdır. Diğer bir deyişle ∠(*TED*) = ∠(*TEC*) ve ∠(*TED*), ∠(*TEC*) açılarının her biri 90° olmalıdır. Ancak bu yanlıştır. Çünkü ∠(*AED*) = ∠(*AEC*) ve ∠(*AED*) ve ∠(*AEC*) dik açılar olduğundan *Z* noktasından başka merkez yoktur.

Buradan anlaşılır ki eğer bir kiriş başka bir kirişi yarıya böler ve bu ikisi dik açılarla kesişirse, bu durumda kirişlerden biri zorunlu olarak dairenin merkezinden geçer.

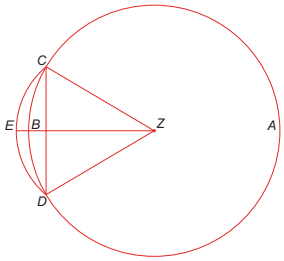
Not: Eğer merkez *AB* üzerindeki *Z* noktasından başka, örneğin bir *H* noktası olsa, bu durumda bir hat iki noktada yarıya bölüneceğinden bu mümkün olmazdı.

***II. Önerme*: Çevre üzerinde herhangi iki noktayı birleştiren kiriş daire içinde yer alır.**

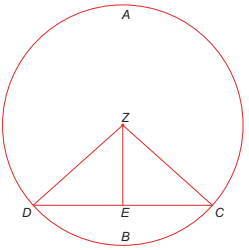
Eğer *AB* dairesi üzerindeki *C* ve *D* noktaları *CD* kirişiyle birleştirilirse, bu kiriş *AB* dairesi içinde bulunur (*Şekil 2*).

Aksi halde ya dairenin dışına ya da üzerine düşer. Örneğin *CED* hattının dairenin dışına düştüğünü varsayalım. Dairenin merkezi *Z* noktası olmak üzere *ZC* ve *ZD* hatları çekilir. *CED* üzerinde herhangi bir *E* noktası alınır ve *ZBE* hattı çekilir. Δ(*ZCD*) bir ikizkenar üçgen olduğundan ∠(*ZCE*) = ∠(*ZDE*) ve Δ(*ZCE*) üçgeninde ∠(*ZED*) dış, ∠(*ZCE*) iç açı olduğundan ∠(*ZED*) > ∠(*ZCE*) olmalıdır. Ancak burada ∠(*ZED*) > ∠(*ZDE*)

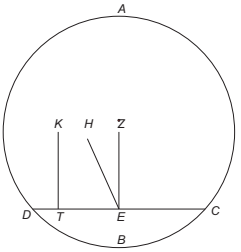
olduğundan $ZD > ZB$ ya da $ZB > ZE$ olmalıdır ki bu yanlıştır. Aynı şekilde CD kirişinin daire üzerine düşmeyeceği de gösterilebilir. Kanıtlamak istenen de budur.



Şekil 2



Şekil 3



Şekil4

***III. Önerme*: Herhangi bir kirişi yarıya bölen ve daire merkezinden geçen hat kirişe diktir; başka bir deyişle herhangi bir kirişe daire merkezinden inilen dik kirişi yarıya böler.**

AB dairesinin Z merkezinden geçen hattın DC kirişini E noktasında yarıya böldüğünü varsayalım (*Şekil 3*).

Bu durumda ZE hattının CD kirişine dik olacağını kanıtlayalım: CZ ve DZ hatları çekilirse, tüm kenarları eşit olduğundan ZEC ve ZED üçgenleri eşit olur. Ayrıca $\angle(ZEC) + \angle(ZED) = 180°$ ve $\angle(ZEC) = \angle(ZED) = 90°$ olduğundan, ZE hattı DC kirişine diktir.

İkinci olarak daire merkezinden bir kirişe inilen dikin kirişi yarıya böldüğünü kanıtlayalım: ZE kenarı ortak ve $\angle(ZEC) = \angle(ZED) = 90°$ diklik koşulu nedeniyle $\Delta(ZEC) = \Delta(ZED)$ olduğundan, kanıtlanması istenen $EC = ED$ geçerlidir.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir: Merkezden geçen ZE hattının CD hattını yarıya böldüğünü ancak ona dik olmadığını, buna karşın örneğin bir EH hattının DC hattına dik olduğunu varsayalım (*Şekil 4*). Bu durumda EH hattı DC hattına dik olup onu yarıya böldüğü halde daire merkezinden geçmez. Ne var ki bu iki özelliğe farklı hatlar sahip olamaz.

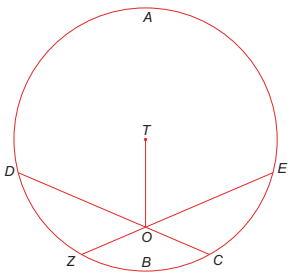
Merkezden geçen *ZE* hattının *DC* hattına dik olduğunu ancak *DC* hattını yarıya bölmediğini varsayalım. Bu durumda *DC* hattının ortası *T* olacağına göre, örneğin *ZE* hattına paralel bir *TK* hattının *DC* hattını yarıya böldüğünü ve ona dik olduğunu varsaymamız gerekir. Ancak bu iki özelliğe farklı hatlar sahip olamaz.

***IV. Önerme*: Merkezden farklı bir noktada kesişen herhangi iki kiriş birbirini yarıya bölemez.**

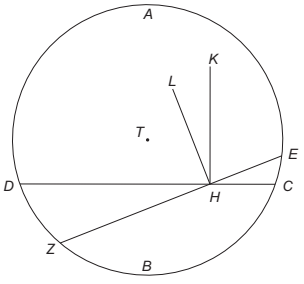
Açıklama: Verilen *T* merkezli *AB* dairesinde *CD* ve *EZ* kirişlerinin *O* noktasında kesiştiğini varsayalım ve bu durumda *O* noktasının *CD* ve *EZ* hatlarının ortasında bulunmadığını kanıtlayalım (*Şekil 5*).

Kanıt: *O* noktasının bu iki hattın ortasında bulunduğunu varsayalım ve *TO* hattını çekelim. Bu durumda *TO* hem *DC* ve hem de *EZ* hatlarına dik olmalıdır. Bu mümkün olmadığından önerme de kanıtlanmış olur.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir: *H* noktasından *CD* hattına *HK* dikini ve *EZ* hattına *HL* dikini çekelim (*Şekil 6*). Bu iki dik varsayım gereği dairenin merkezinden geçmelidir ki dairenin merkezi *T* noktası olduğundan bu mümkün değildir.



Şekil 5

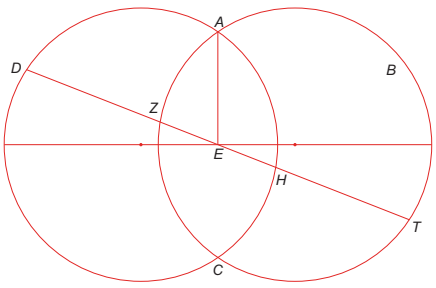


Şekil 6

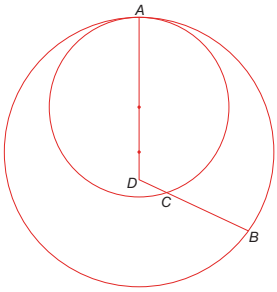
***V. Önerme*: Kesişen daireler eş merkezli olamaz**

Kanıtı: Bir ara aksini düşünerek kesişen iki dairenin *E* eş merkezli olduğunu varsayalım (*Şekil 7*). *AE* hattını ve herhangi bir *EZD* hattını çekelim. Bu durumda *ED* = *EH* = *AE* olması gerekir ki bu hatalı olduğundan önerme de kanıtlanmış olur.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir: *DZE* hattını *H* ve *T* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda *ZE* = *TE* = *AE* olması gerekir ki bu da yanlıştır.



Şekil 7



Şekil 8

***VI. Önerme*: Teğet daireler eş merkezli olamaz.**

Kanıtı: Aksini düşünerek *AB* ve *AC* dairelerinin *D* eş merkezli olduğunu varsayalım (*Şekil 8*). *AD* hattını ve herhangi bir *DCB* hattını çekerek *B* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda *DA* = *DC* = *DB* olması gerekir ki bu hatalı olduğundan önerme de kanıtlanmış olur.

***VII. Önerme*: Daire içinde, daire merkezi dışındaki herhangi bir noktadan, daire çevresine hatlar çekilirse, bunlar arasında:**

1- Merkezden geçen en uzun hattır,
2- Çapı tamlayan en kısa hattır,
3- Daha uzun hatta yakın olan, uzun hatta daha uzak olan hattan daha uzundur,
4- O noktadan geçen hatların içinde sadece ikisi eşit uzunlukta olabilir.

Kanıtı: *AB* dairesinin merkezinin *T* ve daire içinde ondan farklı bir *E* noktasının verildiğini varsayalım (*Şekil 9*). *TE* hattını çekerek onu daire çevresinin *C* ve *D* noktalarına kadar uzatalım:

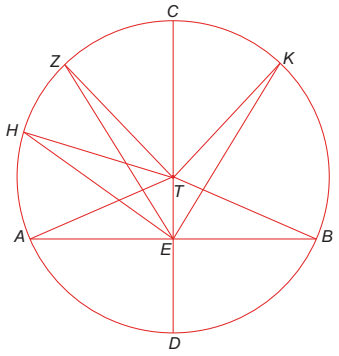
1- *E* noktasından *EA* hattı çekilirse *TZ* = *TC* ve (*ET* + *TZ*) = *EC* olduğundan *EZ* < (*ET* + *TZ*) = *EC* ya da merkezden geçen *EC* hattının diğer hatlardan uzun olduğu görülür.

2- Eğer TA hattı çekilirse $(TE + EA) > TA = TD = (TE + ED)$ ya da $EA > ED$ olduğundan, diğer bir deyişle çapı tamlayan ED hattının en kısa hat olduğu anlaşılır.

3- Eğer TH hattı çekilirse $\Delta(ETZ)$ ve $\Delta(ETH)$ üçgenlerinde $TH = TZ$ ve TE ortak olduğundan $\Delta(ZTE) > \angle(HTE)$ ya da $ZE > HE$ olur. Diğer bir deyişle daha uzun hatta yakın olan hat, uzun hatta uzak olan hattan daha uzundur.

4- $\angle(ETA) = \angle(ETB)$ koşulunu oluşturalım ve EB hattını çekelim. Bu durumda ET kenarı ortak, TA ve TB kenarları eşit olduğundan $\Delta(TAE) = \Delta(TBE)$ ve $EA = EB$ olur.Bu iki hattan başka hiçbir hat, örneğin EK hattı onlara eşit olamaz. Çünkü aksi halde eğer TK hattını çekersek $\angle(ETK) = \angle(ETB)$ olmalıdır. Bu da mümkün değildir.

Böylece önermenin tüm hükümleri kanıtlanmış olur.



Şekil 9

***VIII. Önerme*: Daire dışında verilen herhangi bir noktadan daireyi keserek ya da kesmeyerek dairenin çevresine kadar uzanan hatlar arasında:**

1- Merkezden geçen en uzun hattır,
2- En uzun hatta yakın olan, ondan uzak olandan daha uzundur,
3- Daireyi kesmeyen, merkez hizasındaki hat en kısa hattır.
4- En kısa hatta yakın olan, ondan uzak olandan daha kısadır.
5- O noktanın ancak iki yanından çekilen iki hat eşit uzunlukta olabilir.

Kanıtı: *AB* dairesinin merkezinin *M*, daire dışında verilen noktanın *C* olduğunu varsayalım (*Şekil 10*). *C* ve *M* noktalarını birleştirelim. Merkezden geçen daire çevresini *H* ve *K* noktalarında kesen *CK* ve diğer *CE*, *CZ*, *CA* hatları çizilmiştir.

1- Eğer *EM* hattı çekilirse, *EM* = *KM* olduğundan, (*EM* + *MC*) = (*KM* + *MC*) > *HC* ya da *CK* > *CE* yazılabilir. Bu ilişki *CE* dışındaki tüm diğer hatlar için de geçerli olduğundan, merkezden geçen *CK* hattı en uzun hattır.

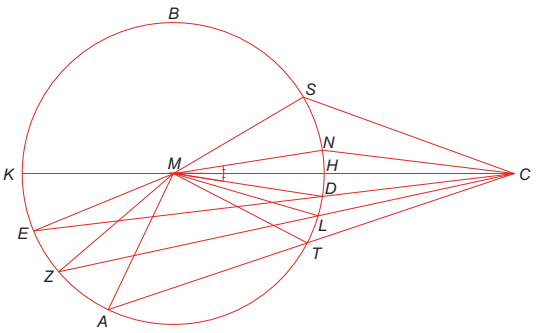
2- Eğer *ZM* hattı çekilirse Δ(*EMC*) ve Δ(*ZMC*) üçgenlerinde *EM* = *ZM* ve *MC* ortak olduğundan ∠(*EMC*) > ∠(*ZMC*) ya da *CE* > *CZ* olur. Diğer bir deyişle en uzun hatta yakın olan hat ondan uzak olandan daha uzundur.

3- Eğer *MD* hattı çekilirse (*MH* + *HC*) < (*MD* + *DC*) ve *MH* = *MD* olduğundan *HC* < *DC* olur. Bu ilişki diğer tüm hatlar için de geçerli olduğundan *HC* hattı en kısa hattır. Buna göre daireyi kesmeyen merkez hizasındaki hat en kısa hattır.

4- Eğer *ML* hattı çekilirse Δ(*MDC*) ve Δ(*MLC* üçgenlerinde *MD* = *ML* ve *MC* ortak olduğundan ∠(*DMC*) < ∠(*LMC*) ya da *CD* < *CL* olur. Genelleştirilirse *CT* > *CL* > *CD* yazılabileceğinden en kısa hatta yakın olan hat ondan uzak olandan daha kısadır.

5- Eğer ∠(*CMD*) = ∠(*CMN*) alınır ve *CN* hattı çekilirse Δ(*CMN*) ve Δ(*CMD*) ve *MN* = *MD* olduğundan *CN* = *CD* olur. Diğer bir deyişle *MC* hattının iki yanında çekilen hatlar eşittir. Böylece herhangi bir hat, örneğin *CS* için *CS* ≠ *CN* ya da *CS* ≠ *CD* olur. Eğer *CS* = *CD* olduğunu varsayarsak, *MS* hattı çekilirse *CMD* ve *CMS* üçgenlerinde ∠(*DMC*) = ∠(*CMS*) olması gerekirdi. Ne var ki ∠(*DMC*) = ∠(*NMC*) ilişkisi geçerlidir.

Böylece önermenin 5 hükmü de kanıtlanmış olur.



Şekil 10

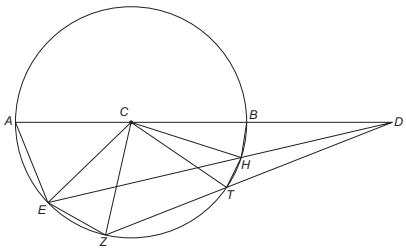
Not: Bu ve bundan önceki *VII. Önerme*yi birlikte aşağıdaki şekilde ifade etmek de mümkündür.

Dairenin merkezi dışında herhangi bir noktadan dairenin çevresine hatlar çekilirse:

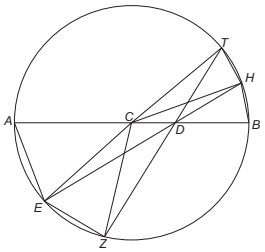
1- En uzun hat merkezden geçen ve nokta ile çevre arasında uzanan hattır.
2- En kısa hat en uzun hattın devamında yer alan, ancak merkezden geçmeyen hattır. En uzun hattın çap tamlayanı olarak da tanımlanır.
3- En uzun hatta daha yakın olan hat diğerlerinden daha uzundur.
4- En kısa hatta daha yakın olan hat diğerlerinden daha kısadır.
5- Verilen noktadan çekilen tüm hatlar arasında sadece iki hat eşit olabilir.

Bu önermeler de yukarıda olduğu gibi kanıtlanabilir. Bir diğer kanıtlama yöntemi: Bir C merkezli AB dairesinde daire dışında bulunan bir D noktasının, merkezden geçen bir DA hattı üzerinde bulunduğunu ve bu hatta DB kısa AB ise uzun kısmı oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 11*). Ayrıca D noktasından geçen DE ve DZ hatlarını çekelim, AE ve EC noktalarını birleştirelim. Bu durumda $\angle(CAE) = \angle(CEA)$ ve $\angle(DEA) > \angle(DAE)$ olduğundan $DZ < DA$ yazılabilir. DB hattı DH hattından ve DH hattı DT hattından daha kısadır. BH ve CH hatlarını birleştirelim. Bu durumda $\angle(CBH) = \angle(CHB)$ yazılabilir ve $\angle(DHB) < \angle(DBH)$ olur. Böylece bu hatlar karşılarındaki açılarla orantılı olduklarından $DB < DH < DT$ olduğu

kanıtlanmış olur. Bu husus dairenin içindeki bir *D* noktası için de geçerlidir (*Şekil 12*).



Şekil 11

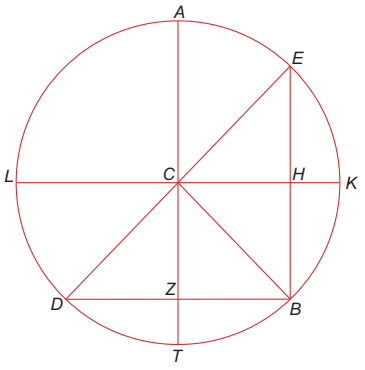


Şekil 12

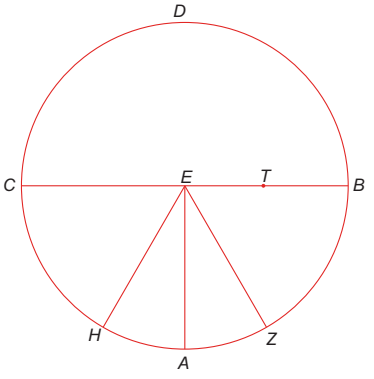
***IX. Önerme*: Dairenin içindeki herhangi bir noktadan, dairenin çevresine ikiden fazla eşit hat çekilebiliyorsa o nokta dairenin merkezidir.**

Açıklama: *AB* verilen daire, *C* nokta, *CD*, *CB* ve *CE* eşit hatlar olsun (*Şekil 13*). *C* noktasının *AB* dairesinin merkezi olduğunu kanıtlamalıyız.

Kanıtı: *BD* ve *BE* hatlarını çekip onları *Z* ve *H* noktalarında yarıya bölen *CZ* ve *CH* hatları çekilir. $\Delta(CZD) = \Delta(CZB)$ olduğundan $\angle(CZD) = \angle(CZB)$ ve $[\angle(CZD) + \angle(CZB)] = 180°$'ye eşittir. Buna göre *CZ* hattı *BD* hattını yarıya böldüğü ve ona dik olduğu için *C* noktası dairenin merkezidir. Sonra *CZ* hattını iki taraftan daire çevresinin *A* ve *T* noktalarına kadar uzatalım. Böylece *AT* ve *KL* hatları merkezden geçer ve *C* noktasından başka bir noktada kesişmeleri imkânsızdır. Bu nedenden dolayı *C* noktasından başka bir nokta merkez olamaz.



Şekil 13



Şekil 14

Sâbit bazı nüshalarında önermeyi başka bir yol izleyerek kanıtlar:

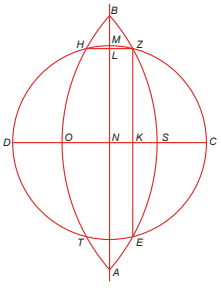
Daire *ABDC*, nokta *E* ve eşit hatlar *EZ*, *EA* ve *EH* olarak verilmiş olsun (*Şekil 14*). *E* noktasının daire merkezi olduğunu kanıtlayalım.

Aksini düşünerek *T* noktasının daire merkezi olduğunu varsayalım. *ET* hattını çekip onu iki taraftan *B* ve *C* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda *EB* hattı *E* noktasından çıkan hatların en uzunu olurdu. Hâlbuki merkez noktanın iki tarafından çıkan hatların ikiden fazla sayıda eşit olması gerekirdi. Bu bir çelişkidir. Böylece önerme kanıtlanmış olur bu da bizim istediğimizdir.

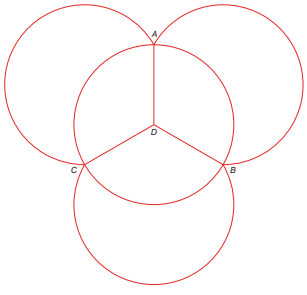
***X. Önerme*: İki daire ikiden fazla noktada kesişmez.**

Kanıtı: Aksini düşünerek *AB* ve *CD* dairelerinin *Z*, *E*, *T* ve *H* noktalarında kesiştiğini varsayalım (*Şekil 15*). *ZE* ve *ZH* hatlarını çekelim. Bunları *K* ve *L* noktalarında yarıya bölerek onlara *CD* ve *BA* diklerini kaldıralım. Bu iki dik aynı zamanda iki dairenin merkezinden geçmelidir. Böylece iki kesişen dairenin merkezi aynı *N* noktasında çakışır. Bu ise yanlıştır.

Bazı nüshalarda başka bir kanıt yolu bulunur ki bu da Sâbit tarafından ilave edilmiştir. İki daireden birinin merkezi *D* noktası olduğunu varsayalım (*Şekil 16*). *AD*, *BD* ve *CD* hatlarını çekelim. Bu hatların hepsi, merkezden çevreye çekildiklerinden, eşittir. Ne var ki bu eşit hatlar başka bir dairenin içindeki bir *D* noktasından çevresine çekilmişlerdir. Buna göre *D* noktası aynı zamanda bu dairenin de merkezidir. Bu yanlış olduğundan öneri kanıtlanmış olur.



Şekil 15



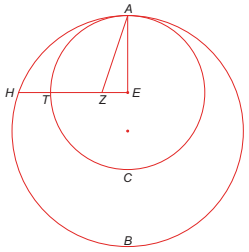
Şekil 16

***XI. Önerme*: İki teğet dairenin merkezlerini birleştiren hat teğet noktasından geçer.**[1]

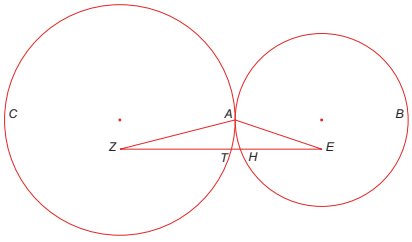
Kanıtı: *E* ve *Z* merkezli *AC* ve *AB* dairelerin *A* noktasında teğet olduklarını varsayalım. Aksini düşünerek *EZ* hattının bu iki daireyi *T* ve *H* noktalarında kestiğini varsayalım. *AH* ve *AE* hatlarını çekelim (*Şekil 17 ve 18*):

1- Eğer daireler içten teğetse bu durumda (*EZ* + *ZA*) > *AE* yazılabilir (*Şekil 17*). Ne var ki *Z* noktası *AC* dairesinin merkezi olduğundan (*EZ* + *ZA*) = *ET*. Aynı şekilde *E* noktası *AB* dairesinin merkezi olduğundan *AE* = *HE* yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa (*EZ* + *ZA*) = *ET* > *HE* ya da tam kısmından büyük olduğu anlamına geleceğinden yanlıştır.

2- Eğer daireler dıştan teğetse, bu durumda (*AE* + *AZ*) > *EZ* olur (*Şekil 18*). Lakin dairelerin yarıçapları eşit olduğundan (*AE* + *AZ*) = (*HE* + *TZ*) ilişkisi geçerlidir. Bu ise (*HE* + *TZ*) > *EZ* ya da hattın bir kısmı tümünden büyük olduğu anlamına geleceğinden. Buna göre önerme kanıtlanmış olur.



Şekil 17



Şekil 18

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir diğer yolu daha vardır. *Z* noktasının *AC* dairesinin merkezinde olmadığını varsayalım. Bu noktadan *AC* dairesinin çevresine *ZT* ve *ZA* hatlarını çekilir. *VII. Öneri*'nin 2. Şıkkı gereği *ZT* en kısa hat olduğundan *ZT* < *ZA*, ancak *AZ* = *ZT* olması gerektiğinden bu yanlıştır.

***XII. Önerme*: İki daire bir noktada teğettir.**

Kanıtı: Aksini düşünelim (*Şekil 19*):

1 Öklid, iç ve dıştan teğet iki daireyi iki farklı öneri şeklinde değerlendirdiğinden bundan sonraki önermelerde Öklid önerilerinde önerme numaraları Tûsî'den bir fazladır.

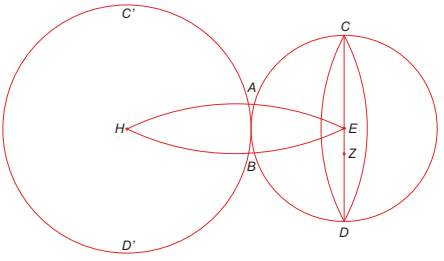
1- *AB* ve *CD* dairelerinin içten teğet olduklarını ve teğet noktalarının *C* ve *D* olduklarını varsayalım. Dairelerin *E* ve *Z* merkezleri arasındaki *EZ* hattını çekip bu hattı her iki yöne uzatalım. Daha önce kanıtladığımıza göre bu hattın devamı *C* ve *D* teğet noktalarından geçmelidir. Bu durumda *CE* < *ZC* ve *ED* < *ZD* olmalıdır ki bu yanlıştır.

2- *CD* ve *C'D'* dairelerinin dıştan teğet noktaları *A* ve *B* noktalarıdır. *AB* kirişi çizilirse bu kiriş bir dairenin içine diğer dairenin ise dışına düşer. Bu yanlış olduğuna göre önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

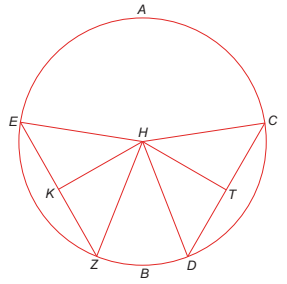
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır.

1- İçten teğet durumunda, *E* noktasının *AB* dairesinin merkezi olduğunu varsayalım (*EC* = *ED*). Buna karşın *Z* noktası onun merkezi değildir. Bu nedenden *ZC* > *DZ* olur. Ne var ki *Z* noktası *CD* dairesinin merkezi olduğuna göre *ZD* = *ZC* olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.

2- Dıştan teğet durumunda, *H* noktası *C'D'* dairesinin *E* noktası ise *AB* dairesinin merkezi olsun. *EH* hattı çekilir. Bu hat aynı zamanda hem *A* ve hem de *B* noktasından geçmelidir. Buna göre bir doğru bir bölgeyi çevrelemesi gerektiği için bu imkânsızdır.



Şekil 19



Şekil 20

***XIII. Önerme*: Dairede eşit kirişler merkeze eşit mesafededir; başka bir deyişle merkeze eşit mesafedeki kirişler eşittir.**

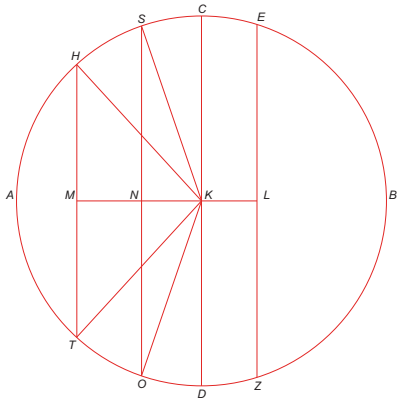
Kanıtı: *H* merkezli *AB* dairesinde *EZ* ve *CD* iki eşit kiriş olduğunu varsayalım (*Şekil 20*). *H* noktasından bu iki kirişe *HK* ve *HT* diklerini indirelim. Amaç bu iki dikin birbirine eşit olduğunu göstermektir.

Eğer *HE*, *HZ*, *HD* ve *HC* hatları çekilirse, tüm kenarlar eşit olduğundan $\Delta(HEZ) = \Delta(HDC)$ ve neticede bu üçgenlerin uygun açıları eşit olur. Şu halde $\angle(Z) = \angle(D)$ ve $\angle(ZKH) = \angle(DTH)$ ve $KZ = TD$ olduğundan $\Delta(HEZ) = \Delta(HDC)$ ve neticede $HK = HT$ olacağından önermenin birinci kısmı kanıtlanmış olur.

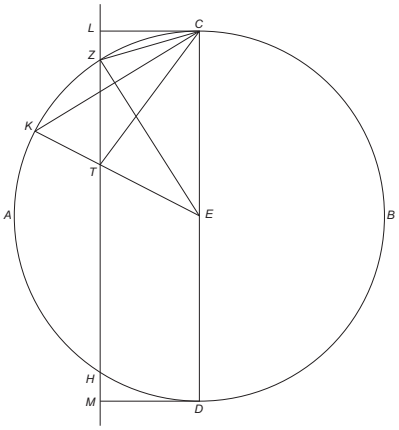
Şimdi önermenin ikinci- $HK = HT$ olduğunda EZ ve CD kirişleri de eşittir- kısmını kanıtlayalım. $HZ = HD$ ve bu nedenden $HZ^2 = HD^2$ ayrıca $(HZ^2 - HK^2) = (HD^2 - HT^2)$ olduğundan, $KZ^2 = TD^2$ ya da $KZ = TD$, $2.KZ = 2.TD$ neticede $EZ = CD$ ile önermenin ikinci kısmı da kanıtlanmış olur.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır. $EZ = DC$ lakin $HK < HT$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\angle(Z) < \angle(D)$, $\angle(E) < \angle(C)$ ve neticede $\angle(EHZ) > \angle(CHD)$ olur. Şu halde $\Delta(HEZ$ ve $\Delta(HCD)$ ikizkenar üçgenlerinde $EZ > CD$ olması gerekir. Ne var ki koşul gereği bu kirişler eşit olduğuna göre varsayım yanlıştır.

Aksi durumu da açıklığa kavuşturmak için $EK \neq CT$ ya da $EK^2 \neq CT^2$ olduğunu varsayalım. Ancak $HE^2 = HC^2$ ve ayrıca koşul gereği $HK^2 = HT^2$ olduğundan $EK^2 = CT^2$ olmalıdır ki bu da varsayımla çelişkilidir.



Şekil 21



Şekil 22

***XIV. Önerme*: Bir dairede;**

1- Çap en uzun kiriştir,

2- Merkeze yakın kiriş uzak olandan uzundur.

Kanıtı: *K* merkezli *AB* dairesinde *CD* çap, *EZ* merkeze yakın ve *HT* merkeze uzak bir kiriş olduğunu varsayalım (*Şekil 21*). *K* merkezinden *KL* ve *KM* diklerini inelim. Bu durumda koşul gereği *KL* < *KM* olur.

1- *KM* hattından *KN* = *KL* hattını ayırıp *N* noktasından *CD* hattına paralel *SO* hattını çekelim. Bu durumda *SO* = *EZ* olur. *SK*, *OK*, *HK* ve *TK* hatlarını çekelim. (*KS* + *KO*) > *SO* olduğundan, (*CK* + *KD*) > *EZ* ya da *CD* > *EZ* olur.

2- Δ(*SOK*) ve Δ(*HTK*) üçgenlerinde *SK* = *KO*, *DK* = *KT* ve ∠(*OKS*) > ∠(*TKH)* olduğundan *SO* > *HT* ya da *EZ* > *HT* olur.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır: *E* merkezli *AB* dairesinde *CD* çap ve *ZH* çapa paralel bir kiriştir (*Şekil 22*). *C* noktasından *ZH* kirişine bir dik inelim. Bu dikin diğer ucu daire üzerindeki *Z* noktasına düşmez. Çünkü bu durumda eğer *ZE* hattı çekilirse Δ(*CEZ*) üçgeninde [∠(*C*) + ∠(*Z*)] = 180° ya da ∠(*C*) ve ∠(*Z*) açılarının her biri dik açıya eşit olması gerekirdi.

Benzer şekilde bu dikin diğer ucu *H* ve *Z* noktaları arasına örneğin *T* noktasına da düşemez. Çünkü bu durumda ∠(*TCE*) açısı bir dik üçgen olurdu. Eğer *ET* hattını çeker ve onu *K* noktasına kadar uzatır ve *CK* hattını çekersek, ∠(*ECK*) ve ∠(*EKC*) açılarının her biri dik açıdan büyük olurdu. Bu durumda ∠(*ETC*) açısı ∠(*CKT*) üçgeninin dış açısı olduğundan ∠(*EKC*) açısından daha büyük olmalıdır. Koşul gereği ∠(*HTC* açısı dik olacağından ∠(*ETC*) açısı ∠(*HTC*) açısından büyük olmalıdır. Şu halde dikin diğer ucu kesinlikle dairenin dışına düşer.

Aynı şekilde *D* noktasından inilen dik *M* noktasına düşer. Neticede *CD* > *ZH* olur. Benzer şekilde *ZH* kirişinin merkezden daha uzak herhangi başka bir kirişten de daha uzun olduğu da kanıtlanabilir.

***XV. Önerme*: Bir dairede;**

1- Çap ucundan çekilen dik daire dışında kalır.

2- Çap ucundan çekilen dikle çevre arasında daire noktalarını birleştiren başka doğru bulunmaz.

3- Yarı daire açısı, daire içindeki dar açıların en büyüğüdür.
4- Tamlayanı ise daire içindeki geniş açıların en küçüğüdür.

Kanıtı: *CD* çaplı *AB* dairesi verildiğine göre (*Şekil 23*);

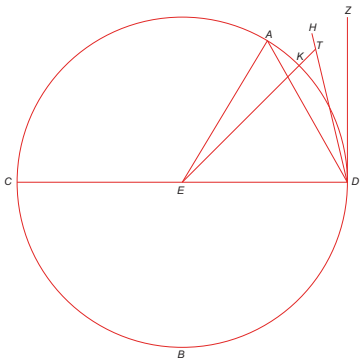
1- *D* noktasından *CD* çapına çekilen dikin *AD* olduğunu varsayalım. Bu hat dairenin çevresini keserek dairenin içine girer. *AE* hattını çizelim. Bu durumda $\angle(EDA) = \angle(EAD)$ olduğuna göre, $[\angle(EDA) + \angle(EAD)] = 180°$'ye eşit olması gerekir. Bu olamayacağına göre dik kesinlikle dairenin dışında kalmalı ve *DZ* hattı olmalıdır.

2- Bu dikle daire çevresinin arasında başka doğru bulunmaz. Aksini düşünerek *DH* hattının çevre ile dik arasına düştüğünü varsayalım. Bunun için *E* noktasından *DH* hattına *ET* dikini inelim. *TD* hattı dik olmadığından *ET* hattı *ED* hattı üstüne düşmez. Benzer şekilde bu hat *B* yönünde bulunamaz. Çünkü bu durumda *ET*, *TD* ve çaptan oluşan $\Delta(ETD)$ üçgeninde bir dar ve geniş açı oluşurdu. Şu halde kesinlikle *A* yönünde olmalıdır. Bu durumda $\Delta(ETD)$ üçgeninde $\angle(T) = \angle(D)$ olduğuna göre $ED > ET$ ya da $EK > ET$ olmalıdır ki bu da yanlıştır.

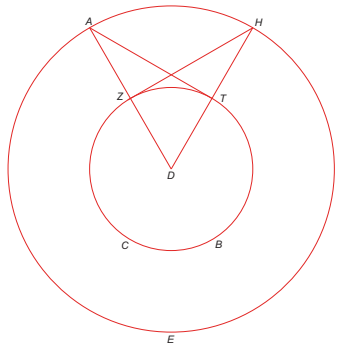
Neticede $\angle(AKE)$ açısından büyük ve $\angle(ZDK)$ açısından küçük her iki taraf arasında bir dar açı oluşturmak mümkün değildir. Aksi halde çap ucundan çekilen hatla çevre arasında başka bir hattın bulunması gerekir. Buna göre çap ucundan çıkılan dik daireye teğettir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır. *I. Makale*'den bilindiği üzere bir noktadan bir hatta indirilen dik verilen noktadan o hatta çekilebilecek hatların en kısasıdır. Buna göre *E* noktasından *DZ* hattına çekilen *ED* hattının dışında bir hat, yarıçaptan daha uzun olacağından, dairenin dışına çıkar. Şu halde *DZ* hattı daire içine giremez.

Aynı şekilde *DZ* dikiyle *CD* çapı arasında bulunan hatların tümü, *E* noktasından söz konusu hatta indirilen dik yarıçaptan küçük olacağından, dairenin içine girmek zorundadır. Buna göre *DZ* ile daire çevresi arasında başka teğet hat bulunamaz.



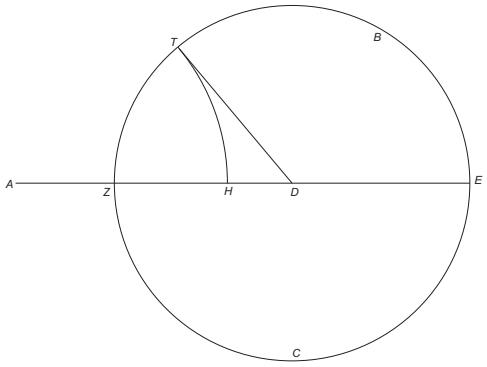
Şekil 23



Şekil 24

***XVI. Önerme*: Verilen bir noktadan herhangi bir daireye teğet çizilmesi.**

Kanıtı: *A* noktası ve *D* merkezli *BC* dairesi verilmiş olsun (*Şekil 24*). *D* merkezli *DA* yarıçaplı *AE* dairesi çizilir. *AD* hattı *BC* daire çevresini *Z* noktasında keser. *Z* noktasından *AD* hattına *ZH* diki çizilir. Bu dik *AE* dairesini *H* noktasında keser. *HD* hattı çekilir, bu hat *BC* dairesini *T* noktasında keser. *AT* hattı çizilir, bu hat aranan teğettir. Çünkü *HD* = *AD*, *ZD* = *TD* ve ∠ (*D*) ortak olduğundan Δ(*ATD*) = Δ(*HZD*) ve ∠(*HZD*) = ∠(*ATD*) = 90° olur. Buna göre *AT* hattı *DT* hattına dik olduğundan *BC* dairesine teğettir.



Şekil 25

Not: Bu önermeyi gerçeklemenin bir yolu daha vardır: *AD* hattı çekilerek *E* noktasına kadar uzatılır (*Şekil 25*). Bu hat *BC* dairesini *Z* noktasında keser. *AE* hattında uzunluğu (*AE* × *AZ*) çarpımına eşit olan *AH* hattı ayrılır.

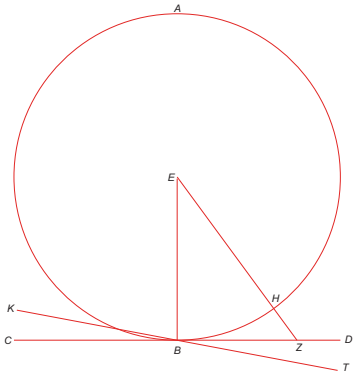
A merkezli ve AH yarıçaplı HT yayı çizilir. Bu yay BC dairesini T noktasında keser. AT ve TD hatları çizilir. AT aranan teğettir. Çünkü *2. Makale*, *VI. Önerme* gereği $[(AE \times AZ) + DZ^2] = DA^2$ ya da $DZ^2 = TD^2$ olduğundan, $(AT^2 + TD^2) = DA^2$ yazılabilir ve $\angle(ATD)$ dik açı olduğundan AT hattı BC dairesine teğettir.

***XVII. Önerme*: Bir dairede teğet noktasını merkeze birleştiren hat (ya da yarıçap) teğete diktir.**

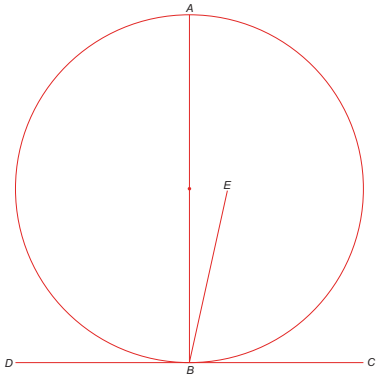
Kanıtı: AB dairesine teğet hattın CD, daire merkezinin E ve teğet noktasının B olduğunu varsayalım (*Şekil 26*). BE hattını çizelim. Bu hat CD hattına diktir.

Bir an CD hattının BE hattına dik olmadığını bunun yerine EZ hattına dik olduğunu varsayalım. Bu durumda $EZ < EB$ ve $EZ < EH$ olmalıdır. Ancak $EB = EH$ olduğundan bu yanlıştır ve önerme kanıtlanmış olur.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır: Eğer BE hattı BC hattına dik değilse, bu durumda ona B noktasında KT dikini çekelim. Bu hat AB dairesine teğet olur. Ancak bu durumda KT hattı ile daire çevresi arasına BD hattı girmiş olur ki bu *XV. Önerme* nedeniyle yanlıştır.



Şekil 26



Şekil 27

***XVIII. Önerme*: Bir dairenin teğet noktasında teğete çekilen dik, daire merkezinden geçmelidir.**

Kanıtı: AB dairesinde CD teğet, B teğet noktası ve AB teğete dik hattır (*Şekil 27*). Bu hat merkezden geçmelidir. Eğer merkezden geçmezse, dairenin merkezi örneğin E noktası olur. EB hattını çizelim, bu hat *XVII.*

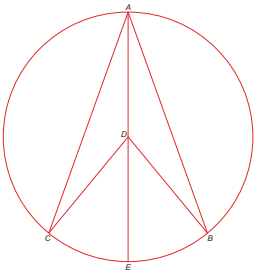
Önerme gereği *CD* hattına diktir. Ancak koşul gereği *AB* hattı *CD* hattına dik olduğundan bu yanlıştır ve önerme böylece olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XIX. Önerme*: Bir dairede merkez açısı aynı yayı gören çevre açısının iki katına eşittir.**

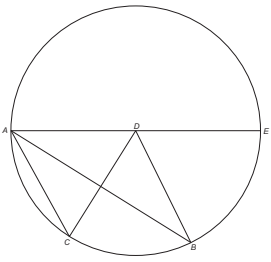
$\angle(CDB) = 2.\angle(CAB)$ olduğunu kanıtlamamız gerekir (*Şekil 28*).

Kanıtı: *D* Daire merkezi, $\angle(BDC)$ merkez açısı, $\angle(BAC)$ çevre açısı olmak üzere *AD* hattını çap boyunca *E* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda $\Delta(ABD)$ ikizkenar üçgeninde $\angle(EDB) = [\angle(DAB) + \angle(DBA)] = 2.\angle(BAE)$ olur. Aynı şekilde $\angle(CDE) = 2.\angle(CAE)$ yazılabileceğinden $[\angle(CDE) + \angle(EDB)] = 2.[\angle(CAD) + \angle(DAB)]$ ya da $\angle(CDB) = 2.\angle(CAB)$ elde edilir.

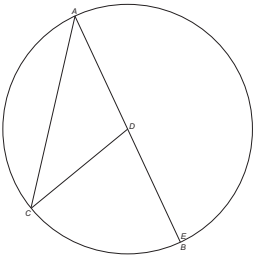
Not: Yerleşim yönünden burada çeşitli durumlarla karşılaşılabilir. *AD* hattı *AB* ve *AC* hatlarının arasına (*Şekil 28*), ikisinden birinin üstüne (*Şekil 29*) ya da dışına (*Şekil 30*) düşebilir. Çevreleme konusu*5. Makale*'nin girişinde tanımlanmıştır.



Şekil 28



Şekil 29



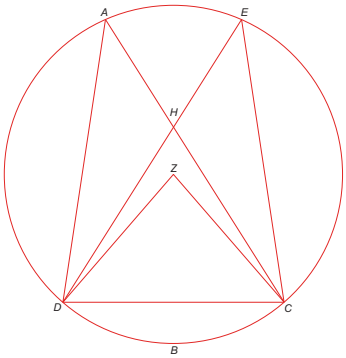
Şekil 30

***XX. Önerme*: Aynı merkez açısını gören tüm çevre açıları eşittir.**

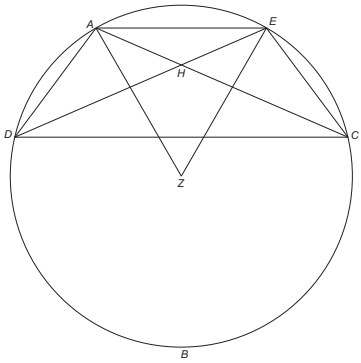
Kanıtı: *AB* dairesinin *CEAD* yayı üzerindeki $\angle(DAC)$ ve $\angle(DEC)$ yaylarının aynı $\angle(DZC)$ merkez açısını gördüğünü varsayalım (*Şekil 31*). Bu durumda $\angle(DZC) = 2.\angle(DAC)$ ve $\angle(DZC) = 2.\angle(DEC)$ olduğundan $\angle(DAC) = \angle(DEC)$.

Not: Yukarıdaki şekilde yay (*CEAD*) dairenin yarısından büyüktür. Eğer bu yay dairenin yarısından küçük olursa bir şey değişmez (*Şekil 31-1*). Bu durumda *ECBDA* yayı yarıdan büyük olduğu için $\angle(ADE) = \angle(ACE)$ ve

karşılıklı açılar oldukları için $\angle(AHD) = \angle(EHC)$ olur Buna göre uygun açıları eşit olan $\Delta(DAH)$ ve $\Delta(CEH)$ üçgenleri eşittir. Şu halde $\angle(CAD) = \angle(DEC)$ olmalıdır.



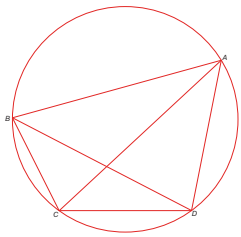
Şekil 31



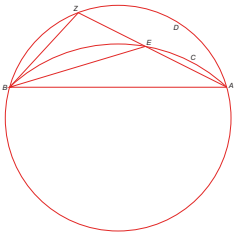
Şekil 31-1

***XXI. Önerme*: Bir dairenin dıştan teğet olduğu herhangi bir dörtgenin karşılıklı açılar toplamı 180°'ye eşittir.**

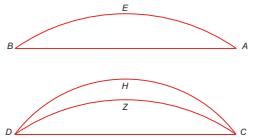
Kanıtı: $\angle(BAD)$ ve $\angle(BCD)$ açıları toplamının 180°'ye eşit olduğunu kanıtlamamız gerekir (*Şekil 32*). Bunun için *AC* ve *BD* köşegenleri çizilir. *CBAD* yayı tarafından çevrelendiğinden $\angle(CAD) = \angle(CBD)$ ve aynı şekilde *BADC* yayı tarafından çevrelendiğinden $\angle(BAC) = \angle(BDC)$ olduğuna göre $[\angle(BAC) + \angle(CAD)] = [\angle(DBC) + \angle(BDC)]$ ya da $\angle(BAD) = \angle(BCD)$ yazılabilir. Benzer şekilde $\angle(ABC) = \angle(ADC)$ ve bir dörtgende iç açıların toplamı 360° olduğundan, $[\angle(BAD) + \angle(BCD)] = 180°$ olur.



Şekil 32



Şekil 33



Şekil 34

***XXII. Önerme*: Bir hattı aynı tarafta aynı açı altında gören eşdeğer olmayan yay yoktur.**

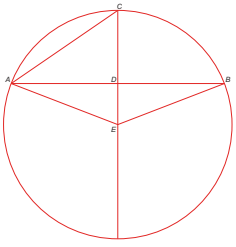
Kanıtı: Aksini düşünerek *AB* hattını çevreleyen ve aynı açı altında gören iki *ACB* ve *ADB* yayının bulunduğunu varsayalım (*Şekil 33*). Buna göre *ADB* yayı *ACB* yayını çevrelediğine göre yay(*ADB*) > yay(*ACB*) yazılabilir. yay (*ACB*) üzerinde herhangi bir *E* noktası alıp *EA* ve *EB* hatlarını çekelim. *EA* hattını *Z* noktasına kadar uzatıp *ZB* hattını çekelim. Koşul gereği ∠(*BEA*) = ∠(*BZA*) olmalıdır. Ancak *BEA* üçgeninde ∠(*BEA*) dış açı olduğundan, diğer bir deyişle *BE* ve *BZ* paralel olmadığından bu mümkün değildir. Böylece önerme kanıtlanmış olur.

***XXIII. Önerme*: İki eşit kirişi aynı açı altında gören yay parçaları eşdeğerdir.**

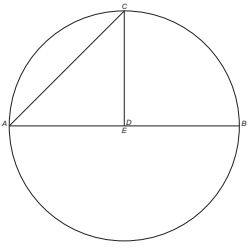
Kanıtı: *AB* = *CD* olduğuna göre, yay (*AEB*) = yay (*CZD*) olduğu söylenebilir (*Şekil 34*). Çünkü eğer *AB* hattı *CD* hattının üzerine, yay (*AEB*) yay (*CZD*) üzerine yerleştirilirse, eşleşirler. Böyle olmadığını varsayarsak yay (*CZD*) ve yay (*CHD*) örtüşen ancak uzunlukları eşit olmayan yay parçasına karşı düşer ki bu mümkün değildir.

***XXIV. Önerme*: Bir yay parçasına ilişkin daire merkezinin elde edilmesi.**

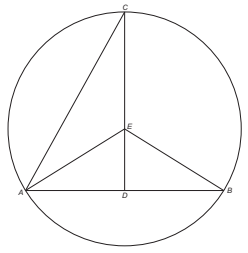
Açıklama: Verilen yay (*ACB*) parçasını bir daireye tamamlamak için ilkin *AB* kirişi *D* noktasında ikiye bölünür, daha sonra *D* noktasında *AB* kirişine *CE* diki çıkılır (*Şekil 35*). *AC* hattı çizilir ve *A* noktasında *ACE* açısına eşit *CAE* açısı oluşturulur. *CE* ve *AE* hatları *E* noktasında kesişinceye kadar uzatılır. *E* noktası aranan dairenin merkezidir.



Şekil 35



Şekil 36



Şekil 37

Kanıtı; Eğer *BE* hattı çekilirse *DA* = *DB*, *DE* ortak ∠(*BDE*) = ∠(*ADE*) = 90° olduğundan Δ(*BDE*) = Δ(*ADE*) ve ayrıca ∠ (*ACD*) = ∠ (*CAE*) eşitliğinden *BE* = *AE* = *CE* olur. Böylece *E* noktasından *BCA*

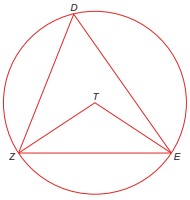
yayına eşit uzunluktaki *AE*, *CE* ve *BE* hatları çekilmiş olduğundan *E* noktası yay dairesinin merkezi olur.

Not: Bu önermede konuma bağlı olarak çeşitli şekiller oluşabilir. Verilen örnekte olduğu gibi *E* noktası *ABC* üçgeninin dışına (*Şekil 35*), *AB* hattında *D* noktasının üzerine (*Şekil 36*) ya da *ABC* üçgeni içine (*Şekil 37*) düşebilir. Her üç durumun kanıtı da aynı şekilde gerçekleşir.

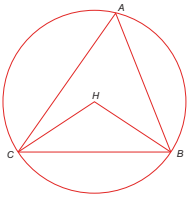
***XXV. Önerme*: Eşit dairelerde eşit merkezî ya da çevresel açıların gördüğü yaylar da eşittir.**

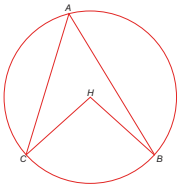
Açıklama: Eşit *ABC* ve *DEZ* dairelerinde ∠(*A*) = ∠(*D*) çevresel ve ∠(*H*) = ∠(*T*) merkezi açıların gördüğü yaylar da eşittir: yay (*BC*) = yay (*EZ*) (*Şekil 38*).

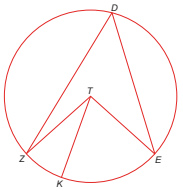
Kanıtı: Eğer *BC* ve *EZ* kirişleri çekilirse, *XXIII. Önerme* gereği yay (*EDZ*) = yay (*BAC*) olması gerekir. Ancak daireler eşit olduğundan eşit yaylar çıkarılırsa geriye kalan yaylar da eşit olur: yay (*BC*) = yay (*EZ*).



Şekil 38







Şekil 39

***XXVI. Önerme*: Eşit dairelerde eşit yayları gören merkezi ya da çevresel açılar da eşittir.**

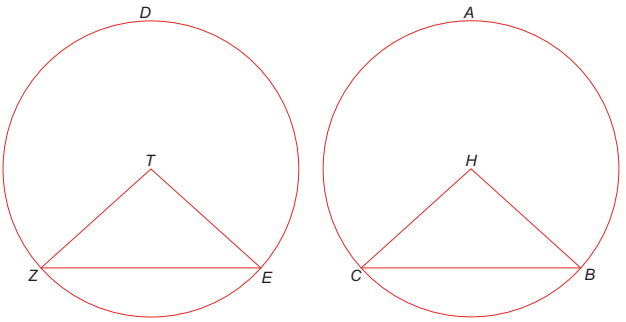
Açıklama: Eşit *ABC* ve *DEZ* dairelerinde yay (*BC*) = yay (*EZ*) olduğunu varsayalım (*Şekil 39*). Bu durumda bu yayları gören merkezi ve çevresel açılar da eşittir: ∠ (*H*) = ∠ (*T*) ve ∠ (*A*) = ∠ (*D*).

Kanıtı: ∠(*H*) ≠ ∠(*T*) olduğunu varsayalım. Eğer *H* açısına eşit ∠(*ETK*) açısı oluşturulursa, bu durumda yay (*EK*) = yay (*BC*) ve yay (*EK*) = yay (*EZ*) olacağından bu hatalıdır. Aynı şekilde çevre açılarının da eşit olduğu kanıtlanabilir.

***XXVII. Önerme*: Eşit dairelerde eşit kirişlerin yayları da eşittir.**

Açıklama; Eşit *ABC* ve *DEZ* dairelerinde *BC* = *EZ* ise yay (*BAC*) = yay (*EDZ*) ve yay (*BC*) = yay (*EZ*) olur (*Şekil 40*).

Kanıtı: *H* ve *T* daire merkezleri olmak üzere *HB*, *HC*, *TE* ve *TZ* hatları çekilir. Tüm kenarları eşit olduğundan Δ(*CBH*) ve Δ(*ZET*) üçgenleri eşittir. Şu halde ∠(*H*) = ∠(*T*) ve yay (*CB*) = yay (*ZE*) olduğu açıktır.



Şekil 40

***XXVIII. Önerme*: Eşit dairelerde eşit yayların kirişleri de eşittir.**

Açıklama; Eşit *ABC* ve *DEZ* dairelerinde eğer yay (*BC*) = yay (*EZ*) ise, bu durumda kirişler de eşittir: *BC* = *EZ* (*Şekil 40*).

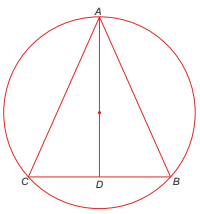
Kanıtı: *H* ve *T* daire merkezleri olmak üzere *HB*, *HC*, *TE* ve *TZ* hatları çekilir. *HB* = *TE* = *HC* = *TE* ve ∠(*H*) = ∠(*T*) olduğundan Δ(*BCH*) = Δ(*EZT*) ve neticede *BC* = *EZ* olduğu açıktır.

***XXIX. Önerme*: Herhangi bir yayın ikiye bölünmesi.**

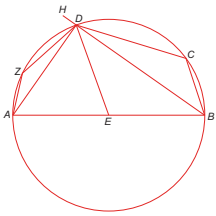
Örneğin *BAC* yayını ikiye bölmek isteyelim (*Şekil 41*).

Bunun için *BC* hattı çekilir ve bu hat *D* noktasında yarıya bölünür. Sonra *D* noktasından *DA* diki çekilir. Bu dik verilen yayı *A* noktasında yarıya böler. Eğer *AB* ve *AC* kirişleri çizilirse bunlar eşit olur.

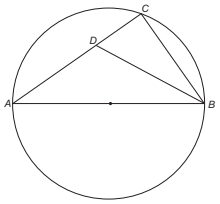
Kanıtı: Δ(*DCA*) = Δ(*DBA*) ve ∠(*B*) = ∠(*C*) olduğundan yay (*AB*) = yay (*AC*) olur.



Şekil 41



Şekil 42



Şekil 42-1

***XXX. Önerme*: Yay parçası dairenin yarısına eşitse çapı gören çevresel açı dik, yarıdan küçükse dar ve yarıdan büyükse bir geniş açıdır.**

Açıklama: *ADB* yayı *E* merkezli *ABC* dairesinin yarısına eşittir (*Şekil 42*). Bu yarım dairenin üzerinde herhangi bir *D* noktası alınır, *DA* ve *DB* kirişleri çekilirse *ADB* açısı bir dik açıdır.

Kanıtı: Eğer *DE* hattı çekilirse, *DEB* ve *AED* üçgenlerinin dış açısı için sırasıyla $\angle(AED) = 2.\angle(BDE)$ ve $\angle(BED) = 2.\angle(ADE)$ yazılabilir. Buna göre $[\angle(AED) + \angle(BED)] = 2.[\angle(BDE) + \angle(ADE)] = 2.\angle(ADB) = 180°$ ya da $\angle(ADB) = 90°$ elde edilir.

Başka bir kanıtlama yolu: *ADE* ve *DBE* ikizkenar üçgenleri için $\angle(B) = \angle(BDE)$ ve $\angle(A) = \angle(ADE)$ yazılabilir. $[\angle(A) + \angle(B)] = [\angle(ADE) + \angle(BDE)] = \angle(ADB)$. Buna göre *ADB* üçgeninde iki açının toplamı üçüncüye eşittir. Ancak üç açının toplamı 180°'ye eşit olduğundan $\angle(ADB) = [\angle(A) + \angle(B)] = 90°$ olur.

Daha başka bir kanıtlama yolu: *BD* hattını *H* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda *ADB* üçgeni dış açısı $\angle(ADH) = [\angle(A) + \angle(B)]$ ve daha önceki kanıtta olduğu gibi $\angle(ADB) = [\angle(A) + \angle(B)]$ ya da $\angle(ADB) = \angle(ADH)$ ilişkisi geçerlidir. Ancak $[\angle(ADB) + \angle(ADH)] = 180°$ olduğuna göre $2.\angle(ADB) = 180°$ ya da $\angle(ADB) = 90°$ olur.

İkinci olarak yay (*AD*) ve yay (*DB*) yayları üzerinde herhangi bir *Z* ve *C* noktası alalım ve *AZ*, *ZD* ve *DC*, *CB* hatlarını çekelim. yay (*ABCD*) yarım daireden daha büyüktür. $\angle(ABD) = \angle(B)$ bir dar açıdır. Daire üzerindeki bir *AZDB* dörtgeninde *B* ve *Z* açılarının toplamı (*XXI. Önerme* gereği) 180°'ye eşittir. $\angle(B)$ açısı bir dar açı olduğundan $\angle(Z)$ bir geniş açıdır.

Buna göre önerme gereği ∠(*D*) dik açısı yarım daire üzerinde, ∠(*Z*) geniş açısı yarıdan küçük yay (*AZD*) üzerinde ve ∠(*B*) dar açısı yarıdan büyük yay (*ABD*) üzerinde yer alır.

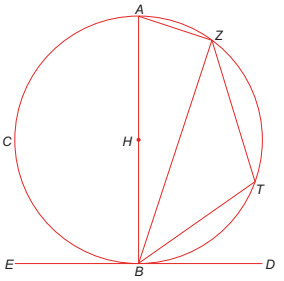
Not: Aksine, eğer Δ(*ABD*) üçgeninde ∠(*D*) açısı dikse, *AB* çap alınarak bir yarım daire geçirilirse dairenin *D* noktasından geçeceği söylenebilir (*Şekil 42-1*). Zira eğer *AD* hattı dairenin *C* noktasına kadar uzatılır ve *CB* hattı çekilirse, elde edilen Δ(*CBD*) üçgeninde hem iç ve hem dış açısı dik olur ki bu mümkün değildir.

Bu ek önerme yaygın kullanılır. 5. Makale *1. Önerme*de bu yönde bir açıklama mevcuttur.

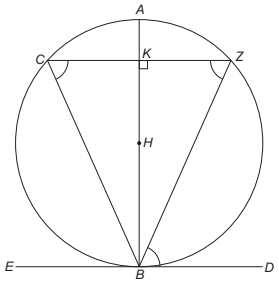
***XXXI. Önerme*: Daireye teğet hattın teğet noktasını bir daire noktasına bağlayan kiriş, daireyi iki yaya böler. Kirişle teğet hattı arasında oluşan iki açı bu yayların çevre açılarına eşittir.**

Açıklama: *DE* doğrusunun *H* merkezli *AC* dairesine *B* noktasında teğet olduğunu ve dairede bir *BZ* kirişinin verildiğini varsayalım (*Şekil 43*). *BZ* kirişi daireyi *ZACB* ve *ZTB* yaylarına böler. Buna göre *ZBD* açısının *ZTB* yayının *ZACB* çevre açısına, *ZBE* açısının ise *ZACB* yayının *ZTB* çevre açısına eşit olduğu gösterilmelidir.

Kanıtı: *B* teğet noktasını *H* merkezine birleştirip *A* noktasına kadar uzatalım. *AZ* hattını çekelim. Bu durumda *AZB* ve *ABD* açıları diktir. Ayrıca [∠(*ZAB*) + ∠(*ZBA*)] = 90° olduğundan ∠(*ZAB*) = ∠(*ZBD*) olduğu görülür. Eğer *ZTB* yayı üzerinde herhangi bir *T* noktası alınır ve *TZ*, *TB* hatları çekilirse şu ilişkiler yazılabilir: *XXI. Önerme* gereği [∠(*ZTB*) + ∠ (*ZAB*)] = 180°, açıların toplamı bir tam daireyi gördüğünden [∠ (*ZTB*) + ∠ (*EBD*)] = 180° ya da [∠(*ZBE*) + ∠(*ZBD*)] = 180° olduğundan ∠(*ZTB*) = ∠(*ZBE*) olduğu görülür.



Şekil 43

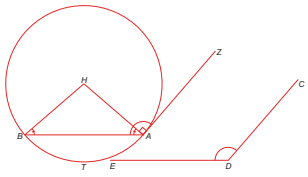


Şekil 44

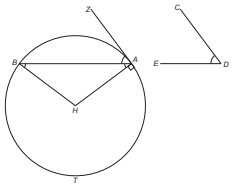
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir kanıt yolu daha vardır. *DE* teğetine *B* noktasında dik *BH* hattı üzerindeki herhangi bir *K* noktasından *DE* hattına paralel *ZC* hattını çizelim ve bu hattın daireyi kestiği *Z* ve *C* noktalarını *B* noktasına birleştiren *ZB* ve *CB* hatlarını çizelim (*Şekil 44*). *ZBK* ve *CBK* dik üçgenlerinde *ZK* = *KC* ve *KB* ortak olduğundan ∠(*Z*) = ∠(*C*). Ayrıca çapraz açılar olması nedeniyle ∠(*Z*) = ∠(*ZBD*) ya da ∠(*C*) = ∠(*ZBD*) olduğu görülür.

***XXXII. Önerme*: Verilen bir hat parçası üzerine, verilen bir açının çevre açısı olarak gördüğü bir daire parçasının çizilmesi.**

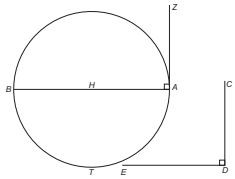
Eğer *AB* hat parçası ve *EDC* açısının verilmiş olduğu varsayılırsa, ilkin *A* noktasından verilen *EDC* açısına eşit bir *BAZ* açısı oluşturulur (*Şekil 45*). *A* noktasından *AZ* hattına dik *AH* hattı çizilir. *B* noktasından *BAH* açısına eşit *ABH* açısı çizilir, *AH* ve *BH* hatları *H* noktasında kesişir. *H* merkez, *AH* yarıçap olmak üçere *AB* dairesi çizilir. *ATB* aranan daire parçasıdır. Çünkü *AH* hattına dik *AZ* hattı daireye teğettir. Teğet noktasından geçen *AB* kirişi daireyi iki kısma böler. Bunlardan biri *ATB* daire parçasıdır ki *BAZ* ya da *EDC* çevre açısı tarafından görülür.



Şekil 45



Şekil 46



Şekil 47

Not: Burada çeşitli farklı konumlar oluşabilir:

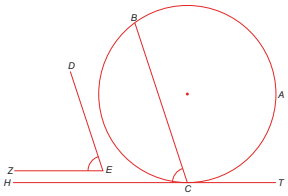
1- Eğer yukarıdaki örnekte olduğu gibi verilen açı bir geniş açıysa bu durumda *AH* diki *AB* ve *AZ* kenarları arasına düşer (*Şekil 45*).

2- Eğer verilen açı darsa bu durumda *AH* diki iki kenarın dışına düşer (*Şekil 46*).

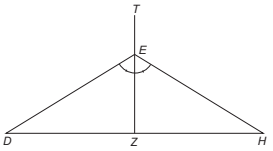
3- Eğer açı dikse *AH* dikiyle *AB* hattı çakışır (*Şekil 47*).

***XXXIII. Önerme*: Bir dairede verilmiş bir açının çevre açısı olarak gördüğü daire parçasının belirlenmesi.**

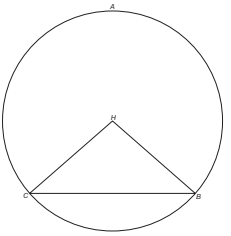
BAC dairesi ve *DEZ* açısının verildiğini varsayalım (*Şekil 48*). Dairenin herhangi bir *C* noktasındaki *HT* teğeti ve *DEZ* açısına eşit *BCH* açısı çizilir. Böylece *ABC* dairesinde *BCH* çevre açısını gören *BAC* yayını ayıran *BC* kirişi belirlenmiş olur.



Şekil 48



Şekil 49



Şekil 50

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka yolları da bulunur. Daire merkezinin *H* olduğunu varsayalım:

1- Eğer verilen ∠(*DEZ*) açısı dikse, bu durumda dairenin çapı çizilir. Çap daireyi ikiye böler. Bu yarım dairelerin her biri çevre açısını bir dik açı altında görür.

2- Eğer verilen ∠(*DEZ*) açısı dik değilse *EZ* hattı *T* noktasına kadar uzatılır (*Şekil 49*). Bu durumda ya *DET* ya da *DEZ* açısı dardır. *DEZ* açısının dar olduğunu varsayalım. *EZ* hattının *E* noktasında, diğer tarafa yönelik olarak *DEZ* açısına eşit bir *ZEH* açısı oluşturulur, *ED* uzunluğunda bir *EH* hattı ayrılır ve *EH* hattı çekilir.

Daire üzerinde herhangi bir *CH* yarıçapı alınır (*Şekil 50*). *C* noktasında *EHZ* açısına eşit bir *HCB* açısı oluşturulur ve *HB* hattı çekilir. Bu durumda ∠(*EHZ*) = ∠(*EDZ*) = ∠(*HBC*) = ∠(*HCB*) ve merkez açıları için ∠(*DEH*) = ∠(*CHB*) geçerlidir. Buna göre *DEH* açısı *CHB* daire parçası içerisine düşen tüm çevre açılarının iki katına eşittir. Şu halde *CHB* daire parçası *DEZ* açısını ve *CAB* daire parçası tamlayanı da *DET* açısını sınırlar.

***XXXIV. Önerme*: Bir dairede kesişen kirişlerde birinin parçalar çarpımının tanımladığı alan, diğerinin parçalar çarpımının tanımladığı alana eşittir.**

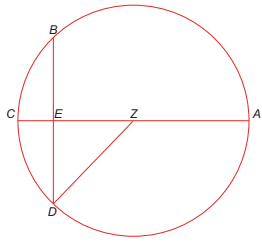
Z merkezli *AB* dairesinde *AC* ve *BD* kirişlerinin x herhangi bir *E* noktasında kesiştiklerini varsayalım (*Şekil 51-55*). Bu durumda (*AE* × *CE*) = (*BE* × *DE*) ilişkisi geçerlidir. Bu önermede aşağıdaki özel durumlar oluşabilir:

1- Kirişlerde biri ya da her ikisi çap olabilir. Veya her ikisi de çap olmayabilir.
2- Kirişler birbirine dik olabilir ya da olmayabilir.
3- Kirişlerden biri diğerini yarıya bölebilir ya da bölmeyebilir.

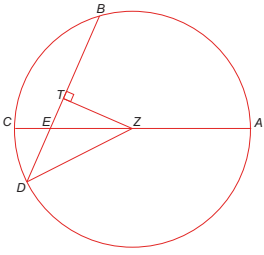
[Böylece] ortaya beş durum çıkar:

1- Her iki kirişin çap olması halinde önermenin geçerliliği açıkça görülür.

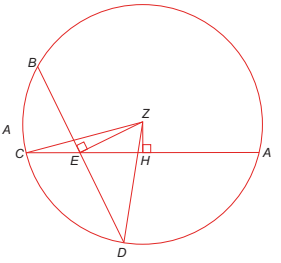
2- Kirişlerden biri çap olurken diğeri buna dik olabilir (*Şekil 51*). Bu durumda *AC* kirişinin çap ve *Z* noktası dairenin merkezi olmak üzere eğer *ZD* hattı çizilirse, *2.* Makale, *6. Önerme* gereği $[(AE \times CE) + ZE^2] = ZC^2 = ZD^2 = (ED^2 + EZ^2)$ ilişkileri yazılabilir. Buna göre $(AE \times CE) = ED^2$ ya da $(AE \times CE) = (BE \times DE)$ olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 51



Şekil 52



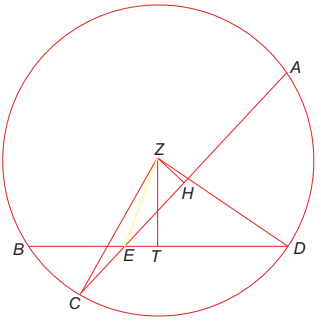
Şekil 53

3- Kirişlerden biri çap olurken diğeri buna dik olmayabilir (*Şekil 52*): Bu durumda *Z* daire merkezinden *BD* kirişine *ZT* diki inilir. Yine 2. Makale, *VI: Önerme* gereği $[(AE \times EC) + ZE^2] = ZC^2$ ya da $[(AE \times EC) + (ZT^2 + TE^2)] = ZD^2 = (ZT^2 + TD^2)$ veya $[(AE \times EC) + TE^2] = TD^2$ ilişkileri yazılabilir. Ancak *ZE* ve *TD* her iki kiriş için değişmediğinden aynı şekilde *BD* kirişi için de $[(BE \times ED) + TE^2] = TD^2$ ilişkisi geçerli olduğundan iki ifade eşitlenirse $(AE \times EC) = (BE \times ED)$ olması gerektiği kanıtlanır.

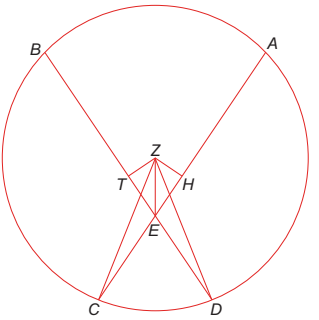
4- Her iki kiriş çap değildir, ancak biri; *AC* diğerini; *BD* yarıya böler (*Şekil 53*): Aynı şekilde *Z* daire merkezinden *AC* hattına *ZH* dikini inelim, *ZC* ve *ZD* hatlarını çekelim. Bu durumda *Z* noktasından *BD* kirişine inilen *ZT* diki *ZE* hattıyla çakışır ($ET \equiv 0$).

Burada da aşağıdaki ilişkiler geçerlidir: $[(AE \times EC) + EH^2] = HC^2$ ya da $[(AE \times EC) + (EH^2 + ZH^2)] = (ZC^2 + ZH^2)$ ya da $[(AE \times EC) + EH^2] = ZC^2 = ZD^2 = (ZE^2 + ED^2)$ ve neticede diğer kiriş için $ET \equiv 0$ ve $ZC = ZD$ olduğundan $(AE \times EC) = (BE \times ED)$ elde edilir.

5- Kirişlerin hiçbiri çap olmadığı gibi biri diğerini yarıya bölmez ise gerekli olan hatlar çekilir. Bu durumda daire merkezinden kirişlere çekilen *ZH* ve *ZT* dikleri *ZE* hattının ya bir tarafına (*Şekil 54*) ya da her iki tarafına düşebilir (*Şekil 55*).



Şekil 54



Şekil 55

Her iki halde *AC* kirişi için $[(AH \times HC) + DH^2] = DC^2$ ya da $[(AH \times HC) + (DH^2 + ED^2)] = (DC^2 + ED^2)$ veya $[(AH \times HC) + EH^2] = EC^2$. Aynı şekilde *BF* kirişi için $[(BH \times HF) + TH^2] = TF^2$ ya da $[(BH \times HF) + (TH^2 + TE^2)] = (TF^2 + TE^2)$ veya $[(BH \times HF) + EH^2] = EF^2 = EC^2$, ya da birlikte $(AH \times HC) = (BH \times HF)$ elde edilir.

Haccâc bu durumların her ikisini vermiş ise de Sâbit sadece sonuncu durumu kitabında vermiştir.

***XXXV. Önerme*: Bir dairenin dışındaki bir noktadan o daireyi kesen ve ona teğet olan iki hat çekildiğinde, kesen hattın noktayla daireye girdiği ve çıktığı mesafelerin çarpımı, noktayla teğet noktası arasındaki mesafenin karesine eşittir.**

ABC dairesi, daire dışındaki *D* noktası, daireyi kesen *DB* ve daireye teğet *DA* hatlarının verildiğini varsayalım. Bu durumda aşağıdaki özel durumlar oluşabilir (*Şekil 56*, *57*):

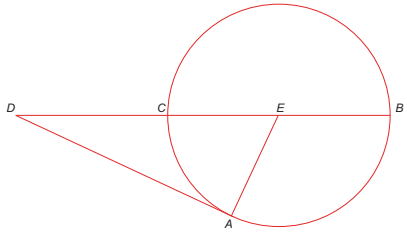
1- Kesen hat merkezden geçer ya da geçmez.
2- Kesen hat merkezden geçmez, teğet hatla merkez arasında bulunur ya da bulunmaz.

Oluşabilecek durumları sırayla inceleyelim:

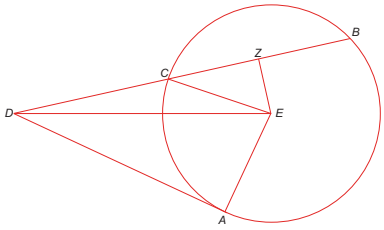
1- Kesen hattın daire merkezinden geçtiğini varsayalım ve *AE* hattını çekelim (*Şekil 56*). Bu durumda aşağıdaki ilişkiler yazılabilir: *2. Makale, 6. Önerme* gereği $(DB \times DC) + EC^2 = DE^2 = (AE^2 + AD^2) = (AD^2 + EC^2)$ ya da $(DB \times DC) = AD^2$.

2- Kesen hattın daire merkezinden geçmediğini varsayalım ve *DE*, *EC* hatlarını çekelim (*Şekil 57*). *DB* kesen hattına *E* merkezinden *EZ* dikini inelim. Bu durumda aşağıdaki ilişkiler yazılabilir: $(DB \times DC) + ZC^2 = DZ^2$ ya da $[(DB \times DC) + (ZC^2 + ZE^2)] = (DZ^2 + ZE^2)$ ya da $[(DB \times DC) + EC^2] = DE^2 = (AE^2 + DA^2) = (DA^2 + EC^2)$ ya da $(DB \times DC) = DA^2$.

Sâbit kitabında önermedeki sonuncu şekli kullanmıştır. Önermeden anlaşılacağı üzere herhangi bir noktadan bir daireye çekilen iki teğet eşittir.



Şekil 56



Şekil 57

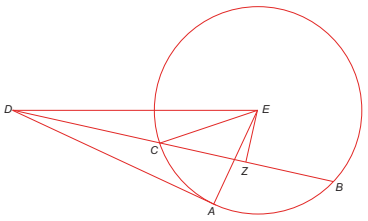
Not: Bu önerme aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

Eğer aynı noktada, daha önce çekilen iki hat dışında başka bir hat daha çekilirse, bu durumda da hattın noktayla daireyi terk ettiği nokta arasındaki mesafeyle daire dışındaki kısmın çarpımı, ilk hattaki çarpıma eşit olur (*Şekil 58*).

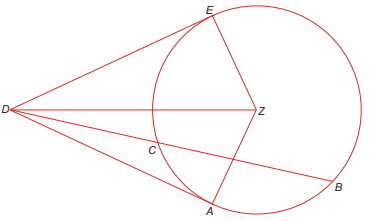
***XXXVI. Önerme*: Bir dairenin dışındaki bir noktadan o daireye biri kesen diğeri daireye teğet olan iki hat çekilir ve eğer kesen hattın noktayla daireye girdiği ve çıktığı mesafelerin çarpımı, noktayla daireye temas eden nokta arasındaki mesafenin karesine eşitse, temas eden hat daireye teğettir.**

ABC dairesi, daire dışındaki *D* noktası, daireyi kesen *DB* ve daireye temas eden *DA* hatlarının verildiğini varsayalım (*Şekil 59*). Eğer $DA^2 = (DC \times DB)$ ise *DA* hattının daireye teğet, diğer bir deyişle *DAZ* açısının dik olduğunu kanıtlamamız gerekir.

D noktasından daireye *DE* teğetini çizelim. *Z* daire merkezi ile *A* teğet noktasını birleştirelim. Koşul gereği $DA^2 = (DC \times DB)$ ilişkisi geçerlidir. Ayrıca *XXXV*. *Önerme* gereği $DE^2 = (DC \times DB)$ yazılabilir. Buna göre $DE = DA$, *DZ* ortak ve $EZ = AZ$ olduğundan $\Delta(DEZ) = \Delta(DAZ)$ ve $\angle(DEZ) = \angle(DAZ) = 90°$ olur. Buna göre *DA* hattı *AZ* hattına dik ve daireye teğettir.

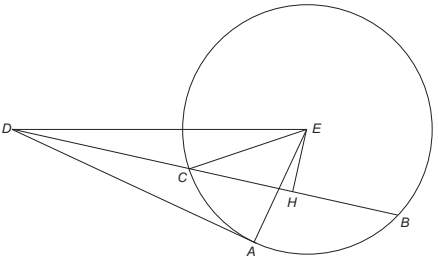


Şekil 58



Şekil 59

Not: Bu önerme Haccâc nüshasında bulunmamaktadır, Sâbit'in ilave ettiklerindendir." Önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır: Daire, daireyi kesen *DB* ve daireye temas eden *DA* hatlarını çizdikten sonra *DE* ve *EC* hatlarını, *E* daire merkezinden *DB* hattına *EH* dikini inelim (*Şekil 60*).



Şekil 60

Bu durumda $(DB \times DC) = DA^2$ ya da $[(DB \times DC) + EA^2] = DE^2$. Ancak koşul gereği $(DB \times DC) = DA^2$ olduğundan $(DA^2 + EA^2) = DE^2$ veya $\angle(DAE) = 90°$ olduğu görülür, diğer bir deyişle *DA* hattı daireye teğettir. Diğer durumlar önceki önermelerde olduğu gibi gerçekleşir.

Üçüncü makalenin sonu.

DÖRDÜNCÜ MAKALE

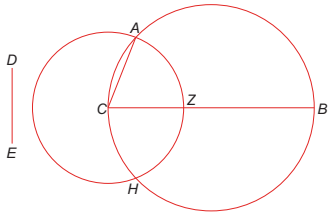
Bu makale 16 önermeden oluşur.

GİRİŞ

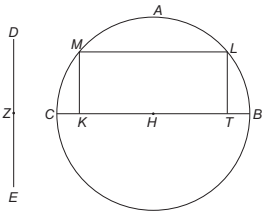
Eğer bir şekil başka bir şekli çevreliyor ve çevrelenen şeklin açıları çevreleyene temas ediyorsa, bu durumda çevrelenen şekil çevreleyen şekle içten teğet denir.

***I. Önerme*: Verilen bir dairede, çaptan daha büyük olmayan bir hatta eşit kirişin çizilmesi.**

ABC dairesi ve *DE* hattı verilmiş olsun (*Şekil 1*). İlkin dairenin *BC* çapı çizilir ve bunun üzerinde *ED* hattına eşit *CZ* hattı ayrılır. *C* noktasından *CZ* yarıçaplı *AZH* dairesi çizilir. *A* ve *C* noktaları birleştirilir, *CA* = *CZ* = *DE* olduğundan *CA* hattı aranan kiriştir.



Şekil 1



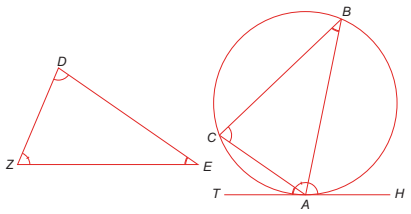
Şekil 2

Not: Söz konusu kirişin çizilmesine ilişkin bir yol daha vardır: *ED* hattı *Z* noktasında yarıya bölünür ve daire merkezi *H* noktasının her iki tarafına *DE* hattının yarısına eşit olan *HT* ve *HK* parçaları ayrılır (*Şekil 2*). Daha sonra *T* ve *K* noktalarından *TL* ve *KM* dikleri kaldırılır, bu diklerin daireyi kestiği *M* ve *L* noktaları birleştirilir. *ML* = *KT* = *DE* olduğundan bu hat istenen kiriştir.

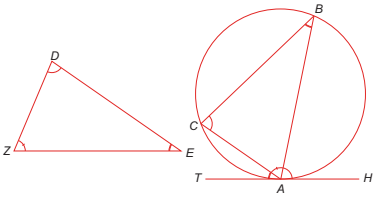
***II. Önerme*: Bir dairenin üzerine, verilen bir üçgenin açılarına eşit bir üçgen çizilmesi.**

ABC dairesi ve *DZE* üçgeninin verildiği varsayılır ve daireye *A* noktasında teğet olacak *TH* çizilir.(*Şekil 3*). Bundan sonra *A* noktasında *E* açısına eşit olan *HAB* açısı ve *Z* açısına eşit olan *TAC* açısı oluşturulur. *B* ve *C*

noktaları birleştirilirse $\angle(ACB) = \angle(BAH) = \angle(E)$, $\angle(ABC) = \angle(TAC) = \angle(Z)$ ve $\angle(BAC) = \angle(D)$ olduğundan ABC oluşturmak istediğimiz üçgendir.



Şekil 3



Şekil 4

Not: Söz konusu kirişin çizilmesine ilişkin bir yol daha vardır: D açısının DE ve DZ kenarları H ve T noktalarında yarıya bölündükten sonra bu noktalardan HK ve TK dikleri çekilir ve K noktasında kesiştirilir (*Şekil 4*). KD, KZ ve KE hatları çekilirse $KD = KZ = KE$ olur. Eğer dairenin merkezi L noktasıysa herhangi LA hattı çekilir, L noktasında DKE açısına eşit ALB açısı ve DKZ açısına eşit BLC açısı oluşturulursa geriye kalan EKZ açısı ALC açısına eşit olacaktır. Eğer AB, AC ve BC hatları çizilirse aranan ABC üçgeni elde edilmiş olur.

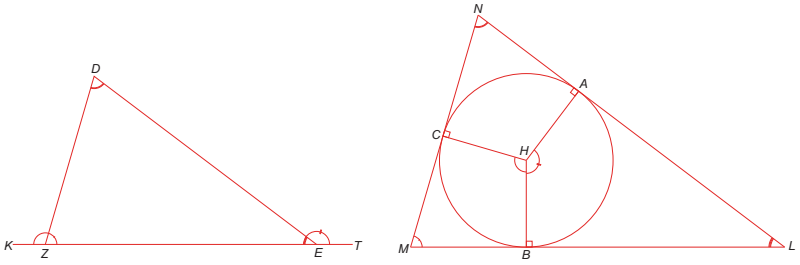
Kanıtı: DKE üçgeninde $[2.\angle(KDH) + \angle(DKE)] = 180°$ ve ALB üçgeninde $2.\angle(LAB) + \angle(ALB) = 180°$ ve $\angle(LAB) = \angle(KDE)$ olduğundan $\angle(LAB) = \angle(KED)$ olduğu ve benzer şekilde $\angle(LAC) = \angle(KEZ)$ olduğu anlaşılır. Diğer açıların eşitliği de benzer şekilde kanıtlanır.

***III. Önerme*: Bir daireye, verilen bir üçgenin açılarına eşit, dıştan teğet bir üçgen çizilmesi.**

H merkezli ABC dairesinin ve DEZ üçgeninin verildiğini varsayalım (*Şekil 5*). Üçgenin ZE kenarını T ve K yönüne uzatalım. Verilen dairede herhangi bir HB yarıçapı alalım. H merkezinde TED açısına eşit BHA ve KZD açısına eşit BHC açısını oluşturalım. Sonra dairenin A, B ve C noktalarından geçen teğetleri L, M ve N noktalarında kesişinceye kadar uzatalım. Oluşan LMN üçgeni aranan üçgendir.

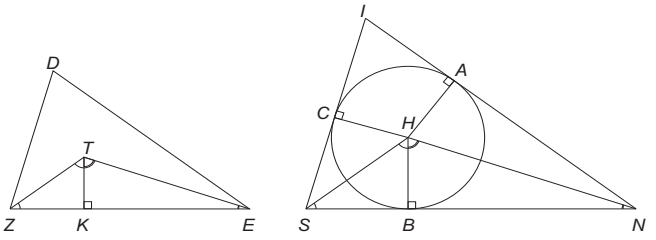
Kanıtı: Herhangi bir dörtgenin iç açılar toplamının 4 dik açıya eşit olduğu bilinir. $ALBH$ dörtgeninde iç açılar toplamından A ve B açıları

çıkarılırsa geriye kalan $\angle(H) + \angle(L) = 180°$ olur. Şu halde $[\angle(H) + \angle(L)] = [\angle(DET) + \angle(DEZ)]$ ya da $\angle(H) = \angle(DET)$ olduğundan $\angle(L) = \angle(DEZ)$ olduğu görülür. Aynı şekilde $\angle(N) = \angle(ZDE)$ ve $\angle(M) = \angle(DZE)$ olduğu kanıtlanabilir.



Şekil 5

Not: Bu üçgeni elde etmenin bir yolu daha vardır: Bunun için Z ve E açılarının ZT ve ET açıortayları alınır, bu iki hat T noktasında kesişir (*Şekil 6*). T noktasından EZ hattına TK diki inilir. Bundan sonra daire merkezinde KTE açısına eşit BHN açısı alınır. B noktasında daireye teğet çizilir. Teğet HN hattını N noktasında kesinceye kadar uzatılır. Aynı şekilde $\angle(NHS) = \angle(ETZ)$ alınır. HS hattı BN teğetiyle S noktasında kesişinceye kadar uzatılır. Böylece $\angle(NSH) = \angle(EZT)$ olur. N ve S noktalarından daireye NA ve SC teğetleri çizilir, bu teğetlerin uzantısı I noktasında kesişir. INS daireye dıştan teğet aranan üçgendir.



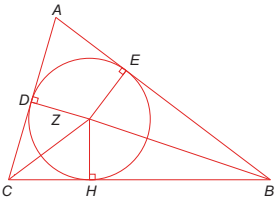
Şekil 6

Kanıtı: HA ve DC dikleri çekilirse $HA = HB$, HN ortak ve $\angle(HNB) = \angle(HNA)$ olduğundan $\Delta(HBN) = \Delta(HAN)$ geçerlidir. Şu halde $\angle(SNA) = \angle(ZED)$ ve aynı şekilde $\angle(NSC) = \angle(EZD)$ yazılabildiğine göre $\angle(D) = \angle(I)$ olduğu görülür.

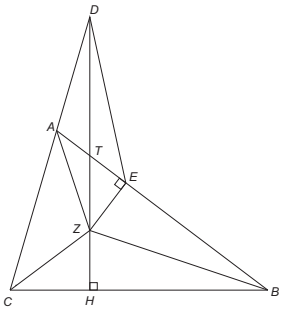
***IV. Önerme*: Verilen herhangi bir üçgene içten teğet bir daire çizilmesi.**

Amaç verilen herhangi bir *ABC* üçgenine içten teğet bir daire çizmektir (*Şekil 7*). *B* ve *C* açılarının açıortaylarını çizelim. Bu iki hat *Z* noktasında kesişir. *Z* noktasından üçgen kenarlarına *ZH*, *ZD* ve *ZE* diklerini inelim. Bu durumda *HZB* ve *EZB* üçgenlerinde ∠(*ZBE*) = ∠(*ZBH*) ve *ZB* ortak olduğundan *ZE* = *ZH* olur. Benzer şekilde *ZDC* ve *ZHC* üçgenlerinin eşitliğinden *ZD* = *ZH* olur. Şu halde *ZD* = *ZH* = *ZE* gereği *Z* noktasından yarıçapı üç dikten birine eşit olan *DHE* dairesi çizilirse amaca ulaşılmış olur.

Not: *Z* noktasından *ABC* üçgeni kenarlarına indirilen diklerin üçgenin dışına ya da köşelerine düşmesi mümkün değildir (*Şekil 8*). Bu husus *A* açısının dar, dik ya da geniş olmasına bağlı olarak farklı durumlar için tartışılabilir.



Şekil 7



Şekil 8

1- İlkin *A* açısının dar olduğunu ve *ZH* dikinin *AB* hattını *T* noktasında kestiğini varsayalım. Bu durumda *TAD* üçgeninde D*F* dik ve *TAD* bir geniş açı olacağından üçgenin iç açılar toplamı iki dik açıdan büyük olacağı için bu hatalıdır. Ayrıca *D* noktası *EA* hattı üzerine de düşemez. Aksi halde ∠(*ZAC*) < ∠(*BAC*) olması gerekirdi. Ancak *BAC* açısı dar ve *EAC* açısı dik olması gerekeceğinden bu imkânsızdır.

2- Eğer *A* açısı dikse, *D* noktasının dışa düşmesi halinde *TAD* üçgeninde iki açı dik olacağından bu mümkün değildir. Eğer *D* noktası *EA* hattı üzerine düşerse, dik olan *EAC* açısı *CAB* açısından küçük olması gerekir ki bu da yanlıştır çünkü *CAB* diktir.

3- Eğer A bir geniş açı ve D noktası üçgenin dışına düşmüş ise Z noktasından AB ve BC kenarlarına ZE ve ZH dikleri inilir. Bunlar BZT ve BEC üçgenlerinin içine düşer. Çünkü bu iki üçgenin bitişik taban açıları dardır. $\Delta(HZC) = \Delta(DZC)$ ve $\Delta(DZB) = \Delta(EZB)$ olduğundan $ZE = ZD = ZH$ olması gerekir. Bu nedenden dolayı dar açı olan ZDE geniş açı olan ZET açısına eşit olması, ayrıca ZED üçgeni ($ZE = ZD$ nedeniyle) ikizkenar olması gerekir ki bu mümkün değildir.

Eğer D noktası AE hattı üzerine düşseydi, bu durumda $ZA = ZE$ olması gerekirdi ki bu da $\angle(ZEA) = \angle(ZAE)$ olması anlamına gelir. Ancak ZAE açısı dik olduğundan bu imkânsızdır. Bu tartışma üçgendeki tüm açı ve kenarlar için geçerli olduğundan, bununla üçgen kenarlarına çekilen diklerin üçgen içinde kalacağı kanıtlanmış olur.

***V. Önerme*: Verilen bir üçgene dıştan teğet bir daire çizilmesi.**

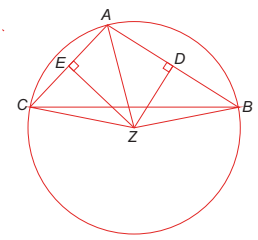
Amaç verilen herhangi bir ABC üçgenine dıştan teğet bir daire çizmektir (*Şekil 9*). Bunun için üçgenin AB ve AC kenarları D ve E noktalarında yarıya bölünür, bu noktalardan DZ ve EZ dikleri alınır ve Z noktasında kesişinceye kadar uzatılır. ZA, ZB ve ZC hatları çekilir. $AD = DB$, DZ ortak ve $\angle(ZDA) = \angle(ZDB)$ olduğundan $\Delta(ZDA) = \Delta(ZDB)$, aynı şekilde $\Delta(ZEC) = \Delta(ZEA)$ olduğundan $ZA = ZB = ZC$ olduğu görülür. Buna göre Z noktası merkez ve ZA, ZB ya da ZC yarıçap alınarak bir daire çizilirse amaçlanan dıştan teğet daire elde edilmiş olur.

Not: Bu önermede farklı durumların oluşabileceğini belirtelim:

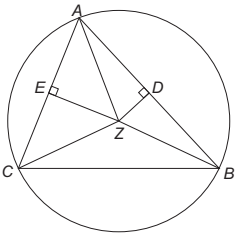
1- BAC açısı bir geniş açı olabilir: Bu durumda kenarortaylarına çizilen dikler üçgenin dışındaki bir Z noktasında kesişir (*Şekil 9*).

2- BAC açısı bir dar açı ise Z noktası dairenin içine düşer (*Şekil 10*).

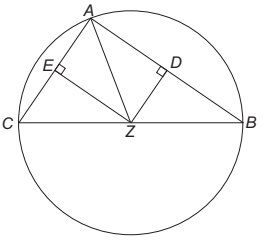
3- BAC açısı bir dik açıysa, bu durumda Z noktası BC kenarı ortasında bulunur (*Şekil 11*).



Şekil 9



Şekil 10

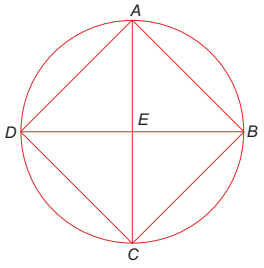


Şekil 11

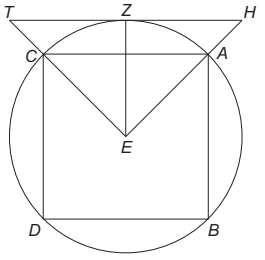
***VI. Önerme*: Verilen bir daireye içten teğet bir kare çizilmesi.**

E merkezli *ABCD* dairesi verildiğini varsayalım (*Şekil 12*). Dairede birbirine dik *AC* ve *BD* çapları ve *AB*, *BC*, *CD* ve *DA* kirişleri çizilirse, *DA* = *AB* = *BC* = *CD* ve elde edilen tüm açılar dik olduğundan, aranan *ABCD* karesi elde edilmiş olur.

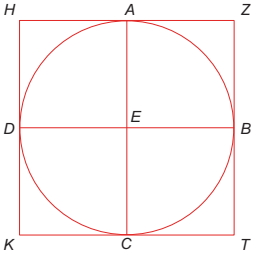
Not: Bir daireye içten teğet bir kare çizmenin başka bir yolu daha vardır. Dairenin *ZE* yarıçapı ve ona *Z* noktasında teğet *TZH* hattı çizilir (*Şekil 13*). Teğet hattı üzerinde *ZT* = *ZH* = *EZ* kısımları ayrılır *ET* ve *EH* hatları çizilir. Bu durumda *T* ve *H* açıları 45° ve *TEH* açısı 90° olur. Şu halde *AC* yayı daire çevresinin ¼'ü kadardır. *C* ve *A* noktaları birleştirilir ve *CA* hattına eşit *AB* ve *CD* kirişleri çizilir, *B* ve *D* noktaları birleştirilirse, kenarlar dairenin çeyreğine eşit ve açılar dairenin yarısına yerleştirildiği için amaçlanan kare elde edilmiş olur.



Şekil 12



Şekil 13



Şekil 14

***VII. Önerme*: Verilen bir daireye dıştan teğet bir kare çizilmesi.**

Verilen bir *ABCD* dairesine birbirine dik iki *AC* ve *BD* çapı ve bunların uçlarına teğet 4 hat çekilir (*Şekil 14*). Elde edilen *HZTK* karesi aranan daireye dıştan teğettir. ∠(*AEB*) = ∠(*EBZ*) = ∠(*EAZ*) = 90° olduğu için *AZB* açısı da diktir. Ayrıca *EA* = *EB* olduğundan *AEBZ* dörtgeni de bir karedir. Aynı şekilde diğer 3 dörtgenin de kare olduğu kanıtlanabileceğine göre neticede *HZTK* dörtgeninin de kare olduğu kanıtlanmış olur.

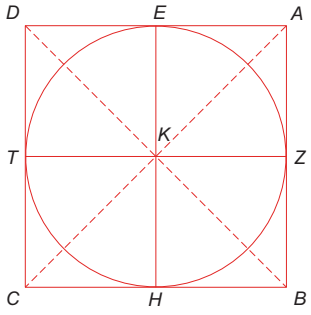
Not: Daireye dıştan teğet bir kare çizmenin başka bir yolu daha vardır. Herhangi bir *AE* yarıçapının *A* noktasından daireye teğet bir hat çekilir ve üzerinde *AE* hattına eşit *AH* ve *AZ* hatları ayrılır (*Şekil 14*). *H* ve *Z*

noktalarından *HZ* hattına eşit *HK* ve *ZT* dikleri çekilir. Elde edilen *HZTK* dörtgeni bir karedir.

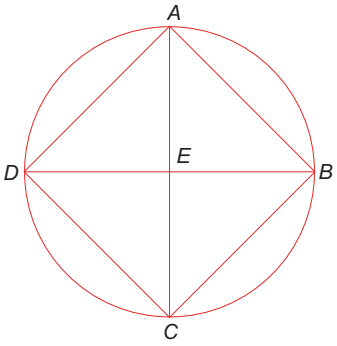
Eğer *TZ* teğetine *EB* diki çekilirse *AZ* =*AE* ve *AE* yarıçap olduğundan *EB* = *AZ* olur. Aynı şekilde *HK* hattına *ED* diki ve *TK* hattına *EC* diki çekilirse *HK* ve *KT* hatlarının daireye teğet oldukları gösterilebilir. Buna göre *TB* = *CE* ya da *TB* dairenin yarıçapına eşittir.

***VIII. Önerme*: Verilen bir kareye içten teğet bir daire çizilmesi.**

Bir *ABCD* karesinin verildiğini varsayalım, amaç bu kareye içten teğet bir daire çizmektir (*Şekil 15*). Bunun için *AB* ve *AD* hatları *Z* ve *E* noktalarında yarıya bölünerek bu noktalardan *ZT* ve *EH* dikleri çekilir. *K* noktasında kesişen bu iki dik *ABCD* karesini 4 eşit kareye böler. Bu karelerde karşılıklı ve komşu kenarlar eşittir: *KT* = *KZ* = *KE* = *KH*. Eğer K noktası merkez ve bu 4 eşit hattan biri yarıçap olmak üzere bir daire çizilirse amaca ulaşılmış olur.



Şekil 15



Şekil 16

Not: Bu önermeyi gerçeklemenin bir yolu daha vardır. Karenin köşegenleri çizilirse birbirine eşit 4 ikizkenar üçgen elde edilir (*Şekil 15*). Köşegenlerin kesiştiği noktadan karenin 4 kenarına dik inilirse, bunlar birbirine eşit olacağından daire elde edilmiş olur.

***IX. Önerme*: Verilen bir kareye dıştan teğet bir daire çizilmesi.**

Verilen *ABCD* karesine dıştan teğet bir daire çizilmek istenmektedir (*Şekil 16*). Bunun için karenin *E* noktasında kesişen *AC* ve *BD* köşegenleri

çekildikten sonra $EA = EB = EC = ED$ olacağı açıktır. Ayrıca karenin kenarlarıyla A, B, C, D noktalarındaki $\angle(EAB)$, $\angle(EBA)$, $\angle(EBC)$, $\angle(ECB)$, $\angle(ECD)$, $\angle(EDC)$, $\angle(EDA)$ ve $\angle(EAD)$ açıları da 45°'ye eşittir. E noktası merkez olmak üzere bu 4 hattan biri yarıçap seçilerek bir daire çizilirse amaçlanan dıştan teğet daire elde edilmiş olur.

***X. Önerme*: Öyle bir ikizkenar üçgen oluşturmak istenmektedir ki taban açılarının her biri tepe açısının iki katı olsun.**[1]

AB hattının verildiğini varsayalım ve bu hat parçasını C noktasında $(AB \times BC) = AC^2$ olacak şekilde bölelim (*Şekil 17*).[2] A noktasından AB yarıçaplı BDE dairesini ve yukarıdaki ilişkiyi sağlayan AC hattına eşit BD kirişini çizelim. A ve D noktalarını birleştirirsek elde edilen ABD üçgeni önermenin hedeflediği koşulu sağlar.

Kanıtı: Kanıtlamak için CD hattı çekilir ve ACD üçgenine dıştan teğet ACD dairesini çizmek gerekir. Bu daire A ve B noktalarından geçen AB hattını C noktasında keser. Koşul gereği $(AB \times BC) = AC^2 = BD^2$ olduğundan DB hattı bu ACD dairesine D noktasında teğettir. Bu nedenden dolayı $\angle(CAD) = \angle(BDC)$ ya da $[\angle(CAD) + \angle(CDA)] = [\angle(BDC) + \angle(CDA)]$ ve $AB = AD$ olduğundan diğer bir deyişle $\angle(BCD) = \angle(BDA)$ ya da $\angle(BCD) = \angle(CBD)$ olduğu görülür. Şu halde $DB = DC$ ya da $AC = DC$ olduğundan BDA ve BDC üçgenlerinde $\angle(BDC) = \angle(BDA)$ ve CBD açısı ortak olduğundan $\angle(BAD) = \angle(CDA) = \angle(CDB)$ yazılabilir. Neticede ister ABD ister ADB açısı BAD merkez açısının 2 katına eşittir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır: E merkezli keyfi yarıçaplı ABC dairesinin verildiğini varsayalım (*Şekil 18*). Daire üzerinde herhangi bir A noktası alalım ve bu noktada daireye teğet çizerek bu teğet üzerinde çizilen dairenin çapı kadar bir AD $(= BC)$ kısım ayıralım. Elde edilen D noktasıyla E daire merkezini birleştirip C noktasına kadar uzatalım. B noktasından BC yarıçaplı CZH yarı dairesini çizelim. H noktası, $BH = BC = AD > BD$ olduğundan, BD hattının dışına düşer. Sonra CD

1 Bu durumda elde edilen ikizkenar üçgenin tepe açısı 36° ve taban açıları 72° olacağından bu üçgenin geometrik elde edilmesi düzgün ongen ve beşgenlerin geometrik çizilebilirliğini sağlar.

2 Bunun için 2. Makale, XI. Önermedeki yönteme başvurmak gerekir.

hattını H noktasına kadar uzatalım ve merkezi D noktası olmak üzere AD yarıçaplı AZ yayını çizelim. Bu yay $AD > DH$ ya da $BH > DH$ olduğundan, CZH dairesini Z noktasında keser. ZC, ZB ve ZD hatlarını çekelim: burada $BC = ZB = AD = ZD$ olduğundan ZBD bir ikizkenar üçgendir. Eğer Z noktasından CH hattına ZT diki inilirse bu dik BF hattını yarıya böler. ZTC açısı dik açı olduğundan ZBC açısı geniş açıdır.

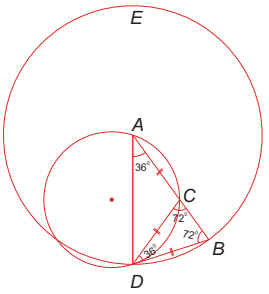
CZT ve BZT dik üçgenleri için aşağıdaki ilişkiler yazılabilir:

$$ZC^2 = (CT^2 + ZT^2) = [(CB + BT)^2 + (ZB^2 - BT^2)] = [CB^2 + ZB^2 + 2.(CB \times BT)]$$
$$= [CB^2 + ZB^2 + (CB \times BD)].$$

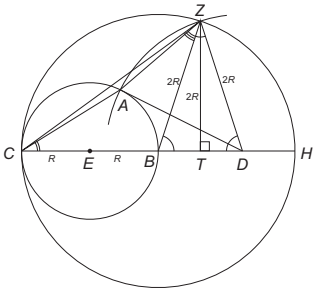
Eğer $ZB^2 = CB^2 = AD^2 = (BD \times CD) = [BD \times (CB + BD)] = [BD^2 + (BD \times CB)]$ ya da $BD^2 = [ZB^2 - (BD \times CB)]$ olduğu göz önünde bulundurulursa CD^2 için aşağıdaki ilişkiler yazılabilir:

$$CD^2 = (CB + BD)^2 = [CB^2 + BD^2 + 2.(CB \times BD)]$$
$$= [CB^2 + ZB^2 - (BD \times CB) + 2.(CB \times BD)] = [CB^2 + ZB^2 + (CB \times BD)].$$

Buna göre $ZC = CD$ olduğundan BZC, ZBD ve CZD üçgenlerinin üçü de ikizkenardır. $\angle(CZD) = \angle(CDZ) = \angle(ZBD)$, $\angle(ZCB) = \angle(CZB)$ ve ayrıca CZB üçgeninin dış açısı $\angle(ZBT) = [\angle(ZCB) + \angle(CZB)] = 2.\angle(ZCB)$ olduğundan $\angle(CZD) = \angle(CDZ) = 2.\angle(ZCB)$ ilişkisinin geçerli olduğu ve CZE üçgeninin önermede aranan üçgen olduğu kanıtlanmış olur. Bu üçgen beşgen üçgeni olarak adlandırılır.



Şekil 17

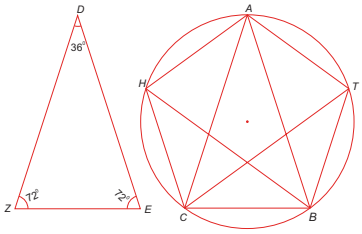


Şekil 18

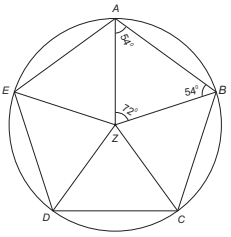
***XI. Önerme*: Verilen bir dairede içten teğet düzgün bir beşgen oluşturmak.**

Amaç verilmiş olan bir *ATBCH* dairesine içten teğet düzgün beşgen çizmektir (*Şekil 19*). İlkin bir *DEZ* beşgen üçgeni[1] oluşturulur, sonra verilen *ATBCH* dairesi içine açıları beşgen üçgenine eşit olan *ABC* üçgeni çizilir. Daha sonra *ABC* ve *ACB* açılarının *BH* ve *CT* açıortayları çizilir, *AH*, *HC*, *AT* ve *TB* hatları çekilir. *ATBCH* elde edilmek istenen beşgendir.

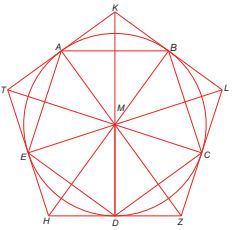
Kanıtı: Gerçekten de ∠(*BAC*) = ∠(*ABH*) = ∠(*HBC*), ∠(*ACT*) = ∠(*TCB*) olduğu gibi, bu beşgenin içten teğet olduğu yay ve bunları gören açıların tümü de birbirine eşittir.



Şekil 19



Şekil 20



Şekil 21

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır; verilen dairede bir *AZ* yarıçapı çizilir ve *Z* noktasında bir beşgen üçgeninin taban açısına (= 72°eşit) bir ∠(*AZB*) açısı oluşturulur (*Şekil 20*). Daha sonra kenarları bitişik olmak üzere *BZC*, *CZD* ve *DZE* açıları çizilir. Bu 4 açının her biri 4/5 90° olduğundan bunların toplamı 16/5 90° eder. Buna göre geriye kalan ∠(*EZA*) = (4 90° - 16/5 90°) = 4/5 90° = 72° olur. Böylece elde edilen bu 5 açının gördüğü yay ve kirişler birbirine eşittir. Eğer *AB*, *BC*, *CD*, *DE* ve *EA* hatları çekilirse çizmek istediğimiz beşgen elde edilmiş olur. Beşgenin kenar ve açıları birbirine eşittir.

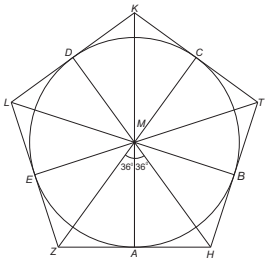
***XII. Önerme*: Verilen bir dairede dıştan teğet düzgün bir beşgen oluşturmak.**

Önceki önerme gereği verilen *M* merkezli daireye içten teğet düzgün bir *ABCDE* beşgeni oluşturulur (*Şekil 21*). Bu beşgenin tepe noktalarından daireye 5 teğet hat çekilir. Bu hatlar *K*, *L*, *Z*, *H* ve *T* noktalarında kesişir ve amaçlanan düzgün beşgen elde edilir.

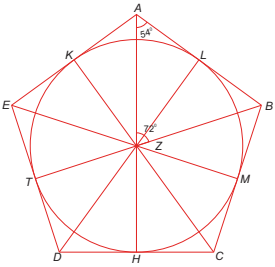
1 Beşgen ikizkenar üçgeninin taban açıları 72°, tepe açısı 36°'dir (10. Önerme'ye bakınız).

Kanıtı: Elde edilen iki beşgenin tepe noktalarını 10 hatla, verilen *M* daire merkeziyle birleştirelim. *K* noktasında daireye teğet iki hat çekildiğinden *KA* = *KB*, *MA* = *MB* yarıçap ve *KM* ortak olduğundan Δ(*MKA*) = Δ(*MKB*) olur. Buna göre diğer tüm üçgenlerde de uygun açılar eşittir. Şu halde ∠(*AKM*) = ∠(*BKM*) = [∠(*AKB*)]/2. Ayrıca *BK* = *BL*, *MB* ortak ve ∠(*KBM*) = ∠(*MBL*) = 90° olduğundan Δ(*KMB*) = Δ(*LMB*) olduğu görülür. Neticede söz konusu 10 üçgende uygun taraf ve açılar birbirine eşittir. Kanıtlamak istediğimiz gibi bunların ikişer eşit bitişik tabanları dıştan teğet düzgün beşgenin kenarlarını oluşturur.

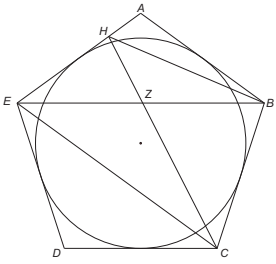
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır; Herhangi *AM* yarıçaplı bir dairede *A* noktasında *ZH* teğeti çizilir (*Şekil 22*). *AM* üzerine beşgen üçgenin tepe açısına eşit *AMZ* ve *AMH* (= 36°) açıları oluşturulur. *ZM* ve *HM* hatları *ZH* teğetiyle kesişinceye kadar uzatılır. Bu durumda ∠(*ZMH*) = (4/5 90°) = 72° olur. Sonra *ZMH* açısına eşit *HMT*; *TMK*, *KML* ve *LMZ* açıları oluşturulur ve neticede daire 5 eşit kısma bölünmüş olur. *ZH* hattına eşit *HT*, *TK*, *KL* ve *LZ* hatları çekilir, elde edilen beşgende kenar ve açılar eşit olur. Nihayet *AM* yarıçapına eşit *MB*, *MC*, *MD* ve *ME* dikleri indirilir ve amaçlanan dıştan teğet düzgün beşgen elde edilmiş olur.



Şekil 22



Şekil 23



Şekil 24

***XIII. Önerme*: Verilen bir düzgün beşgene içten teğet bir daire oluşturmak.**

Verilen bir *ABCDE* beşgenine içten teğet bir daire çizilmek istenmektedir (*Şekil 23*). *C* ve *B* açılarının *Z* noktasında kesişen *CZ* ve *BZ* açıortayları çizilir. Elde edilen *Z* noktasından beşgen kenarlarına birbirine eşit *ZL*, *ZM*, *ZH*, *ZT* ve *ZK* dikleri inilir. *ZA*, *ZB* ve *ZC* hatları çizilir. *AB* = *BC*,

ZB ortak, ∠(*ZAB*) = ∠(*ABZ*) ve ∠(*ZBC*) = ∠(*BCZ*) olduğundan Δ(*ABZ*) = Δ(*BCZ*) ve taban açıların her biri beşgen kenar açısının yarısına eşittir (108°/2 = 54°). Buna göre beşgeni oluşturan 5 üçgenin taban, kenar uzunlukları ile taban ve tepe açıları birbirine eşittir. Ayrıca ∠(*ZAK*) = ∠(*ZAL*), ∠(*ZKA*) = ∠(*ZLA*) = 90° ve *AZ* ortak olduğundan Δ(*ZAL*) = Δ(*ZAK*) ve *ZL* = *ZK* olduğu ve aynı şekilde diğer diklerin de eşit olduğunu göstermek mümkündür. Şu halde *Z* noktası merkez, bu diklerden biri yarıçap alınır ve *KLMHT* dairesi çizilirse isteğimiz yerine gelmiş olur.

Not 1: *C* ve *B* açıortaylarının beşgenin içinde kesişeceğini açıklamamız gerekir (*Şekil 24*).[1] Bu durumda *C* açıortay hattı uzatıldığında, iki hat bir alanı çevreleyemeyeceği beliti (*aksiyomu*) nedeniyle, bu hat ne *AB* hattını kesebilir ne de *A* noktasından geçebilir.

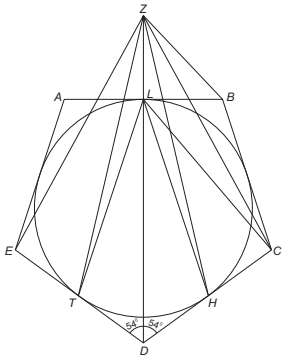
Ayrıca *C* açıortayı *AE* hattını da kesemez. Bunun aksini düşünerek bir an bu hattı *H* noktasında kestiğini varsayalım. Bu durumda *BH* ve *CH* hatlarını çekelim. *AB* = *CB*, *CH* ortak ve ∠(*ABH*) = ∠(*HBC*) olacağından Δ(*ABH*) = Δ(*BCH*) olması gerekir. Üçgenlerin eşitliği nedeniyle ∠(*HAB*) = ∠(*BCH*) olmalı, ne var ki ∠(*HAB*) = ∠(*BCD*) olduğundan bu varsayım geçersizdir. Aynı şekilde *BZ* hattı *E* noktasından da geçemez çünkü bu durumda *EB* ve *EC* hatları çekildiğinde ∠(*EAB*) = ∠(*ECB*) olması gerekir ki bu da yanlıştır. Benzer bir mantık yürütülerek *CZ* hattının *CD* hattını kesemeyeceği ya da *D* noktasından geçemeyeceği kanıtlanabilir. Zorunlu olarak *CZ* hattı sadece *AE* hattını kesebilir.

Aynı şekilde *BZ* açıortayının da ancak *ED* hattını kesebileceği gösterilebileceğinden, *CZ* ve *BZ* açıortayları ancak beşgenin içindeki bir noktada kesişebilir.

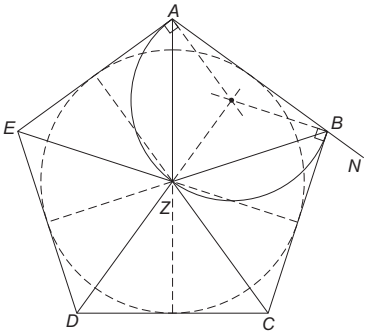
Not 2: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. İki komşu kenarı yarıya bölerek onlara dik *HZ* ve *TZ* hatlarını çekelim (*Şekil 25*). Bu dik hatlar beşgenin içinde kesişmelidir. *HZ* diki beşgenin *BC* kenarı ya da *B* noktasından geçemez, aksi halde *ZCH* üçgeninde biri *ZCH* geniş diğeri *ZHC* dik iki açı bulunması gerekirdi. Aynı nedenden dolayı *TE* diki de *AE* kenarı ya da *A* noktasından geçemez. Şu halde bu iki dik eğer beşgen içinde

1 Bu şekilde harflerin konumu bir önceki *Şekil 24*'le uyum sağlamak amacıyla, özgün şekle göre değiştirilmiştir.

kesişmiyorsa ya *A* ve *B* noktaları dışında *AB* hattı üzerinde ya da *AB* hattını kestikten sonra beşgenin dışında bir noktada kesişmeleri gerekir. Bu her iki son durumda da *ZH* ve *ZT* hatları çekildikten sonra *DH* = *DT* ve *ZD* ortak olduğundan Δ(*ZDH*) = Δ(*ZDT*) olur. Şu halde beşgen köşe açılarının yarısına eşit ∠(*ZDH*) = ∠(*ZDT*) = 54° geçerlidir. Aynı nedenden dolayı Δ(*ZHC*) = Δ(*HD*) ve ∠(*ZHC*) = ∠(*ZHD*) = 54° olması gerekir. Böylece geriye kalan ∠(*ZCB*) = 54° ilişkisini sağlar. Nihayet ∠(*ZCB*) = ∠(*ZCD*), *CB* = *CD* ve *ZC* ortak olduğundan Δ(*ZCB*) = Δ(*ZCD*) olur. Neticede ∠(*CBZ*) = ∠(*CDZ*) = 54°olması gerekir. Ne var ki ∠(*CBZ*) > ∠(*CBA*) = 108° olması gerektiğinden bu da yanlıştır. Böylece iki dik beşgenin içinde kesişmelidir. Sonra *Z* noktasından diğer kenarlara dikler indirip bunların eşitliğini kanıtladıktan sonra yukarıda olduğu gibi daireyi çizeriz.



Şekil 25



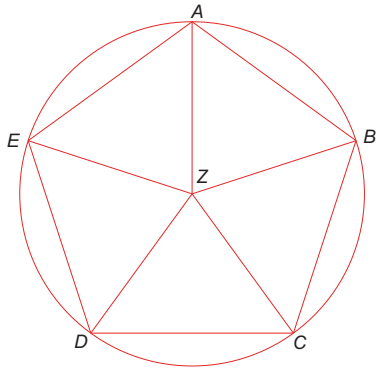
Şekil 26

Not 3: Başka bir kanıtlama yolu; *AB* hattını N noktasına kadar uzatalım ve *CBN* açısının teğet olduğu *AZB* yayını çizelim (*Şekil 26*).[1] Bu yayı *Z* noktasında yarıya bölerek *EA* ve *EB* hatlarını çizelim. Bu durumda *ABZ* üçgeninde [∠(*ZAB*) + ∠(*ZBA*) + ∠(*AZB*)] = 180°, [∠(*ABZ*) + ∠(*ZBC*) + ∠(*CBN*)] = 180° ifadeleri eşitlenir ve ∠(*ZBN*) = [∠(*ZBC*) + ∠(*CBN*) = [∠(*ZAB*) + ∠(*AZB*)] olduğu göz önünde bulundurulursa ∠(*ZBA*) = ∠(*ABZ*) olduğu anlaşılır. Eğer *ZC*, *ZD*, *ZE* hatları çekilirse birbirine eşit beş üçgen ortaya çıkar. *Z* merkezinden kenarlara dik inilir ve yukarıda olduğu gibi içten teğet daire çizilir.

1 Bunun için *A* ve *B* noktalarında beşgenin *BC* ve *AE* kenarlarına dik doğrular çizmek ve bu doğruları kesiştirerek dairenin merkezini belirlemek gerekir.

***XIV. Önerme*: Verilen bir düzgün beşgene dıştan teğet bir daire oluşturmak.**

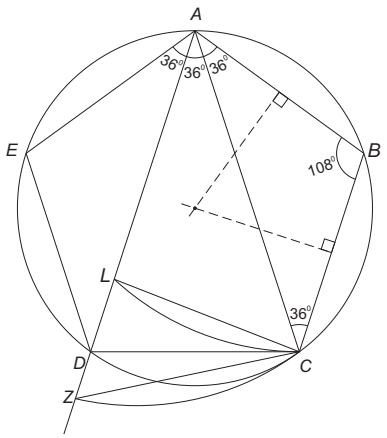
Amaç verilen bir *ABCDE* beşgenine dıştan teğet bir daire çizmektir (*Şekil 27*). Bunun için *C* ve *D* açılarının açıortayları çizilir. Bu iki hat *Z* noktasında kesişir. *Z* noktasından *ZB*, *ZA* ve *ZE* hatları çekilir. Elde edilen üçgenler eşit olduğundan *Z* noktasından çıkan hatların eşit olduğu sonucuna varılır. Eğer bu hatlardan biri yarıçap alınır ve *Z* merkezli bir daire çizilirse amaçlanan hedefe ulaşılmış olur.



Şekil 27

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. *AC* ve *AD* hatları çekilir (*Şekil 28*). Oluşan *ABC* üçgenine dıştan teğet çizilir. Bu daire aynı zamanda verilen beşgene de dıştan teğettir. Çünkü beşgen 3 üçgene bölünmüş ve bütün açıların toplamı 3 × 180° = 6 × 90°, her açı ise 6/5 90° = 108° olarak elde edilir. ∠(*CAB*) = ∠(*ACB*) = (2/5 90°) = 36° ve ∠(*EAD*) = ∠(*CAD*) = 36°, ∠(*BAD*) = (4/5 90°) = 72°, [∠(*BAD*) + ∠(*BCD*)] = (5 × 36°) = 180° aynı şekilde [∠(*CBA*) + ∠(*CDA*)] = (5 × 36°) = 180° olduğundan beşgene dıştan teğet daire *D* noktasından geçer.

Eğer bir an dairenin *D* noktasından değil de *AD* hattını *L* noktasında kestiğini varsayarsak, *CL* hattını çektiğimizde ∠(*ALC*) = ∠(*ADC*) olması ya da [∠(*CBA*) + ∠(*ALC*)] = (5 × 36°) = 180° olması gerekir ki bu yanlıştır. Ayrıca dairenin *AD* hattını *Z* ve noktasında da kesemeyeceği kanıtlanabilir. Aynı şekilde dairenin *E* noktasından geçtiği de kanıtlanabilir.

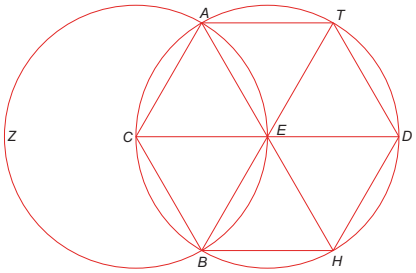


Şekil 28

***XV. Önerme*: Verilen bir dairede içten teğet düzgün bir altıgen oluşturmak.**

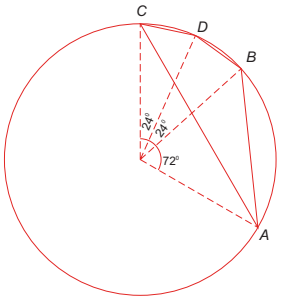
E merkezli, *CD* çaplı bir *ADBC* dairesinin verildiğini varsayalım. *C* noktasından *CE* yarıçaplı daire çizilir, *AE* ve *BE* hatları *H* ve *T* noktasına kadar uzatılır (*Şekil 29*). *AT*, *TD*, *DH*, *HB*, *BC* ve *CA* kirişleri çizilir. Elde edilen *ATDHBC* altıgeni aranan içten teğet düzgün altıgendir.

Kanıtı: Δ(*EAC*) ve Δ(*EBC*) eşkenar üçgenlerdir ve üçgenlerde her bir açı 2/3 90° = 60°'ye eşittir. ∠(*BEC*) ile karşılıklı olan ∠(*DET*) = 60°, ayrıca [∠(*AEC*) + ∠(*AET*) + ∠(*TED*)] = 180° olduğundan ∠(*AET*) = 60°, [∠(*AEB*) + ∠(*AET*)] = 180°, ∠(*AET*) ve ∠(*AEC*) ile karşılıklı ∠(*DEH*) = ∠(*BEH*) = 60°'ye eşittir. Şu halde kanıtlamak istediğimiz gibi *E* merkez noktası etrafındaki tüm açılar, onların gördüğü çevre yay ve kirişler eşittir. Ayrıca altıgen kenarının daire yarıçapına eşit olduğunu da kaydedelim. Dairenin dışına da altıgen çizmek mümkündür. Dairenin içi ya da dışına teğet altıgen çekmenin kuralı beşgen oluşturma kuralından farklı değildir.



Şekil 29

Not: Eğer dairenin içine çap çekmeden bir düzgün altıgen çizmek istenirse, herhangi bir *AE* yarıçapı alınır ve bu hat üzerinde eşkenar bir *AEC* üçgeni oluşturulur. *CE* = *AE* olduğundan üçgenin *C* noktası daire üzerine düşer. Sonra *AE* yarıçapı üzerine *AEC* üçgenine eşit başka bir üçgen kurulur ve bu işlem altıgen tamamlanana kadar sürdürülür. Bu üçgenlerin tüm açıları 2/3 90° = 60°'ye eşittir.



Şekil 30

***XVI. Önerme*: Verilen bir dairede içten teğet düzgün bir onbeşgen oluşturmak.**

Amaç verilen bir *ABC* dairesine içten teğet bir onbeşgen çizmektir (*Şekil 30*). Bunun için bu daire içine düzgün bir beşgen ve üçgenin kenarına eşit olan *AB* ve *AC* kirişlerini çizmek gerekir. Eğer daire çevresi 15 kısma bölünürse (360°/15 = 24°) bunlardan 3'ü *AB* (3×24° = 72°), 5'i *AC* (5×24° = 120°) ve 2'si *CB* yayı üzerine düşer (2×24° = 48°). Eğer *CB* yayı 2'ye bölünürse *CD* ya da *DB* yayı çevrenin 1/15'ine karşı düşer. *CD* ve *DB* kirişleri çizilir. Eğer daire çevresinde bu uzunlukta toplam 15 kiriş çizilirse amaçlandığı gibi daireye içten teğet düzgün bir onbeşgen elde edilmiş olur.

BEŞİNCİ MAKALE

Bu makale 25 önermeden oluşur.

GİRİŞ

İki niceliğin (*kemiyet*) küçük olanı büyüğün parçasıdır. Büyük nicelik küçüğün katıdır.

Oran (*nispet*): İki niceliğin ya da büyüklüğün birbirine göre aynı türden ifadesidir (*a*/*b*). Sâbit'e göre iki nicelik aynı miktarla çarpılırsa, nicelikler ölçü değeri oranında arttırıldığı anlamına geldiğinden oran değişmez.[1]

Orantılı (*tenasüp*): Oranların benzeşmesi anlamına gelir (*a*/*b* = *c*/*d*). Eşit orantılı oranlarda birinciyle üçüncü, ikinciyle dördüncü nicelik aynı büyüklükle çarpılır ya da bölünürse oran değişmez. Bu işlem sonucunda nicelikler artar, azalır ya da aynı kalır. Oranlarda niceliklerin ardışık özelliği korunmalıdır. Nicelikler arasındaki oran ilişkisine bir örnek vermek gerekirse, birincinin belirli bir misli ikincinin belirli başka bir mislinden fazla, lakin üçüncünün belirli bir misli dördüncünün belirli başka bir mislinden fazla değilse, bu durumda birincinin ikinciye oranı, üçüncünün dördüncüye oranından büyük olur.[2]

Orantılarda bir nicelik tekrarlanabileceğinden, en az üç nicelik bulunur. Uygun orantılı üç nicelikte, birincinin sonuncuya oranı, birincinin ikinciye oranının karesi kadardır.[3] Aynı şekilde peş peşe uygun orantılı dört nicelikte birincinin sonuncuya oranı, birincinin ikinciye olan oranın küpüne eşittir.[4]

Uygun oran (***en-nisbet ve'l-nazîr***)**:** Öncekinin sonrakiyle oranlandığı orandır (*a*/*b*).

Ters oran (***'aksu'n-nisbet)***: Sonrakinin öncekiyle oranlandığı orandır (*b*/*a*).

---

1 Eğer *m* orantı katsayısı ve *p* niceliklerin çarpım miktarıysa, orantılı *a*/*b* = *m* niceliklerde, *a*/*b* = *(a* × *p)*/*(b* × *p)* = *m* nedeniyle oran değişmez.

2 Bu örnek cebirsel (*a* × *m*) > (*b* × *n*) ve (*c* × *m*) < (*d* × *n*) ise *a*/*b* > *c*/*d* olması gerektiği anlamına gelir.

3 Orantı katsayısı *m* olmak üzere, uygun orantılı üç büyüklük cebirsel olarak *a*/*b* = *b*/*c* = *m* ya da *a* = *(b* × *m) ve c* = *b*/*m* olduğundan $a/c = m^{2} = (a/b)^{2}$ yazılabilir.

4 Uygun orantılı dört büyüklük için *a*/*b* = *b*/*c* = *c*/*d* ve $a/d = (a/b)^{3}$ ilişkileri geçerlidir.

Değişim oranı (***ebdâlu'n-nisbet***)**:** Öncekinin öncekiyle ve sonrakinin sonrakiyle oranlandığı orandır.

Toplam oranı (***terkîbü'n-nisbet***)**:** Öncekinin öncekiyle sonrakinin sonrakiyle toplamı oranıdır.

Fark oranı (***tafsîlü'n-nisbet***)**:** Öncekinin öncekiyle sonrakinin sonrakiyle farkı oranıdır.

Artış oranı (***kalbü'n-nisbet***)**:** Öncekinin sonrakiyle farkının sonrakine oranıdır.

Eşit oran (***nisbetu'l-musâvât***)**:** Uygun oranlı büyüklük dizisinde eşit değerli oranlardır.

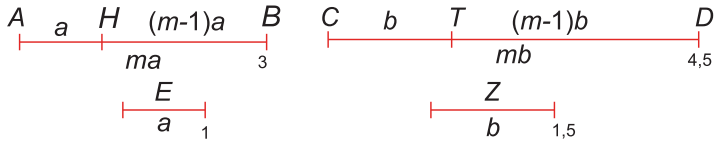
Düzgün oran (***nisbetu'l-muntazime***): Oranları belli kurala uyan büyüklük dizisidir.

Düzensiz oran: (***nisbetu'l-muztâribe***)**:** Yukarıda tanımlanan oranların dışındaki düzenli olmayan oranlardır.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Eğer dört büyüklükte, birinciyle ikinci büyüklüklerin oranı üçüncüyle dördüncü büyüklüklerin oranına eşitse, bu durumda birinciyle üçüncü büyüklüğün toplamı ikinciyle dördüncü büyüklüğün toplamı oranına eşittir.**[1]

Eğer *AB* hattı *E* hattının *m* katına ve *CD* hattı da *Z* hattının *m* katına eşitse bu durumda (*AB* + *CD*) = *m* × (*E* + *Z*) olmalıdır (*Şekil 1*).



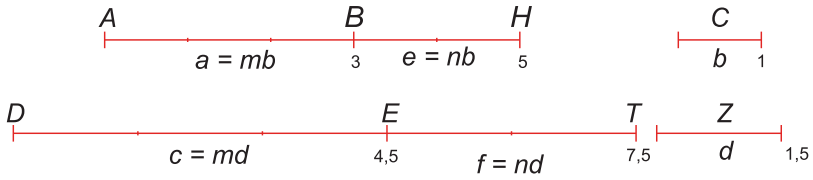
Şekil 1- Bu örnekte büyüklükler *a* = 1; *b* =1,5 ve orantı katsayısı *m* =3 *için* (*m* × *a*) + (*m* × *b*) = *m*.(*a* + *b*) = 3 + 4,5 = 7,5 elde edilir.

1 Bu önerme cebirsel olarak, büyüklükler sırasıyla ①, ②, ③, ④ ve orantı katsayısı *m* ile ifade edilirse ①/② = ③/④ = *m ise* (① + ③)/(② + ④) = *m* anlamına gelir. Eğer genelleştirme amacıyla büyüklükler sırasıyla *(m×a), a, (m×b), b, (m × c), c, … ,* olarak alınırsa önermedeki ilk iki koşul gerçekleşir ve genelleştirilmiş önerme cebirsel olarak *[(m × a) + (m × b) + (m × c) + …] = [m × (a + b + c + …)]* şeklinde yazılabilir.

Kanıtı: *AB* hattından *E* hattına eşit olan *AH* hattını ve *CD* hattından *Z* hattına eşit olan *CT* hattını ayıralım. Bu durumda (*AH* + *CT*) = (*E* + *Z*) ve (*HB* + *TD*) = (*m*–1) × (*Z* + *E*) olur. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi (*AB* + *CD*) = [(*AH* + *CT*) + (*HB* + *TD*)] = [(*E* + *Z*) + (*m*–1) × (*E* + *Z*)] = *m* × (*E* + *Z*) ilişkisinin geçerli olduğu görülür.

***II. Önerme*: Eğer altı büyüklükte, birinci ikinciye üçüncü dördüncü büyüklüğe orantılı, beşinci ikinciye altıncı dördüncü büyüklüğe başka bir oranla orantılı ise, bu durumda birinciyle beşinci büyüklük toplamı ikinci büyüklüğe ve üçüncüyle altıncı büyüklük toplamı dördüncü büyüklüğe oranların toplamıyla orantılıdır.**[1]

Önermede söz konusu altı hattın *AB*, *C*, *DE*, *Z*, *BH* ve *ET* olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 2*). Eğer *AB* hattı *C* hattının, *DE* hattı *Z* hattının *m* katına ve *BH* hattı *C* hattının, *ET* hattı *Z* hattının *n* katına eşitse, bu durumda (*AB* + *BH*)/*C* = (*DE* + *ET*)/*Z* = (*m* + *n*) ya da *AH*/*C* = *DT*/*Z* = (*m* + *n*) olmalıdır.



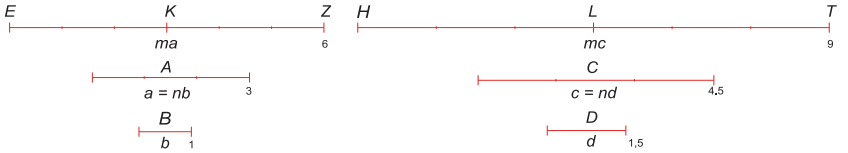
Şekil 2- Bu örnekte büyüklükler *a* = 3; *b* = 1; *c* = 4,5; *d* = 1,5; *e* = 2; *f* = 3; orantı katsayıları *m* = 3; *n* = 2 *için*
(a + e)/b = (c + f)/d = (*m* + *n*) = 5 bulunur.

Kanıtı: *AB* büyüklüğünde ne kadar *C* varsa *DE* büyüklüğünde de o kadar *Z*, aynı şekilde *BH* büyüklüğünde ne kadar *C* varsa *ET* büyüklüğünde de o kadar *Z* büyüklüğü vardır. Şu halde *AH* büyüklüğünde *C* olduğu kadar *DT* büyüklüğünde *Z* vardır ve *BH* büyüklüğünde ne kadar *C* varsa *ET* büyüklüğünde de o kadar *Z* vardır. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi *AH* ve *DT* büyüklüklerinde *C* ve *Z* büyüklüklerinin oranı (*n* + *m*) toplamına eşittir.

1 Bu önerme cebirsel olarak, büyüklükler sırasıyla ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥ ve orantı katsayıları *m* ve *n* ile ifade edilirse: ①/② = ③/④ = *n*, ⑤/② = ⑥/④ = *m*, (①+⑤)/② = (③+⑥)/④ = (*m* + *n*) anlamına gelir. Eğer büyüklükler sırasıyla *(m* × *a), a, (m* × *b), b, (n* × *a), (n* × *b)* olarak alınırsa önermenin ilk iki koşulu yerine gelir ve önerme bu durumda kısaca *[(m* × *a) + (n* × *a)] = [(m + n)* × *a]* şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade genelleştirilirse *[(m* × *a) + (n* × *a) + (p* × *a) + …] = [(m + n + p + …)* × *a]* şeklinde yazılabilir.

***III. Önerme*: Eğer dört büyüklükten birinciyle ikinci, üçüncüyle dördüncü büyüklük orantılıysa, birincinin ikinciye ve üçüncünün dördüncüye oranı bu orana bir katsayı çarpımıyla eşittir.**[1]

A büyüklüğünde ne kadar *B* varsa (*n*), *C* büyüklüğünde o kadar (*n*) *D* bulunduğunu varsayalım (Şekil 3). Bu durumda *EZ* büyüklüğünde ne kadar *B* büyüklüğü (*b*) varsa *HT* büyüklüğünde de o kadar (*d*) ya da *D* bulunur. Yani *EZ* büyüklüğünde ne kadar *B* varsa (*m*), *HT* büyüklüğünde o kadar (*m*) ya da *D* bulunur.



Şekil 3- Bu örnekte büyüklükler $a = 3$; $b = 1$; $c = 4{,}5$; $d = 1{,}5$; orantı katsayıları $m = 2$; $n = 2$ için $a/b = c/d = n = 3$ ve $m.(a/b) = m.(c/d) = 6$ elde edilir.

Kanıtı: *EZ* büyüklüğü *K* noktasında *A* büyüklüğüne ve *HT* büyüklüğü *L* noktasında *C* büyüklüğüne bölünürse, bu durumda *EK* büyüklüğünde ne kadar *B* bulunuyorsa, *HL* büyüklüğünde de o kadar *D* bulunur. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi, *EZ* büyüklüğünde ne kadar *B* bulunuyorsa, *HT* büyüklüğünde de o kadar sayıda *D* bulunur.

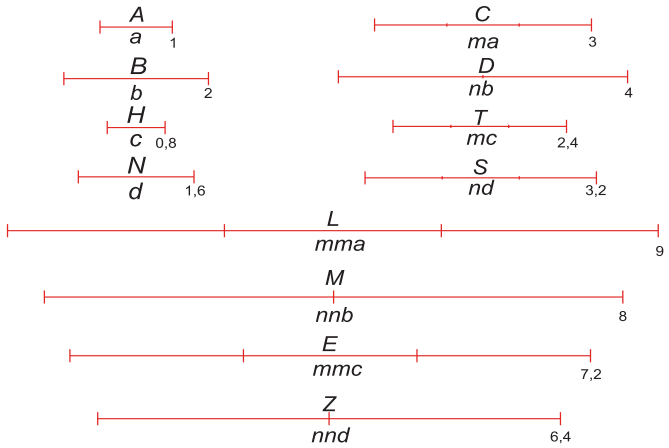
***IV. Önerme*: Eğer dört büyüklükten birincinin ikinciye olan oranı üçüncünün dördüncüye olan oranına eşitse, birinci ve üçüncü büyüklüğün belirli sayıda katları alındığında oranın sağlanması için üçüncü ve dördüncü büyüklüklerin de aynı sayıda katları alınmalıdır.**[2]

A/*B* = *H*/*N* olduğunu varsayalım (*Şekil 4*). Bu durumda *A* ve *H* büyüklüklerinin bir *m* katına eşit olan *C* ve *T* büyüklükleri ile *B* ve *N* büyüklüklerinin bir *n* katına eşit olan *D* ve *S* büyüklükleri arasında *C*/*D* = *T*/*S* oranı geçerlidir.

---

1 Bu önerme cebirsel olarak, büyüklükler sırasıyla *a, b, c, d* ve orantı katsayıları *m* ve *n* olmak üzere: *a/b = c/d = n* ve *m.(a/b) = m.(c/d)* anlamına gelir.

2 Bu önerme cebirsel olarak, büyüklükler sırasıyla *a, b, c, d* ve katsayılar m ve n olmak üzere: *(m×a)/(n×b) = (m×c)/(n×d)* anlamına gelir.



Şekil 4- Bu örnekte büyüklükler $a = 1$; $b = 2$; $c = 0{,}8$; $d = 1{,}6$; orantı katsayıları $m = 3$; $n = 2$ için
$a/b = c/d = 1/2$ ve $C/D = T/S = 0{,}75$ elde edilir.

Kanıtı: Eğer *C* ve *T* büyüklüklerinin *m* katı alınırsa *L* ve *E* elde edilir. Aynı şekilde *D* ve *S* büyüklüklerinin de *n* katı alınırsa *M* ve *Z* elde edilir. Bu durumda (*L* + M) toplamı (*E* + *Z*) toplamından daha fazla eşit ya da az olabilir. Buna göre *C*, *T*, *D*, *S*, büyüklüklerinin hangi katları alınırsa alınsın ilk ikisi son ikisinden büyük eşit ya da küçük olabilir, ancak *III. Önerme* gereği *C*/*D* = *T*/*S* oranı hep sağlanır.

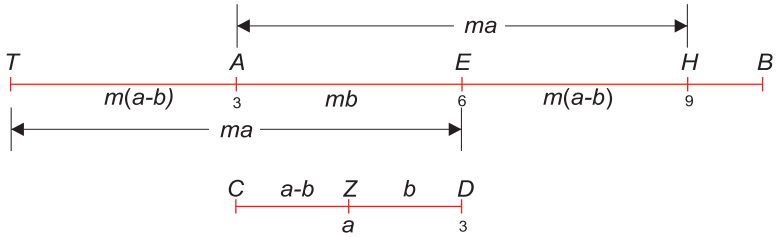
***V. Önerme*: Eğer iki büyüklüğün biri diğerinin belirli bir katıysa, her iki büyüklüğün aynı katsayısıyla çarpım farkı, büyüklükler farkının katsayı çarpımına eşittir.**[1]

TE büyüklüğünün *CD* büyüklüğünün *m* katı olduğunu varsayalım (*Şekil 5*). *TE* ve *CD* büyüklüklerinin bir kısmı olan *AE* ve *ZD* büyüklüklerinde *AE* büyüklüğü *ZD* büyüklüğünün aynı katıdır. Bunların *TA* = (*TE* – *AE*) farkı *CZ* = (*CD* – *ZD*) farkının aynı katına eşittir.

Kanıtı: *CZ* = (*a* – *b*) büyüklüğünün *m* katı olan *TA* = *m*.(*a* – *b*)büyüklüğünü göz önünde bulunduralım. *AH* = (*m*×*a*) büyüklüğü ise *CD* = *a* büyüklüğünün *m* katı olduğunu varsayalım. Ancak *TA* büyüklüğü *CD* = *a*

1 Bu önerme cebirsel olarak, eğer $(m \times a)/a = (m \times b)/b = m$ *ise* $[(m \times a) - (m \times b)] = [m \times (a - b)]$ anlamına gelir. Buna göre önerme cebirsel olarak I. Önermenin toplam yerine fark için yazılmış şekline karşı düşer.

büyüklüğünün *m* katı kabul edilmişti. Buna göre *TA* = *AH* olur. Varsayım gereği *TA* büyüklüğü *CZ* büyüklüğünün *m* katı olduğundan *TA* = *TE* – *AE* = (*m*×*a*) – (*m*×*b*) = *m*.(*a* – *b*) nedeniyle kanıtlamak istendiği gibi *TA* büyüklüğü *CZ* büyüklüğünün *m* katına eşittir.

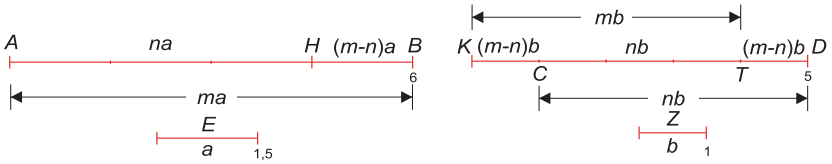


Şekil 5- Bu örnekte büyüklükler *a* = 3; *b* = 1,5; orantı katsayısı *m* = 2 için *a*/*b* = *m* = 2 ve (*a* – *b*) = *a* – (*a*/*m*) = (*m* – 1).*a*/*m* =1,5 elde edilir.

Not: Bu önermenin başka bir kanıt yolu daha vardır. Bir an *TA* büyüklüğünün belirli bir katının *EH* yerine *EB* büyüklüğünün *m* katına eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda *AB* büyüklüğü *CD* büyüklüğünün *m* katı olması gerekirdi. Ancak *CD* büyüklüğünün *m* katı *TE* olduğundan *TE* = *AB* olması gerekir ki bu yanlış olduğundan önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***VI. Önerme*: Eğer iki eşit büyüklük iki farklı katsayıyla çarpılır ve farkları alınırsa, bu fark büyüklüğün katsayılar farkıyla çarpımına eşittir.**[1]

AB ve *KD* büyüklükleri farklı *E* ve *Z* büyüklüklerinin *m* katlarına eşittir (*Şekil 6*). *AB* ve *KD* büyüklüklerinden *E* ve *Z* büyüklüklerinin *n* katına eşit olan *AH* ve *KT* büyüklükleri çıkarılırsa geriye kalan *HB* ve *TD* büyüklükleri *E* ve *Z* büyüklüğüne katsayılar farkıyla orantılıdır.



Şekil 6- Bu örnekte büyüklükler *a* = 1,5; *b* = 1; orantı katsayıları *m* = 4; *n*= 3 için *HB*/*E* = *KC*/*Z* = (*m* – *n*) = 1 elde edilir.

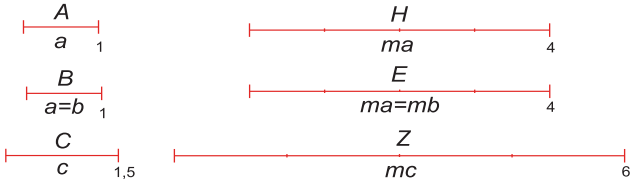
1 Eğer söz konusu büyüklük *a,* katsayıları ise *m* ve *n* ile ifade edilirse, bu önermede uygun orantılı dört büyüklük *(m* × *a), a, (n* × a), *a* tanımlanır *[(m* × *a)/a = (n* × *a)/a = m].* Önerme cebirsel olarak II. Önermenin toplam yerine fark için yazılmış şekline karşı düşer: *[(m* × *a)* – *(n* × *a)] = [(m* – *n)* × *a].*

Kanıtı: Farklı E ve Z büyüklükleri için $AB/E = CD/Z$ oranları eşittir $[(m \times a)/a = (m \times b)/b = m]$. Buna karşın AH ve CT büyüklükleri E ve Z büyüklükleriyle n katsayısıyla orantılıdır $[(n \times a)/a = (n \times b)/b = n]$. Bu durumda $HB = (AB - AH)$, $TD = (CD - CT)$ ve $KC = (KT - CT)$ farkları alınırsa, $KC = TD$ ve $KT = CD$ olduğundan, kanıtlanması istendiği gibi HB/E ve KC/Z büyüklüklerinin $(m - n)$ katsayılar farkıyla orantılı olduğu görülür $\{[(m - n) \times a]/a = [(m - n) \times b]/b = (m - n)\}$.

Not: Bu önerme kanıtlanırken tıpkı *V. Önerme*de olduğu gibi olmayana ergi yönteminden de yararlanılabilir.

***VII. Önerme*: Eşit büyüklüklerin aynı büyüklüğe ve aynı büyüklüğün eşit büyüklüklere oranı eşittir.**

Eğer $A = B$ ise bu durumda $A/C = B/C$ $(= A/C)$ ya da $C/A = C/B$ $(= C/A)$ olur (*Şekil 7*).



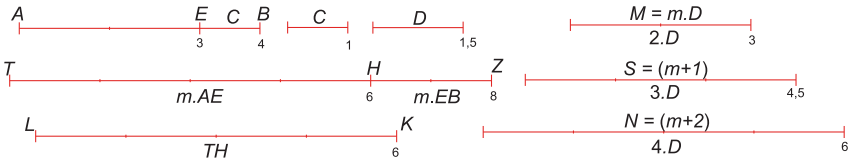
Şekil 7- Bu örnekte büyüklükler $a = b = 1$; $c = 1{,}5$; orantı katsayıları $m = n = 4$ *için* $A/C = B/C = H/Z = a/c = 1/(1{,}5)$; $C/A = C/B = Z/H = c/a = 1{,}5$.

Eşit A ve B büyüklüklerinin eşit H, E katları ve C büyüklüğünün bunlardan farklı bir Z katı oluşturulabilir. H ve E büyüklükleri Z büyüklüğünden büyük, küçük ya da eşit olabilir. Ancak önermede öngörüldüğü gibi oranların değeri değişmez.

***VIII. Önerme*: Eğer eşit olmayan üç büyüklük verilmişse bu durumda, büyüğün üçüncü büyüklüğe oranı küçüğün üçüncü büyüklüğe oranından büyük ve üçüncü büyüklüğün küçüğe oranı, üçüncü büyüklüğün büyüğe oranından büyüktür.**[1]

1 Bu önerme şu anlama gelir: eğer ① > ③ >② olmak üzere üç büyüklük verilmişse ①/③ > ②/③ ve ③/② >③/① ilişkileri geçerlidir.

Eğer *AB* birinci, *C* ikinci ve *D* üçüncü olmak üzere, üç büyüklük *AB* > *D* > *C* ilişkisini sağlıyorsa, bu durumda *AB*/*D* > *C*/*D* ya da *D*/*C* > *D*/*AB* ifadeleri geçerlidir (*Şekil 8*).



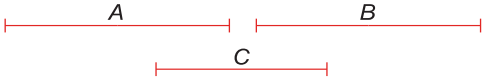
Şekil 8- Eğer *AB* = 4 > *D* = 1,5 > *C* = 1 ve *m* = 2 seçilirse *AB*/*D* > *C*/*D* ya da *D*/*C* > *D*/*AB* olduğu görülür.

Kanıtı: Varsayım gereği en büyük *AB* büyüklüğünde *C* büyüklüğüne eşit *EB* kısmı ayrılır. Cinsleri aynı boyları farklı *AE* > *D* ve *EB* < *D* olacak şekilde bir *m* katsayısıyla çarpılarak *TH* = *LK* = (*m* × *D*) ve *HZ* = (*m* × *C*) > *D* büyüklükleri elde edilir. Bu durumda *TH* = *LK* > *D* ve *HZ* > *D* olur. Bunun için sırasıyla *M* = 2*D*, *S* = 3*D* ve *N* = *S* + *D* = 4*D* > *LK* > *S* = 3*D* büyüklükleri oluşturulur. Bu durumda *TZ* = (*TH* + *HZ*) > *N* = 4*D* > *D* ve *HZ* = 2*C* < *M* = 2*D* elde edilir.

Böylece *D* büyüklüklerine bağlı olarak *AB* ve *C* büyüklüğünün belirli katları oluşturularak, *AB* büyüklüğü *D* büyüklüğünün belirli bir katı, *C* büyüklüğünün *D* büyüklüğünün belirli bir katından küçük olduğu gösterilebilir. Şu halde önermede amaçlandığı gibi *AB* > *D* > *C* başlangıç koşulu için *AB*/*D* > *C*/*D* ve *D*/*C* > *D*/*AB* eşitsizliklerinin sağlandığı kanıtlanmış olur.

***IX. Önerme*: Aynı büyüklükle oranlanan büyüklüklerin kendileri de eşittir. Buna göre aynı büyüklükler ancak eşit büyüklüklerle oranlanabilir.**

Eğer *A*/*C* = *B*/*C* ya da *C*/*A* = *C*/*B* ise bu durumda *A* = *B* olmalıdır (*Şekil 9*).

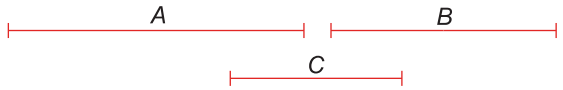


Şekil 9

Kanıtı: Eğer *A* ≠ *B* ise bu durumda oranlar eşit olamazdı. Ancak eşit olduklarına göre bu varsayım yanlıştır. Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdir.

***X. Önerme*: Eğer iki büyüklük bir üçüncü büyüklüğe oranlanır ve oranlardan biri diğerinden daha büyük bulunursa, o büyüklüğün kendisi de diğerinden daha büyüktür. Aksine üçüncü büyüklük diğer iki büyüklüğe oranlanırsa büyük orana daha küçük büyüklük karşı düşer.**

Eğer $A/C > B/C$ ya da $C/B > C/A$ ise $A > B$ olur (*Şekil 10*).



Şekil 10

Kanıtı:

1- $A/C > B/C$ için, eğer $A = B$ olsa önceki *IX. Önerme* gereği $A/C = B/C$ olmalıydı. Eğer $A < B$ olsa, bu durumda $A/C < B/C$ olması gerekir ki bu doğru değil.

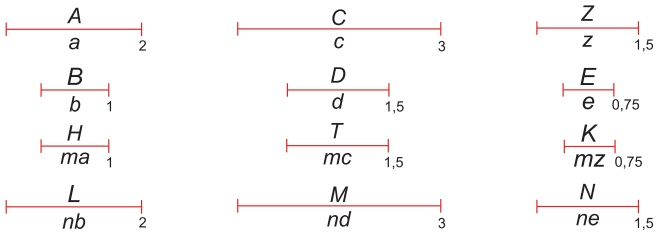
2- $C/B > C/A$ için, eğer $A = B$ olsa önceki *IX. Önerme* gereği $C/A = C/B$ olmalıydı. Eğer $A < B$ olsa, bu durumda $C/B < C/A$ olması gerekir ki bu da doğru değil.

Şu halde $A > B$ olmalıdır.

Not: Bu önerme aynı cinsten büyüklüklere ilişkindir.

***XI. Önerme*: Aynı oranlara eşit oranlar birbirlerine eşittir.**

Eğer $A/B = C/D$ ve $Z/E = C/D$ ise $A/B = Z/E$ olur (*Şekil 11*).

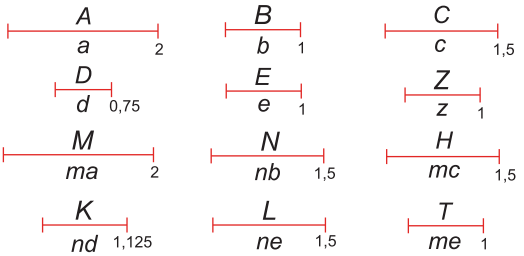


Şekil 11- Bu örnekte büyüklükler $a = 2$; $b = 1$; $c = 1{,}5$; $d = 1{,}5$; $z = 1{,}5$; $e = 0{,}75$; orantı katsayıları $m = 0{,}5$; $n = 2$ için $A/B = C/D = 2$; $Z/E = C/D = 2$; $H/L = T/M = 0{,}5$; $T/M = K/N = 0{,}5$; $H/L = K/N = 0{,}5$.

Kanıtı: *A*, *C* ve *Z* büyüklüklerini herhangi eşit bir *m* katsayısıyla çarparak $H = (m \times a)$, $T = (m \times c)$ ve $K = (m \times b)$ büyüklüklerini oluşturalım. Aynı şekilde *B*, *D* ve *E* büyüklüklerini herhangi eşit başka bir *n* katsayısıyla çarparak $L = (n \times b)$, $M = (n \times d)$ ve $N = (n \times e)$ büyüklüklerini oluşturalım. Bu durumda $A/B = C/D$ ve $Z/E = C/D$ olduğu için $H/L = T/M$ ve $T/M = K/N$ olur. Son iki eşitlik nedeniyle $H/L = K/N$ ya da kanıtlamak istediğimiz gibi $A/B = Z/E$ olduğu görülür.

***XII. Önerme*: Bir üçüncü orandan büyük bir orana eşit olan oranın kendisi de üçüncü orandan büyüktür.**

Eğer $A/B = C/D$ ve $C/D > E/Z$ ise bu durumda $A/B > E/Z$ olur (*Şekil 12*).

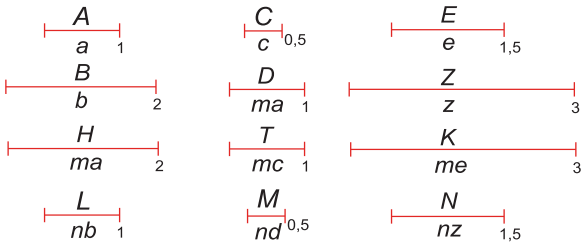


Şekil 12- Bu örnekte büyüklükler $a = 2$; $b = 1$; $c = 1{,}5$; $d = 0{,}75$; $e = 1$; $z = 1$; orantı katsayıları $m = 1$; $n = 2$ için $A/B = C/D = 2$; $C/D = 2 > E/Z = 1$; $A/B = 2 > E/Z = 1$; $M = 2 > N = 1{,}5$; $H = 1{,}5 > K = 1{,}125$; $T = 1 < L = 1{,}5$; $M/N = H/K = 4/3 \cong 1{,}33$.

Kanıtı: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ve *Z* büyüklüklerinin $A/B = C/D$ ve $C/D > E/Z$ özellikli olduğunu varsayalım. İki farklı *m* ve *n* katsayı ile $M = (m \times a) > N = (n \times b)$, $H = (m \times c) > K = (n \times d)$, $T = (m \times e) < L = (n \times e)$ özelliklerini sağlayan yeni *M*, *N*, *H*, *K*, *L* ve *T* büyüklüklerini türetelim. $M/N = (m \times a)/(n \times b)$, $H/K = (m \times c)/(n \times d)$ ve $A/B = C/D$ olduğuna göre $M/N = H/K$ ilişkisini sağlar. Ayrıca $n > m$ ya da $n/m > 1$ olduğundan $A/B > 1$ ve $E/Z < n/m$ nedeniyle $A/B = C/D > E/Z$ varsayımının sağlandığı görülür. Son olarak $M > N$ ifadesinden $A/B > n/m$ ve $T < L$ ifadesinden $E/Z < n/m$ bulunduğuna göre kanıtlamak istediğimiz $A/B > E/Z$ ilişkisi de geçerlidir.

***XIII. Önerme*: Bir dizi eşit oranda, ilk oranda birinci büyüklüğün ikinci büyüklüğe oranı, tüm oranların birinci büyüklükler toplamının ikinci büyüklükler toplamının oranına eşittir.**

Eğer $A/B = C/D = E/Z$ ise bu durumda $A/B = (A + C + E)/(B + D + Z)$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 13*).

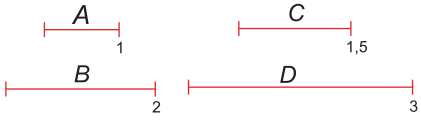


Şekil 13- Bu örnekte büyüklükler $a = 1$; $b = 2$; $c = 0,5$; $d = 1$; e = 1,5; $z = 3$; orantı katsayıları $m = 2$; $n = 0,5$ için $A/B = (A + C + E)/(B + D + Z) = (1 + 0,5 + 1,5)/(2 + 1 + 3) = 3/6 = 0,5$.

Kanıtı: A, C ve E ile B, D ve Z büyüklüklerinin m ve n katlarını $H = (m \times A)$, $T = (m \times C)$ ve $K = (m \times E)$ ile $L = (n \times B)$, $M = (n \times D)$ ve $N = (n \times Z)$ şeklinde oluşturalım. Bu büyüklüklerin toplamları da aynı orana eşit olmalıdır. Buna göre eğer $H > L$ ise $(H + T + K) > (L + M + N)$, eğer $H < L$ ise $(H + T + K) < (L + M + N)$ ve $H = L$ ise $(H + T + K) = (L + M + N)$ olması ve neticede $A/B = (A + C + E)/(B + D + Z)$ ilişkisinin geçerli olması gerekir.

***XIV. Önerme*: Bir oran oluşturan dört uygun büyüklükten eğer birincisi üçüncüden büyükse ikincisi de dördüncüden büyüktür. Eğer küçükse küçük, eşitse eşittir.**[1]

Eğer $A/B = C/D$ ve $A > C$, $A = C$ ya da $A < C$ ise bu durumda $B > D$, $B = D$ ya da $B < D$ olmalıdır (*Şekil 14*).



Şekil 14- Bu örnekte büyüklükler $A = 1$; $B = 2$; $C = 1,5$; $D = 3$; $A/B = C/D = 0,5$; bu durumda $A < C$ olduğundan $B < D$ gerçekleştiği *görülür*.

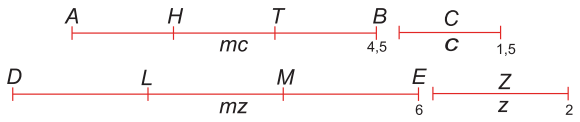
1 Bu önerme cebirsel olarak eğer $A/B = C/F$ ve $A \leq$ ya da $\geq C$ ise, bu durumda $B \leq$ ya da $\geq F$ anlamına gelir.

Kanıtı: Koşul gereği $A/B = C/D$ olduğundan, eğer $A > C$ olduğunu varsayarsak bu durumda $A/B > C/D$ olacağı için koşulun sağlanması için $B > D$ olmalıdır. Bu sonuç A büyüklüğünün C büyüklüğünden küçük ya da eşit olması halinde $B < D$ ya da $B = D$ olması gerekeceğini zorunlu kılar. Bu da kanıtlamak istediğimiz husustur.

Not: Aksine bir an $A > C$ ancak $B < D$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $C/B > C/D$ veya $C/B > A/B$ yani $C > A$ olmalıdır. Ne var ki $A > C$ olduğundan bu yanlıştır. Eşitlik durumu da aynı şekilde kanıtlanabilir. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki bu önerme sadece aynı cins büyüklükler için geçerlidir. Buna göre ilk ikili ikinci ikiliyle aynı cinsten olmaması halinde onlar arasında uygunluk ötesinde büyük, küçük ve beraberlik konusunda bile hüküm verilemez.

***XV. Önerme*: Aynı parça sayısına bölünmüş büyüklüklerin oranı, parçaların oranına eşittir.**

Eğer AB ve DE büyüklükleri farklı C ve Z büyüklüklerinin aynı katına eşitse, bu durumda $AB/DE = C/Z$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 15*).

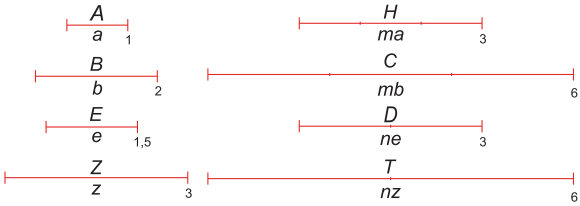


Şekil 15- Bu örnekte büyüklükler $c = 1{,}5$; $z = 2$; katsayı $m = 3$; $C/Z = AB/DE = ¾$.

Kanıtı: AB büyüklüğünü C büyüklüğüne H ve T noktalarında, DE büyüklüğünü L ve M noktalarında Z büyüklüğüne bölelim (*Şekil 15*'te parça katsayısı $m = 3$). Koşul gereği $C = AH$ ve $Z = DL$ olduğundan $C/Z = AH/DL$ ve aynı şekilde $C/Z = HT/LM = TB/ME$ ilişkileri yazılabilir. *XIII. Önerme* gereği $C/Z = (AH + HT + TB)/(DL + LM + ME)$ ya da kanıtlamak istediğimiz gibi $C/Z = AB/DE$ olduğu görülür.

***XVI. Önerme*: Uygun oranlı dört büyüklüğün yerleri değiştirilse dahi uygun oranlı kalmaya devam ederler.**

Eğer $A/B = E/Z$ ise bu durumda $A/E = B/Z$ oranı da geçerlidir (*Şekil 16*).



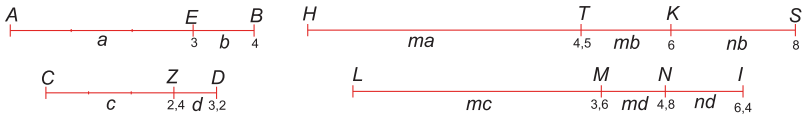
Şekil 16- Bu örnekte büyüklükler $a = 1$; $b = 2$; $e = 1{,}5$; $z = 3$; katsayılar $m = 3$; $n = 2$; $A/B = E/Z = 0{,}5$; $A/E = B/Z = 2/3$.

A ve B ile C ve F büyüklüklerinin herhangi farklı iki katı (m, n) olan H ve C ile D ve T büyüklüklerini oluşturalım. Bu durumda $H/C = [(m \times a)/(m \times b)] = A/B$ ve $D/T = [(n \times e)/(n \times z)] = E/Z$ olur. Buna göre $H/C = D/T$ oranı geçerlidir. *XIV. Önerme* gereği $H \leq$ ya da $\geq D$ için $D \leq$ ya da $\geq T$ olur. Şu halde A ve B büyüklüklerinin bir katı olan H ve C ile E ve Z büyüklüklerinin başka bir katı olan D ve T büyüklüklerinden ya büyük, ya küçük ya da eşittir. Sonuç olarak amaçladığımız gibi $A/E = B/Z$ ilişkisi geçerlidir.

Not: Bu öneride dört büyüklüğün aynı cinsten olması ön koşuldur. Bir hattın hatta oranı, bir yüzeyin yüzeye olan oranla orantılı olabilir. Ancak bu durumda büyüklüklerin yeri değiştirilemez.

***XVII. Önerme*: Uygun oranlar birbirlerinden çıkarılırsa uygun kalmaya devam ederler.**[1]

Eğer $AB/EB = CD/ZD$ ise bu durumda $AE/EB = CZ/ZD$ oranı geçerlidir (*Şekil 17*).



Şekil 17- Bu örnekte büyüklükler $a = 3$; $b = 1$; $c = 2{,}1$; $d = 0{,}7$; katsayılar $m = 1{,}5$; $n = 2$; $AB/EB = CD/ZD = 4$; $AE/EB = CZ/ZD = 3$.

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer $a/b = c/d$ *ise* $(a - b)/b = (c - d)/d$ *oranı geçerlidir.*

Kanıtı: *AE* (= *a*), *EB* (= *b*), *CZ* (= *c*) ve *ZD* (= *d*) büyüklüklerinin herhangi bir *m* katı olan *HT* (= *m* × *a*), *TK* (= *m* × *b*), *LM* (= *m* × *c*)ve *MN* (= *m* × *d*) büyüklüklerini oluşturalım. Bu durumda *HT* ve *TK* de *AE* ve *EB* büyüklüklerinin *m* katı kadardır. Aynı şekilde *HK* ve *LN* büyüklükleri de *AB* ve *CD* büyüklüklerinin de *m* katı kadar olur.

Sonra *EB* ve *ZD* büyüklüklerinin başka bir *n* katı alınarak *KS* (= *n* × *b*) ve *NI* (= *n* × *d*) olarak *HK* ve *LN* büyüklüklerine eklenir. Buna göre *TK* ve *MN* büyüklüklerinde ne kadar *EB* ve *ZD* varsa *KS* ve *NI* büyüklüklerinde de o kadar *EB* ve *ZD* bulunur. Ayrıca *TS*/*EB* = *MI*/*ZD* ilişkisi geçerlidir. Koşul gereği *AB*/*EB* = *CD*/*ZD* olduğundan *HT* ve *LM* büyüklükleri *HK* ve *LN* büyüklüklerinden büyük, küçük ya da eşit olabilir.

TS ve *MI* büyüklüklerinden *TK* ve *MN* büyüklüklerini çıkaralım. Şu halde *HT* ve *LM* büyüklükleri *KS* ve *NI* büyüklüklerinden büyük, küçük ya da eşit olabilir. Neticede *HT* ve *LM* büyüklükleri *AE* ve *CZ* büyüklüklerinin bir katı olduğu gibi, *KS* ve *NI* büyüklükleri de *EB* ve *ZD* büyüklüklerinin bir katına eşittir. Buna göre kanıtlamak istediğimiz gibi *AE*/*EB* = *CZ*/*ZD* oranı geçerlidir.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir. Bir an *AE*/*EB* ≠ *CZ*/*ZD* olduğunu, bunun yerine *AE*/*EB* = *QZ*/*ZD* oranının gerçeklendiğini varsayalım (*Şekil 18*'de *C* civarında bulunması gereken *Q* noktası *Şekil 17*'de gösterilmemiştir). Oran toplam haline getirilirse *XIII. Önerme* gereği (*AE* + *EB*)/*EB* = (*QZ* + *ZD*)/*ZD* ya da *AB*/*EB* = *QD*/*ZD* yazılabilir. Ancak koşul gereği *AB*/*EB* = *CD*/*ZD* olması gerektiğinden *CD*/*ZD* = *QD*/*ZD* ya da *CD* = *QD* olması gerekir ki bu yanlıştır.

***XVIII. Önerme*: Uygun oranlar birbirlerine eklenirse uygun kalmaya devam ederler.**[1]

Eğer *AE*/*EB* = *TC*/*CD* ise bu durumda (*AE* + *EB*)/*EB* = (*TC* + *CD*) *CD* ya da *AB*/*EB* = *TD*/*CD* oranı geçerlidir (*Şekil 19*).

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a/b = c/d ise (a + b)/b = (c + d)/d oranı geçerlidir.*

Şekil 19- Bu örnekte oranlar $AE/EB = TC/CD = 2$; $AB/EB = TD/CD = 3$.

Kanıtı: Böyle olmadığını ve $ZD < CD$ önkoşuluyla $AB/EB = TD/ZD$ olduğunu varsayalım. *XVII. Önerme* gereği karşılaştırma suretiyle $AE/EB = TZ/ZD = TC/CD$ yazılabilir. Bu durumda $TC < TZ$ olduğundan *XIV. Önerme* gereği $CD < ZD$ olmalı ki bu yanlıştır. Aynı şekilde eğer $ZD > CD$ kabul edilirse yine ters sonuca ulaşılır. Böylece önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir: $AC/EB = TC/CD$ kabulüyle oranı $AC/TC = EB/CD$ şeklinde değiştirelim. *XIII. Önerme* gereği $(AC + EB)/(TC + CD) = EB/CD$ ya da $AB/TD = EB/CD$ yazılabilir. Bu sonuncu ifade $AB/EB = TD/CD$ şeklinde yazılırsa önerme kanıtlanmış olur.[1]

***XIX. Önerme*: Uygun oranlı dört büyüklükte, iki büyüklük diğerlerinden çıkarılırsa kalan büyüklükler uygun kalmaya devam eder.[2]**

Eğer $AC/DZ = AB/DE$ ise bu durumda $(AC - AB)/(DZ - DE) = AB/DE$ ya da $BC/EZ = AB/DE$ oranı geçerlidir (*Şekil 20*).

Şekil 20- Bu örnekte oranlar $AC/DZ = AB/DE = 2/3$; $BC/EZ = AB/DE = 2/3$.

Kanıtı: Önerme koşulunda oranların yerleri değiştirilir $AC/AB = DZ/DE$ ve fark alınırsa $(AC - AB)/AB = (DZ - DE)/DE$ ya da $BC/AB = EZ/DE$ bulunur. Tekrar yer değiştirilirse $BC/EZ = AB/DE$ elde edilir.

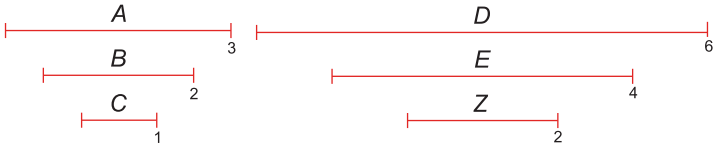
---

1 Kanıt cebirsel şu anlama gelir: eğer $b/(a - b) = d/(c - d)$ verilmişse, ikinci ve üçüncü büyüklüklerin yerleri değiştirilirse $b/d = (a - b)/(c - d)$, arttırılırsa $[b + (a - b)]/[d + (c - d)] = (a - b)/(c - d)$ diğer bir deyişle $a/c = (a - b)/(c - d)$ bulunur. Son olarak ikinci ve üçüncü büyüklüklerin yerleri değiştirilirse $a/(a - b) = c/(c - d)$ elde edilir.

2 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer $c < a$ ve $d < b$ olmak üzere $a/b = c/d$ ise bu durumda $(a - c)/(b - d) = a/b$ oranı geçerlidir.

***XX. Önerme*: Eşit sayıda iki grup büyüklükte, iki büyüklüğün kendi aralarında ve diğer gruptaki iki büyüklükle uygun oranlı olduğunu varsayalım. Bu durumda eğer birinci gruptaki büyüklüklerden biri diğerlerinden büyük, eşit ya da küçükse, ikinci gruptaki büyüklüklerden biri de diğerlerinden büyük, eşit ya da küçük olur.**[1]

A, *B*, *C* ile *D*, *E*, *Z* büyüklüklerin kendi aralarında ve karşılıklı uygun oranlı iki grup oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 21*). Bu durumda eğer $A > C$ ise bu $A/B > C/B$ anlamına gelir. Şu halde $D/E > Z/E$ ya da $D > Z$ olması gerekir. Bu önerme $A = C$ ve $A < C$ için de geçerliliğini korur.



Şekil 21- Uygun oranlı iki grup büyüklük: $A/B = D/E = 1{,}5$; $B/C = E/Z = 2$.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha bulunur: Eğer *D* büyüklüğü *Z* büyüklüğünden büyük değilse bu durumda $D \leq Z$ olması gerekir. İlkin $D = Z$ olduğunu varsayalım. Buna göre $D/E = Z/E$ ve $A/B = C/B$ olması gerekir, ancak koşul gereği $A > C$ olması gerekir ki bu yanlıştır. Aynı şekilde $D < Z$ olduğu varsayılırsa $D/E < Z/E$ ve $A/B < C/B$ ya da $A < C$ olması gerekir ki bu da yanlıştır.

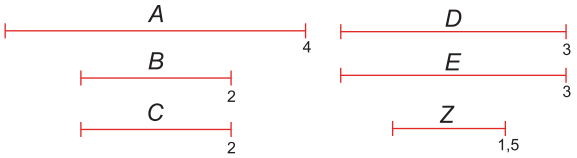
***XXI. Önerme*: Eşit sayıda iki grup büyüklükte, bir grubun her iki büyüklüğü kendi ve diğer gruptaki iki büyüklükle ters oranlı olduğunu varsayalım. Bu durumda birinci gruptaki büyüklüklerden birinin diğerinden büyük, eşit ya da küçük olması halinde, ikinci gruptaki büyüklüklerden biri de diğerlerinden büyük, eşit ya da küçüktür.**[2]

A, *B*, *C* ve *D*, *E*, *Z* grubundaki büyüklüklerin ters oranlı olduklarını varsayalım (*Şekil 22*). Buna göre $A/B = E/Z$ ve $B/C = D/E$ oranları yazılabilir. Eğer $A > C$ ise $D > Z$ olmalıdır. *Çünkü bu durumda* $A/B > C/B$ olacağından

1 Uygun oran tanımı için girişe bakınız. Eğer *a, b, c* ve *d, e, f* uygun oranlı iki grup oluşturuyorsa $a/b = d/e$ ve $b/c = e/f$ ilişkileri sağlanmalıdır.

2 Uygun oran tanımı için girişe bakınız. Eğer *a, b, c* ve *d, e, f* karşıt oranlı iki küme oluşturuyorsa $a/b = e/f$ ve $b/c = d/e$ ilişkileri sağlanmalıdır.

$E/Z > E/D$ ilişkisi ya da $D > Z$ geçerlidir. Aynı şekilde amacımız yönünde eşitlik ve küçüklük hali de kanıtlanabilir.

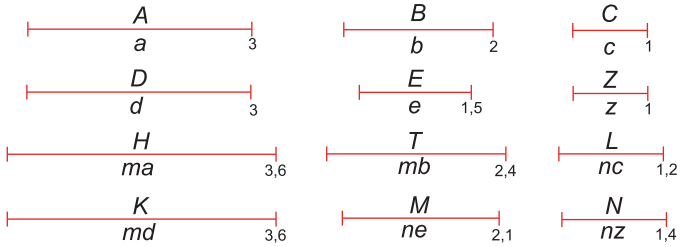


Şekil 22- Ters oranlı iki grup büyüklük: $A/B = E/Z = 2$; $B/C = D/E = 1$.

Not: Bu önerme olmayana ergi yöntemiyle de kanıtlanabilir.

***XXII. Önerme*: Eşit sayıda ve eşit katsayıda iki grup büyüklükte, bir grubun her iki büyüklüğü diğer grubun iki büyüklüğüyle eşit orantılıysa bu durumda büyüklükler uygun orantılıdır.**

A, *B*, *C* bir grubu ve *H*, *K*, *M* başka bir grup büyüklüğü ifade etsin (*Şekil 23*). Bu durumda eğer $B/C = K/M$ ve $A/B = H/K$ ise $A/C = H/M$ olmalıdır.



Şekil 23- Bu örnekte $A = 3$; $B = 2$; $C = 1{,}5$; $H = 2H = 6$; $K = 2B = 4$; $M = 2C = 3$; $m = 0{,}2$; $n = 2$; $p = 1{,}5$;
ayrıca $B/C = K/M = 4/3$ ve $A/B = H/K = 1{,}5$ ise bu durumda $A/C = H/M = 2$ geçerlidir.

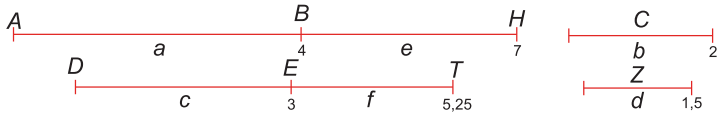
Kanıtı: *A* ve *H*, *B* ve *K* ile *C* ve *M* büyüklüklerinin *m*, *n* ve *p* katı olan *D* ($= m \times A$) ve *T* ($= m \times H$), *E* ($= n \times B$) ve *L* ($= n \times K$) ile *Z* ($= p \times C$) ve *N* ($= p \times M$) büyüklüklerini oluşturalım. Bu durumda koşul gereği $A/B = H/K$ olan oran m ile çarpılır n'ye bölünürse $D/E = T/L$ ve aynı şekilde $B/C = K/M$ koşulu n ile çarpılır p'ye bölünürse $E/Z = L/N$ elde edilir. Buna göre *D*, *E*, *Z* ve *T*, *L*, *N* büyüklükleri uygun orantılı olduğundan $D/T = Z/N$ yazılabilir ve kanıtlamak istediğimiz gibi $(m \times A)/(m \times H) = (p \times C)/(p \times M)$ ya da $A/C = H/M$ olduğu görülür.

Not: Eğer *A*, *B*, *C* büyüklükleri herhangi bir katsayıyla *Z*, *E*, *D* büyüklüklerine, aynı şekilde *H*, *K*, *M* büyüklükleri herhangi bir katsayıyla *N*, *L*, *T* büyüklüklerine dönüştürülürse, *A*, *B*, *C* büyüklüklerinin *Z*, *E*, *D* büyüklüklerine oranı *H*, *K*, *M* büyüklüklerinin *N*, *L*, *T* büyüklükleri oranına eşit olur. Buna göre $A/H = C/M$ ya da değiştirilirse $A/C = H/M$ olur.

Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu $A/B = H/K$ ve $B/C = K/M$ oranlarının değiştirilmiş şekli $A/H = B/K$ ve $B/K = C/M$ oranları eşitlenir $A/H = C/M$ değiştirilirse tekrar $A/C = H/M$ ilişki elde edilir.

***XXIII. Önerme*: Eşit sayıda iki grup büyüklükte, bir grubun her iki büyüklüğü diğer grubun iki büyüklüğüyle aynı oranda diğeri ise karışık orantılıysa bu durumda büyüklükler aynı anda eşit olarak uygun orantılıdır.**

A, *B*, *C* bir grup ve *D*, *E*, *Z* başka bir grup büyüklüğü ifade etsin (*Şekil 24*). Bu durumda eğer $A/B = E/Z$ ve $B/C = D/E$ ise $A/C = D/Z$ olmalıdır.



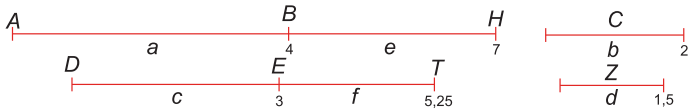
Şekil 24- Bu örnekte $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 3$; $e = 1{,}5$; $z = 1$; $m = 1{,}2$; $n = 1{,}4$ ayrıca $A/B = E/Z = 1{,}5$ ve $B/C = D/E = 2$ ise bu durumda $A/C = D/Z = 3$ geçerlidir.

Kanıtı: *A*, *B*, *D* büyüklüklerini bir *m* katıyla çarpılırsa $H = (m \times a)$, $T = (m \times b)$, $K = (m \times d)$ büyüklükleri, aynı şekilde *C*, *E*, *Z* büyüklüklerinin bir *n* katıyla çarpılırsa $L = (n \times c)$, $M = (n \times e)$, $N = (n \times z)$ büyüklüklerini oluşturalım. Bu durumda koşul gereği $A/B = H/T$ ve $E/Z = M/N$ olur. Ayrıca varsayım gereği $A/B = E/Z$ olduğundan ve $H/T = M/N$ ilişkisi geçerlidir. Ayrıca koşul gereği $B/C = D/E$ ve $B/C = T/L$ olduğundan $T/L = D/E = K/M$ yazılabilir. Şu halde *H*, *T*, *L* büyüklükleri *K M*, *N* büyüklükleriyle eşit orantılı olduğundan $H/K = L/N$ ya da $H/L = K/N$ yazılabilir ve amaçlandığı gibi $A/C = D/Z$ oranının geçerliliği kanıtlanmış olur.

Not: Bazı nüshalara göre *A*, *B*, *C* ve *D*, *E*, *Z* büyüklüklerinin herhangi iki farklı katıyla *H*, *T*, *L* ve *K*, *M*, *N* büyüklükleri oluşturulur. Bu nedenden *A*, *B*, *C* ve *E*, *H*, *F* büyüklüklerinin *L*, *T*, *D* ve *N*, *M*, *K* büyüklükleriyle değiştirme yöntemiyle aynı oranları oluşturduğu görülür.

***XXIV. Önerme*: Eğer bir dizi büyüklükte birincinin ikinciye, üçüncünün dördüncüye oranına eşit ve beşincinin ikinciye, altıncının dördüncüye oranına eşitse, bu durumda birinciyle beşinci toplamının ikinciye oranı, üçüncüyle altıncı toplamının dördüncüye oranına eşittir.**[1]

Önerme gereği ①/② = ③/④ ve⑤/② = ⑥/④ oranları geçerliyse bu durumda (①+⑤)/② = (③+⑥)/④ geçerlidir. Bu durumda *AB*/*C* = *DE*/*Z* ve *BH*/*C* = *ET*/*Z* için *AH*/*C* = *DT*/*Z* ilişkisi geçerlidir (*Şekil 25*).



Şekil 25- Bu örnekte *a* = 4, *b* = 2, *c* = 3; *d* = 1,5; *e* = 3; ya da *f*= 2,25; *AB*/*C* = *DE*/*Z* =2; *BH*/*C* = *ET*/*Z* = 1,5 için *AH*/*C* = *DT*/*Z* = 3,5 olduğu görülür.

Kanıtı: Eğer varsayılan *AB*/*C* = *DE*/*Z* ve *BH*/*C* = *ET*/*Z* oranlar oranlanırsa *AB*/*BH* = *DE*/*ET* ve *18. Önerme* gereği toplam özelliği uygulanırsa *AH*/*BH* = *DT*/*ET* ya da *BH*/*ET* = *AH*/*DT* elde edilir. Ancak koşul gereği *BH*/*C* = *ET*/*Z* ya da *BH*/*ET* = *C*/*Z* olması gerektiğinden, yukarıda elde edilen ifadeyle karşılaştırılırsa *AH*/*DT* = *C*/*Z* ya da önermede öngörüldüğü gibi *AH*/*C* = *DT*/*Z* olduğu kanıtlanmış olur.

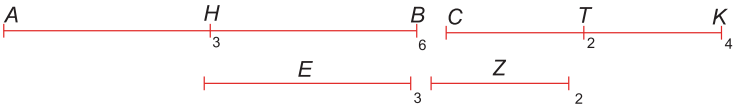
***XXV. Önerme*: Eğer dört uygun oranlı büyüklükte birinci en büyük ve sonuncu en küçükse, bu durumda bu ikisinin toplamı diğer ikisinin toplamından daha büyüktür.**[2]

Önerme gereği eğer *AB*/*CK* = *E*/*Z* uygun oranında, *AB* en büyük ve *Z* en küçük büyüklükse, bu durumda (*AB* + *Z*) > (*CK* + *E*) eşitsizliği geçerlidir (*Şekil 26*).

---

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a, b, c, d, e, f* büyüklüklerinde *a/b* = *c/d* ve *e/b* = *f/d* oranları geçerliyse bu durumda *(a + e)/b = (c + f)/d*

2 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a* > (*b ve c*) > *d* olmak üzere *a/b* = *c/d* ise bu durumda *(a + d)* > (*b + c)* eşitsizliği geçerlidir.



Şekil 26- Bu örnekte $AB/CK = E/Z = 3/2$ ve $AB = 6 > (CK = 4$ ve $E = 3) > Z = 2$; $(AB + Z) = 8 > (CK + E) = 7$.

Kanıtı: *AB* ve *CK* büyüklüklerinden *E* ve *Z* büyüklüğüne eşit *AH* ve *CT* büyüklüğünü ayıralım. Bu durumda $AB/CK = HB/TK$ olur. Koşul gereği $AB > CK$ olduğundan $HB > TK$ olur. Buna göre $HB = (AB - AH) > TK = (CK - CT)$ ya da $(AB - AH) > (CK - CT)$ yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafına $(AH + CT)$ ilave edilirse $(AB + CT) > (CK + AH)$ ya da kanıtlamak istediğimiz $(AB + Z) > (CK + E)$ eşitsizliği elde edilir.

Beşinci makalenin sonu.

ALTINCI MAKALE

Bu makale 32 önermeden oluşur. Ancak Sâbit nüshasında bir fazla[1] önerme bulunur.

GİRİŞ

Benzer şekiller: Eşit açılı ve açı kenarları uygun oranlı şekillere denir.

Ters oranlı şekiller: Kenarları ters oranlı şekillere denir.

Şeklin yüksekliği: Şeklin tepesinden tabanına indirilen diktir.

Altınoran oranında bölünen hat: Bu durumda hattın tümü ($m+n$) büyük parçaya (m) oranlandığında, büyükle (m) küçük (n) hat parçaların oranına eşit olacak şekilde bölünür.[2]

Oranların çarpımıyla oluşan oran: Oranlı büyüklüklerin başka oranlara çarpılması sonucu oluşur. Bu tanım sadece Sâbit nüshasında bulunur.

Oranlara bölünen oran: Bazı büyüklükler bölünerek yeni oranların oluşmasına neden olur.

Not: Oran bir büyüklük özelliği olduğu kadar bileşik oran da onun bir diğer özelliğidir. Büyüklük kendisiyle kıyaslandığı gibi, bazen de kendi dışında başka türden bir büyüklükle de kıyaslanabilir. Buna göre oran göreli bir büyüklüktür. Oran farklı kavramların kıyaslanmasında da kullanılabilir. Eğer büyüklükleri ölçmek için onlarla aynı türden büyüklükler mevcutsa, bu durumda ölçme işlemi eksiksiz gerçekleşir.

Büyüklüklerin mevcut büyüklüklerle ölçülememesi hali Onuncu Makale'de tartışılacaktır. Birinci ölçülebilir durumda, ölçü öyle bir büyüklüktür ki onunla kıyaslandığında büyüklük kendisine eşit olur.

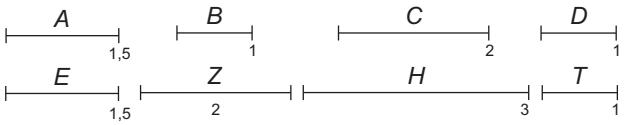
Bileşik oran: Büyüklüklerin birbirine, diğer bir deyişle bir kısmının bir başka kısmına oranlanması anlamına gelir. Örneğin A/B ve C/D herhangi iki orandır (*Şekil 1*). H ise birim olmak üzere $H/E = A/B$ ve $H/D = C/F$ ilişkisini sağlar Şu halde E ve D büyüklükleri A/B ve C/F oranlarının iki ölçü değeridir.

---

1 *11. Önerme*.

2 Cebirsel şu anlama gelir: Eğer $m > n$ hattın bölünen iki parçası ise, bu durumda $(m + n)/m = m/n$ ya da $F = m/n = (1+\sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$ *altın oran* ilişkisi geçerlidir.

Kanıt: *E* ve *D* büyüklüklerini çarpalım: (*D* × *E*) = *T*. Buna göre *T* bu oranların çarpılması sonucu ortaya çıkan oranın ölçü değeridir. Başka bir deyişle *T* öyle bir ölçüdür ki onunla *H* arasında başka bir ölçü daha bulunur. Yani *H* büyüklüğünün o ölçüye olan oranı iki oranın ortasında yer alır. Ortanın aynı ölçüye oranı başka bir ölçüdür. Buna göre *H* ile *T* arasına düşen *E* büyüklüğü ile *H*/*E* = *A*/*B*, *E*/*T* = *H*/*D* ya da *E*/*T* = *C*/*F* yazılabilir.



Şekil 1

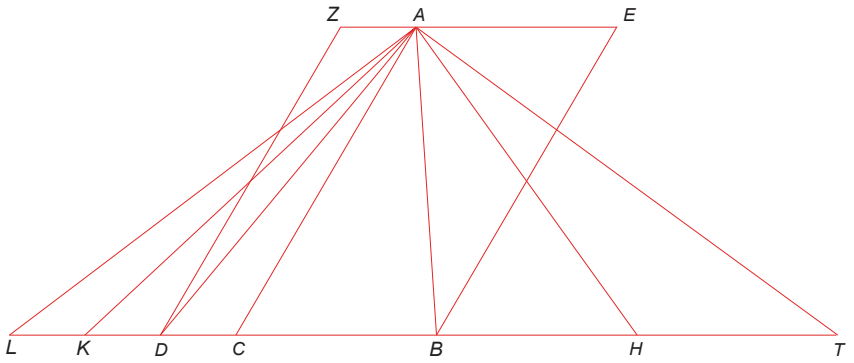
Bunu not ederek aynı türden üç büyüklüğün bulunduğunu varsayalım. Bunlardan birincinin üçüncüye oranı, birincinin ikinciye olan oranı, ikincinin üçüncüye olan oranının çarpımından oluşur. Şu halde eğer verilen büyüklükler *A*, *B* ve *C* ise *A*/*C* oranı *A*/*B* ve *B*/*C* oranlarının çarpımından oluşur. Gerçekten eğer *A*/*B* = *H*/*E* ve *B*/*C* = *H*/*D* ise yukarıda belirtilen esas gereği *A*/*C* = *H*/*T* olur.

Buna göre herhangi bir basit oran orta değer vasıtasıyla çarpma oranına dönüştürülebilir ve aksine herhangi bir çarpma oranı orta değer kaldırılarak sadeleştirilebilir. Hatta herhangi iki oran orta değerleri ortak olan orana çevrilebilir. Çarpma oranı mevcut olan bazı bölme oranları da vardır.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Yükseklikleri eşit olan paralelkenar ve üçgen alanlarının oranı tabanlarıyla orantılıdır.**

AEBC ve *ZACD* paralelkenarlarıyla *ABC* ve *ACF* üçgenlerinin yükseklikleri aynıdır (*Şekil 2*). Bu nedenden dolayı bu şekillere ilişkin alanlarının oranı *BC* ile *CD* tabanlarının oranına eşittir.

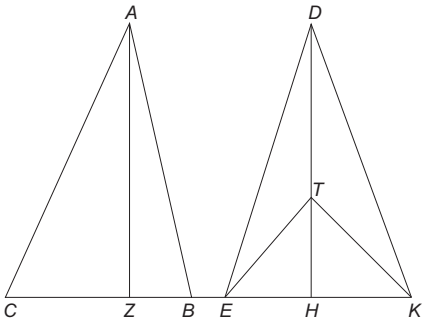


Şekil 2

Kanıtı: *BD* hattı her iki yöne doğru uzatıldıktan sonra bu hat üzerinde *BC* ve *CD* hatlarına eşit *BH*, *HT* ve *DK*, *KL* uzunlukları oluşturulur ve *AH*, *AT*, *AK* ve *AL* hatları çekilir. Bu durumda S(*ABC*) = S(*ABH*) = S(*AHT*) olur. Bunların toplamı 3 *ABC* alanına eşittir ve tabanların toplamı 3*BC* = (*BC* + *BH* + *HT*) olur. Benzer şekilde S(*ACD*) = S(*ADK*) = S(*AKL*) olur, üçü birlikte 3 *ACD* alanına eşittir ve 3*CD* = (*CD* + *DK* + *KL*) yazılabilir.

Eğer S(*ACT*) (> ,= ya da <) S(*ACL*) ise, bu durumda *CT* (> ,= ya da <) *CL* olacağından, kanıtlamak istediğimiz gibi S(*ABC*)/S(*ACD*) = *BC*/*CD* ilişkisi geçerlidir. Paralelkenarlar söz konusu olduğunda da kanıtı aynı şekilde sürdürmek mümkündür.

Not: Eğer paralelkenar ve üçgen alanlarının oranı tabanları oranına eşitse, bu şekillerde yükseklikler de eşittir (*Şekil 3*). *CK* hattı üzerindeki *ABC* ve *DKE* alanlarının oranı *BC* hattının *KE* hattına oranı kadardır. Bunların yükseklikleri birbirine eşit *AZ* = *DH* dikleridir. Eğer böyle olmayıp *TH* = *AZ* olsaydı, bu durumda *TK* ve *TE* hatlarını çektiğimizde S(*ABC*)/S(*TKE*) = *BC*/*KE* ilişkisi yazılabilirdi. Bu durumda S(*ABC*), S(*DKE*) ve S(*TKE*) oran ve alanları eşit olması gerekirdi ki bu yanlıştır. Şu halde olmayana ergi yöntemi gereği önerme hükmü geçerlidir. Aynı yöntem paralelkenarlara da uygulanabilir.



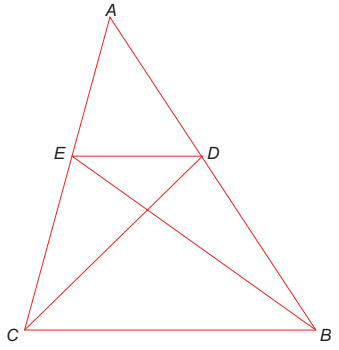
Şekil 3

***II. Önerme*: Bir üçgende eğer bir kenardan diğer kenara çekilen hat üçgenin üçüncü kenarına paralelse bu hat üçgenin iki kenarını aynı oranda keser; aksine eğer çekilen herhangi bir hat, bir üçgenin kenarlarını aynı oranda keserse, üçgenin diğer kenarına paraleldir.**

Bir *ABC* üçgeninde *BC* kenarına paralel *DE* hattı ile *BE* ve *CD* hatlarının çekildiğini varsayalım (*Şekil 4*).

Tabanları ve paralel hatlar arasında yükseklikleri eşit üçgenler için S(*DCE*) = S(*DBE*) yazılabilir. Bu durumda S(*ADE*)/S(*DCE*) = S(*ADE*)/S(*DBE*) ya da S(*ADE*)/S(*DCE*) = *AE*/*EC* ve S(*ADE*)/S(*DBE*) = *AD*/*DB* olduğundan *AD*/*DB* = *AE*/*EC* elde edilir.

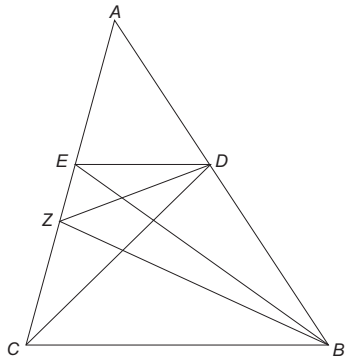
Önermenin ikinci kısmını kanıtlamak istersek yükseklikleri aynı üçgenler için S(*ADE*)/S(*DCE*) = *AE*/*EC* ve S(*ADE*)/S(*DBE*) = *AD*/*DB* yazabiliriz. Koşul gereği oranlar eşit olduğundan S(*DCE*) = S(*DBE*) ya da tabanları ve yükseklikleri eşit üçgenler nedeniyle *DE*//*BC* olacağı açıktır.



Şekil 4

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır: Bir an $DE//BC$ ancak $AD/DB \neq AE/EC$ nedeniyle bunun yerine $AD/DB = AZ/ZE$ olduğunu varsayalım (*Şekil 5*). DZ ve ZB hatlarını çekelim ve bu durumda daha önce gösterdiğimiz gibi DBE ve DZE üçgenlerinin eşit alanlı ve $DE//BZ$ olması gerektiğini belirtelim. Bu durumda $BZ//BC$ olması gerekir ki bu yanlıştır. Zira BZ hattı BC hattıyla kesiştiğinden önermenin birinci kısmı böylece kanıtlanmış olur (*Şekil 5*).

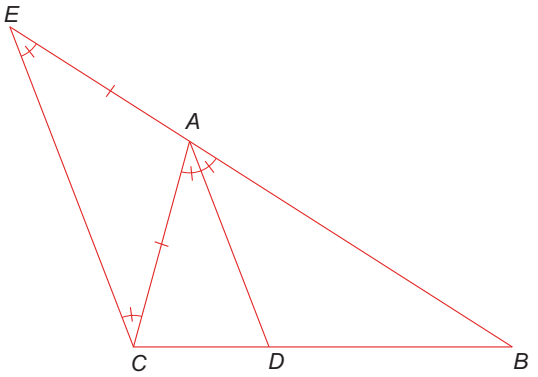
İkinci olarak $AD/DB = AE/EC$ olduğunu ancak BC hattının DE hattına paralel olmadığını varsayalım. Bunun yerine $BC//DZ$ olduğunu düşünürsek, bu durumda $AD/DB = AZ/ZC$ diğer bir deyişle $AZ/ZC = AE/EC$ olması gerekir. Ne var ki bu durumda $AE < AZ$ olduğundan $EC < ZC$ olması gerekir ki bu yanlıştır ve böylece önermenin ikinci kısmı da kanıtlanmış olur.



Şekil 5

***III. Önerme*: Herhangi bir üçgende her bir açıortay karşı kenarı geri kalan kenarlarla uygun bir oran oluşturacak şekilde keser, aksine eğer bir üçgende böyle bir hat karşı kenarı geri kalan kenarlarla uygun bir oran oluşturacak şekilde keserse, bu bir açıortaydır.**

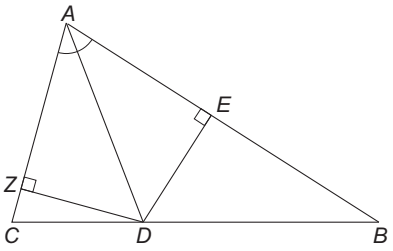
ABC üçgeninde A açısına ilişkin açıortayın AD hattı olduğunu varsayalım (*Şekil 6*). Üçgenin C noktasından AD hattına paralel CE hattını çekelim ve AB hattını CE hattıyla E noktasında kesişinceye kadar uzatalım. Bu durumda $\angle(BAD) = \angle(AEC)$, $\angle(DAC) = \angle(ACE)$ ve $\angle(ACE) = \angle(AEC)$ olduğundan AEC bir ikizkenar üçgendir: $AE = AC$. Şu halde *II. Önerme* gereği BEC üçgeni için $BD/DC = BA/AE$ yazılabilir, bu da önermede kanıtlanması gerektiği gibi $BD/DC = BA/AC$ olması anlamına gelir.



Şekil 6

Bundan sonra $BD/DC = BA/AC$ gerçekleşmesi halinde AD hattının açıortay olması gerektiğini kanıtlamamız gerekir. Yine BEC üçgeninde bu oran gerçekleştiğinde *II. Önerme* gereği $AD//EC$ ve $BD/DC = BA/AE$ oranının gerçekleşmesi gerektiğinden, oranlar karşılaştırılırsa $BA/AC = BA/AE$ ve $AC = AE$ olduğu görülür. Bu durumda $\angle(BAD) = \angle(AEC)$ ya da kanıtlamak istendiği gibi $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ olduğu görülür.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır; D noktasından üçgenin diğer iki kenarına DE ve DZ diklerini inelim (*Şekil 7*). AD açıortay olduğuna göre $\angle(ABD) = \angle(ACD)$, Z, E açıları dik ve AD ortak olduğundan $\Delta(ADE) = \Delta(ADZ)$ ve $DE = DZ$ yazılabilir. Ayrıca DE ve DZ hatları ABD ve ACD üçgenlerinin yükseklikleri olduğundan $S(ABD)/S(ACD) = AB/AC$ oranı yazılabilir. Benzer şekilde eğer BF ve FC taban kabul edilirse $S(ABD) = S(ACD) = BD/DC$ oranı yazılabilir. Buna göre $BD/DC = AB/AC$ ilişkisi geçerlidir ve önerme kanıtlanmış olur.

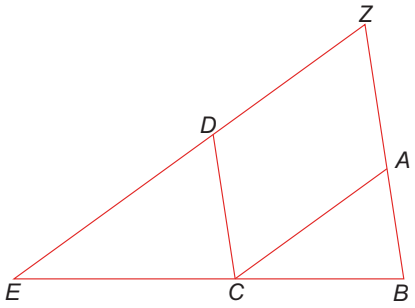


Şekil 7

Önermenin ikinci kısmında $BD/DC = AB/AC$ oranı geçerli olduğuna göre ABD ve ACD üçgenlerinde AB, AC hatları taban alınırsa $S(ABD)/S(ACD) = AB/AC$ ve üçgenlerin yükseklikleri eşit olur: $DE = DZ$. Buna göre $\Delta(ADE) = \Delta(ADZ)$ dik üçgenlerinde AD ortak olduğuna göre önerme gereği $\angle(EAD) = \angle(ZAD)$ ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

***IV. Önerme*: Uygun eşit açılı üçgenlerde, eşit açıların karşısındaki kenarlar uygun orantılıdır.**

Eğer ABC ve DCE üçgenlerinde $\angle(BAC) = \angle(CDE)$, $\angle(BCA) = \angle(CED)$ ve $\angle(CBA) = \angle(ECD)$ ise bu durumda $BC/CE = AB/DC = AC/DE$ olur (*Şekil 8*).

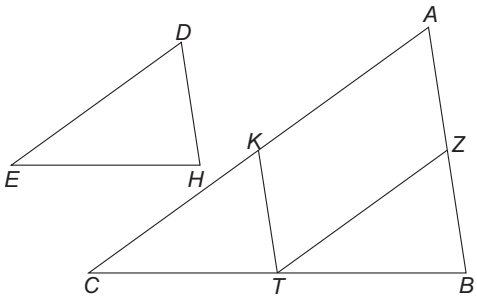


Şekil 8

Kanıtı: Her iki üçgenin BE hattı üzerinde bulunduğunu varsayalım. BA ve ED hatlarını Z noktasında kesişecek şekilde uzatalım. Koşul gereği $AC//DE$ ve $DC//ZB$, ayrıca iç ve dış açılar eşit olduğundan $ZACD$ bir paralelkenardır.

Bu durumda *III. Önerme* gereği $AB/AZ = BC/CE$ ya da $BC/CE = BA/CD$ yazılabilir. Ayrıca önermede öngörüldüğü gibi $BC/CE = ED/DZ$ ve $AC/DE = AB/DC$ oranları geçerlidir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır; ABC ve DHE üçgenlerinde $\angle(A) = \angle(D)$, $\angle(B) = \angle(H)$ ve $\angle(C) = \angle(E)$ olduğunu varsayalım (*Şekil 9*). Eğer $AB = DH$ ise, geri kalan üçgen kenarları da uygun olarak eşit olacağından önerge kanıtlanmış olur.



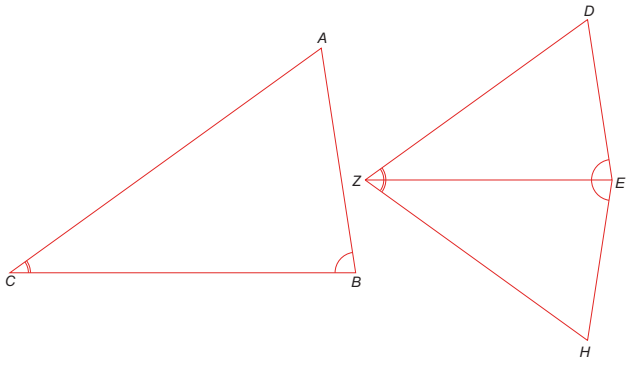
Şekil 9

$AB \neq DH$ halinde, $AB > DH$ için AB hattı üzerinde DH kenarına eşit BZ hattı ayrılır ve AC hattına paralel ZT hattı çekilir. Bu durumda $\Delta(ZBT) = \Delta(DHE)$ ve $AZ/ZB = CT/TB$ ya da toplama özelliği uygulanırsa $AB/ZB = CB/TB$ elde edilir. Ayrıca $BT = HE$ ve $EB = DH$ olduğundan $AB/DH = BC/HE$ olduğu görülür.

Ayrıca BA hattına TK paraleli çekilirse $CA/KA = CB/TB$, $CA/TZ = CB/EH$ ya da amaçlanan $CA/ED = CB/EH$ ilişkisi elde edilir.

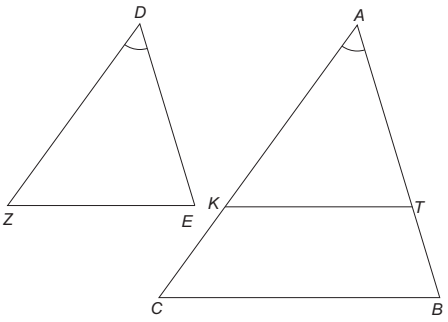
***V. Önerme*: Herhangi iki üçgenin kenarları uygun orantılı olması halinde açıları da uygun olarak eşittir.**

Verilen ABC ve DEZ üçgenlerinde eğer $AC/DZ = AB/DE = BC/EZ$ ilişkileri geçerliyse, bu durumda $\angle(A) = \angle(D)$, $\angle(B) = \angle(E)$ ve $\angle(C) = \angle(Z)$ olmalıdır (*Şekil 10*).



Şekil 10

Kanıtı: *EZ* hattının *E* noktasında *B* açısına eşit *ZEH* açısını ve *Z* noktasında *C* açısına eşit *EZH* açısını oluşturalım ve bu iki hattı *H* noktasında kesişinceye kadar uzatalım. *ABC* ve *HEZ* üçgenlerinin açıları uygun olarak eşit olduğundan *IV: Önerme* gereği *BC*|*EZ* = *AB*|*EH* yazılabilir, ancak varsayım gereği *BC*|*EZ* = *AB*|*DE* olmalıdır. Buna göre *EH* = *ED* ve *ZH* = *ZD* olmalıdır. Böylece kanıtlamak istediğimiz gibi *DEZ* üçgeninin açıları uygun olarak *HEZ* üçgeninin, diğer bir deyişle *ABC* üçgeninin açılarına eşittir.



Şekil 11

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha bulunur. Eğer önceki önermede olduğu gibi *ABC* ve *DHE* üçgenlerinin kenarları uygun olarak eşit olsa önermenin koşulu kendiliğinden yerine gelmiş olur (Buradaki tartışma için *Şekil 9*'a bakınız). Kenarların eşit olmadığını ve örneğin *AB* > *DH* olduğunu varsayalım. Bu durumda *BA* üzerinde *HD* kenarına eşit *BZ*, *BC* üzerinde *HE* kenarına eşit BT hatları ayrılır. *ZT* ve AB hattına paralel *TK* hatları çekilirse *VI. Önerme* gereği *AB*|*DH* = *BC*|*HE* ya da *AB*|*ZB* = *BC*|*BT* oranları yazılabilir. Oran farkları alınırsa bulunan *AZ*|*ZB* = *CT*|*BT* ilişkisi nedeniyle *ZT*||AC ve aynı şekilde *TK*||*AB* ve *AK* = *ZT* olduğu görülür. Buna göre *BZT* ve *HDE* üçgenlerinin kenarları uygun olarak eşittir. Neticede *BAC* ve *HDE* üçgenlerinin açıları da uygun olarak eşittir.

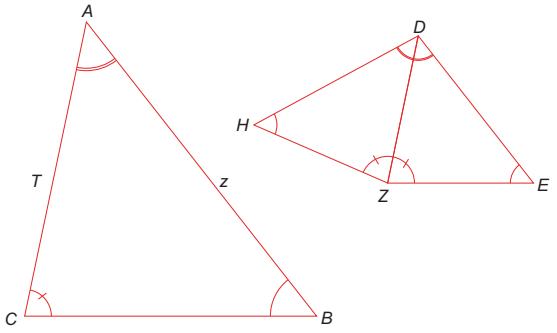
***VI. Önerme*: Eğer iki üçgenin birer açısı eşit ve bu açıya bitişik kenarlar karşılıklı uygun orantılıysa, bu durumda üçgenlerin diğer açıları da eşittir.**

Eğer *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde ∠(*A*) = ∠(*D*) ve *AB*|*DE* = *AC*|*DZ* ise bu durumda ∠(*B*) = ∠(*E*) ve ∠(*C*) = ∠(*Z*) olmalıdır (*Şekil 12*).[1]

1 Bu nüshada *Şekil 11* ile *Şekil12*'nin yerleri karıştırılmıştır.

Kanıtı: *DEZ* üçgeninin *DZ* kenarı üzerinde *D* ve *Z* noktalarında *A* ve *C* açısına eşit *ZDH* ve *DZH* açıları oluşturulur. Her iki hat *H* noktasında kesişinceye kadar uzatılır. Bu durumda *ABC* ve *DHZ* üçgenlerinin açıları eşit olduğundan *IV. Önerme* gereği *AC*|*DZ* = *AB*|*DH* ilişkisi yazılabilir. Ancak varsayım gereği *AC*|*DZ* = *AB*|*DE* olduğundan *DE* = *DH* olması gerekir. Neticede ∠(*A*) = ∠(*ZDE*) = ∠(*ZDH*) olduğundan, amaçladığımız gibi *DZH* ve *DZE* üçgenlerinde açıların uygun olarak eşit olduğu kanıtlanmış olur.

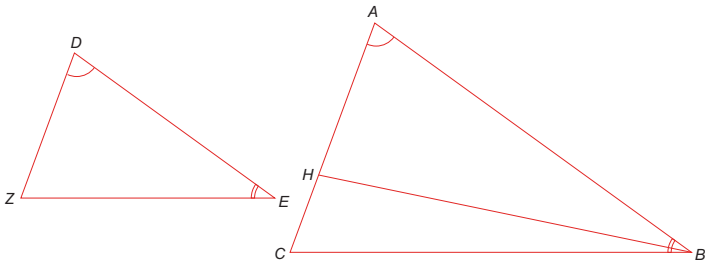
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Eğer *AB* = *DE* ve *AC* = *DZ* olduğunu varsayarsak bu durumda önermenin kolaylıkla kanıtlanabileceği açıktır. Böyle olmadığını ve *AB* > *DE*, *AC* > *DZ* olduğunu varsayalım (*Şekil 11*). *AB* ve *AC* kenarları üzerinde *DE* ve *DZ* hattına eşit *AT* ve *AK* hatlarını ayırıp *T* ve *K* noktalarını birleştirelim. Bu durumda *AB*|*AT* = *AC*|*AK* ya da fark alınırsa *TB*|*AT* = *KC*|*AK* ilişkisi yazılabilir. Bu durumda *BC*||*TK* ve *ABC* üçgeninin açıları uygun olarak *ATK* üçgeni açılarına eşit olur.



Şekil 12

***VII. Önerme*: Eğer iki üçgende birer açı eşit ve diğer açı kenarları karşılıklı uygun orantılıysa, geriye kalan açıların dik açıdan büyük ya da küçük olmasından bağımsız olarak eşittirler.**

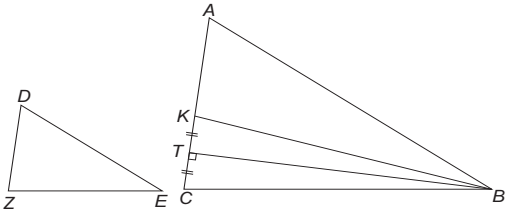
Eğer *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde ∠(*A*) = ∠(*D*) ve *AB*|*DE* = *BC*|*EZ* olduğunu varsayarsak bu durumda ∠(*B*) = ∠(*E*) ve ∠(*C*) = ∠(*Z*) olmalıdır (*Şekil 13*).



Şekil 13

Kanıtı: Bir an $\angle(B)$ ve $\angle(E)$ açılarının eşit olmayıp $\angle(B) < \angle(E)$ özellikli olduğunu varsayalım. *ABC* üçgeninin *AB* kenarı üzerindeki *B* noktasında *E* açısına eşit *ABC* açısını oluşturalım. Bu durumda $\angle(BHA) = \angle(Z)$ ve $AB/DE = BH/EZ$ olmalıdır. Ancak koşul gereği $AB/DE = BC/EZ$ olması gerektiğinden $BH = BC$ ve $\angle(BCA) = \angle(BHA)$ olmalıdır.

Eğer $\angle(C)$ ve $\angle(Z)$ dik açıdan büyükse, bu durumda *BHC* üçgenindeki $\angle(BCA)$ ve C ve H her iki açının da dik açıdan büyük olması gerekir ki bu yanlıştır. Eğer $\angle(C)$ ve $\angle(Z)$ dik açıdan küçükse bu durumda $\angle(H)$ dik açıdan büyük olması gerekir ki bu da mümkün değildir. Şu halde kanıtlamamız gerektiği gibi $\angle(B) = \angle(E)$ ve $\angle(C) = \angle(Z)$ olması gerekir.



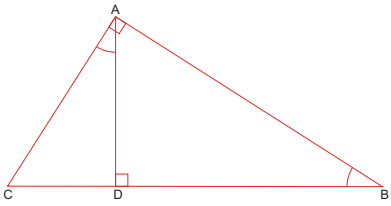
Şekil 14

Not: *ABC* ve *DEZ* benzer üçgenlerinde bütün açıların dar olmasını ve $AB > BC$ koşulunu açıklığa kavuşturmak gerekir. *B* noktasından *AC* hattına *BT* dikini inelim (*Şekil 14*). Bu durumda $AT > TC$ olur. *AC* hattı üzerinde *TC* hattına eşit *TK* parçasını ayıralım ve BK hattını çekelim. Bu durumda $BK = BC$ olur. *ABK* ve *DEZ* üçgenlerinde $\angle(A) = \angle(D)$ ve $AB/DE = BC/EZ$ olduğundan $AB/DE = BK/EZ$ olmalıdır. Ne var ki bu iki *AKB* ve

DZE üçgeni, *BKA* açısı geniş ve *EZD* açısı dar olduğundan benzer değildir. Böylece görülür ki kalan açıların her birinin dik açıdan küçük ya da büyük olması koşulu yeterli değildir. Burada Sâbit galat etmişti. Bu koşul, *her ikisinin dik açıdan küçük ya da büyük olmasının bir farkı yoktur* şeklinde olmalıdır.

***VIII. Önerme*: Bir dik üçgenin dik köşesinden hipotenüse inilen dik, bu üçgeni birbirlerine ve büyük üçgene benzer iki üçgene böler.**

Eğer *ABC* dik üçgeninin dik açısından *BC* hipotenüsüne *AD* diki inilirse oluşan Δ(*ABD*), Δ(*CAD*) ve Δ(*ABC*) dik üçgenleri benzerdir (*Şekil 15*). Bu durumda *ABD* ve *ABC* üçgenlerinde ∠(*C*) ortak ∠(*CAB*) = ∠(*ADC*) = 90° ve geriye kalan açı ∠(*CAD*) = ∠(*CBA*) olduğundan *AD*/*AB* = *AB*/*BC* = *DC*/*AC* yazılabilir.



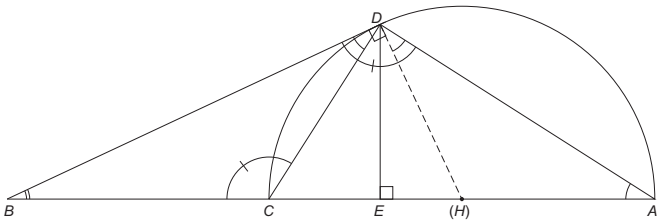
Şekil 15

Aynı şekilde *BAD* ve *ABC* üçgenlerinin de benzer olduğu kanıtlanabilir. Ayrıca ∠(*D*) her ikisinde dik açı, ∠(*C*) = ∠(*DAB*) ve ∠(*B*) = ∠(*CAD*) olduğundan *ABD* ve *ACD* üçgenleri de benzerdir. Bu nedenden önermede öngörüldüğü gibi *AB*/*AC* = *BD*/*AD* = *AD*/*CD* yazılabilir. Bu oranlardan aynı zamanda $AD^2 = (CD \times DB)$, $AB^2 = (BC \times DB)$ ve $AC^2 = (BC \times CD)$ ilişkileri de türetilebilir.

***IX. Önerme*: Verilen iki büyüklüğün orta oranının bulunması.**[1]

Aynı hat üzerinde bulunduğu varsayılan *AB* ve *BC* hatlarının toplamı çap kabul edilerek *ADC* yarı dairesi çizilir (*Şekil 16*). *B* noktasında *AC* çapına dik çekilen *BF* hattı daireyi *D* noktasında keser. *BD* hattı *AB* ve *BC* hatlarının orta oranıdır.

1 Bu önerme, *a* ve *b* büyüklüklerinin *x* ortalama değerini $x/a = b/x$ ortak oranıyla verir ve cebirsel olarak $x^2 = (a \times b)$ ya da $x = (a \times b)^{1/2}$ anlamına gelir. Önerme Öklides'in özgün eserinde Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 5. Kitapta *13. Öneri* olarak yer alır.

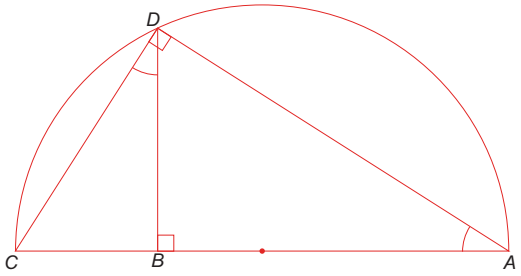


Şekil 16

Kanıtı: Eğer *DA*, *DC* ve *DH* hatları çekilirse $\angle(ADC) = 90°$ olur. *8. Önerme* gereği *FB* hipotenüse çekilen bir dik olduğundan kanıtlamak istediğimiz gibi $BD^2 = (AB \times BC)$ ilişkisi geçerlidir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Eğer iki düz hattın biri (*CD*) diğerinin (*AC*) üzerine izdüşürülürse, uzun hattı ($AC = AB + BC$) çap kabul eden bir yarım daire çizilir (*Şekil 16*). Kısa hattın *B* noktasından daireyi *F* noktasında kesen *BD* diki ve *CD* hattı çizilir. *CD* hattı *AC* hattı üzerine *CB* olarak izdüşen hattır. *DB* hattı verilen *AB* ve *BC* hatlarının aranan ortalama oranını oluşturur.

Önermeyi kanıtlamanın bir başka yolu: Verilen *AB* ve *BC* hatlarının farkına eşit $AC = (AB - BC)$ hattı çap kabul edilerek *ADC* yarım dairesi çizilir (*Şekil 17*). *B* noktasından daireye *BD* teğeti çizilir. Bu teğet *AB* ve *BC* hatlarının aranan orta oranını belirler $BD^2 = (AB \times BC)$.



Şekil 17

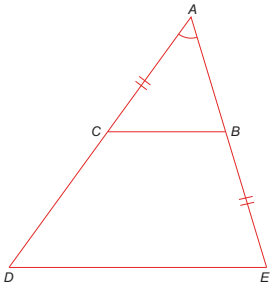
Eğer *DA*, *DC* ve *DH* hatları çekilirse, *ADC* ve *BDH* açıları diktir. Bu iki dik açı arasındaki ortak *HDC* açısı çıkarılırsa geriye kalan açılar eşittir: $\angle(HDA) = \angle(BDC)$. Ayrıca *DAH* bir ikizkenar üçgen olduğundan $\angle(HADF) = \angle(BDC)$ ilişkisi geçerlidir.

Buna göre *BAD* ve *BDC* üçgenlerinde *B* açısı ortak, ∠(*HAD*) = ∠(*BDC*) ve geriye kalan ∠(*BDA*) = ∠(*BCD*) açıları da eşit olduğundan, *4. Önerme* gereği *AB*/*BD* = *BD*/*BC* yazılabilir ve önerme kanıtlanmış olur.

Şu halde, eğer aynı yönde iki hattın temas noktasından çekilen dikmenin boyu hatların ortalama oranına karşı düşüyorsa, üst ucu hatların toplamını çap kabul eden dairenin üzerine düşmelidir.

***X. Önerme*: Verilen iki hatla uygun orantılı bir üçüncü hattın bulunması.**[1]

Verilen *AB* ve *AC* hatları herhangi bir açının kenarlarını oluşturacak şekilde yerleştirilir (*Şekil 18*). Bu hatlar uzatılır ve *AC* hattına eşit *BE* parçası işaretlenir. *BC* hattı çekildikten sonra ona paralel *ED* hattı çekilir. *CD* hattı aranan üçüncü hattır.

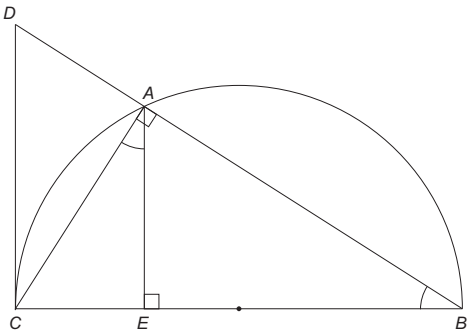


Şekil 18

Çünkü oluşan bir kenarı diğerine paralel iki benzer üçgende *AB*/*BE* = *AC*/*CD* ya da *BE* = *AC* nedeniyle isteğimize uygun *AB*/*AC* = *AC*/*CD* elde edilir.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Verilen *AB* ve *AC* hatlarının bir dik açı oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 19*). *B* ve *C* noktalarını birleştirelim ve *BC* hattını yarıçap alarak *BAC* yarım dairesini çizelim. *C* noktasından *BC* hattına dik *CD* hattını çizelim ve *BA* hattını *CD* hattıyla *D* noktasında kesişinceye kadar uzatalım. *CA* hattı *CBD* dik üçgeninin *C* dik açısından hipotenüse indirilen diktir. Buna göre *AB*/*AC* = *AC*/*AD* ilişkisi geçerlidir.

1 Bu önerme Öklides'in özgün eserinde Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 5. Kitapta *11. Öneri* olarak yer alır.

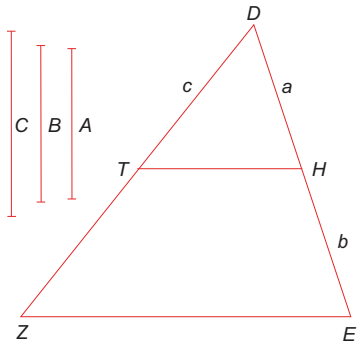


Şekil 19

Başka bir yol: Çapı verilen iki hattın uzununa (*BC*) eşit olan *BAC* yarım dairesi çizilir ve bu dairenin içine kısa hattın boyuna eşit *AB* kirişi işaretlenir. *A* noktasından *BC* hattına *AE* diki inilir. *BE* aranan üçüncü hattır. *IX. Önerme* gereği açıları eşit benzer *ABC* ve *AEB* dik üçgenleri nedeniyle istenen *AB*/*AC* = *AC*/*BE* ilişkisi elde edilir.

***XI. Önerme*: Verilen üç hatla uygun orantılı bir dördüncü hattın oluşturulması.**[1]

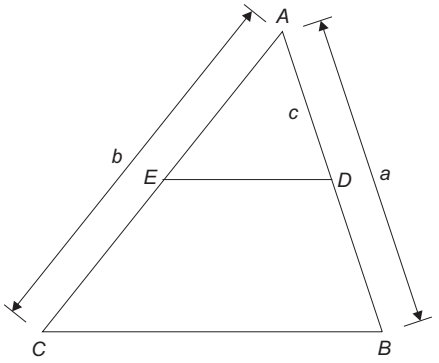
Burada *A*, *B* ve *C* hatlarının verildiği varsayılır: İlkin herhangi bir açının kenarlarını oluşturan iki *DH* ve *DT* hattı çekilir (*Şekil 20*). *DH* hattında *A* = *a* hattına eşit *DH*, *B* = *b* hattına eşit *HE* ve *BT* hattında *C* = *c* hattına eşit *DT* hattı ayrılır ve *TH* hattı çizilir. *E* noktasından *HT* hattına paralel olan *EZ* hattı çekilir. *TZ* hattı aranan dördüncü hattır. Çünkü isteğimize uygun olan *DH*/*HE* = *DT*/*TZ* ya da *a*/*b* = *c*/*TZ* ilişkisi geçerlidir.



Şekil 20

1 Bu önerme Öklides'in özgün eserinde Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak *12. Öneri* olarak yer alır.

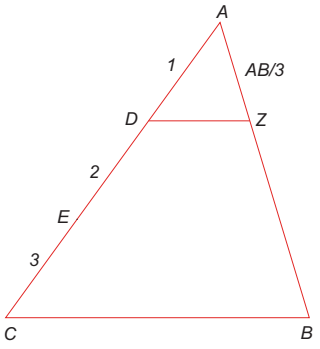
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. *A* açısının kenarlarından birinde birinci (*AB* = *a*) ve diğerinde ikinci büyüklük (*AC* = *b*) bulunduğunu varsayalım (*Şekil 21*). *AB* hattı üzerinde üçüncü *AD* (= *c*) hattını ayıralım. *BC* hattına paralel *DE* hattı çekilir. *AE* hattı belirlenmek istenen dördüncü hattır. Bu durumda *AB*/*AD* = *AC*/*AE* ya da *a*/*c*= *b*/*AE* ilişkisi elde edilir. Bu önerme Sâbit tarafından ilave edilmiştir.



Şekil 21

***XII. Önerme*: Verilen bir hattın herhangi bir oranda ikiye ayrılması.**[1]

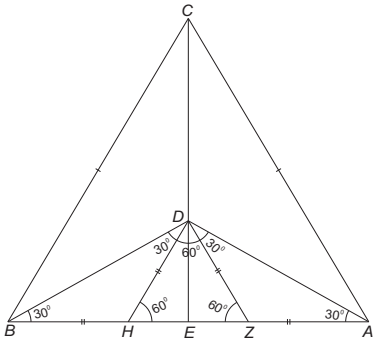
Verilen bir *AB* hattını örneğin 1/3 oranında ayırmak isteyelim (*Şekil 22*). *A* noktasında *AB* hattıyla herhangi bir açı yapan *AC* hattı oluşturulur. *AC* hattı herhangi bir ölçekte, birbirine eşit üç kısma ayrılır: *AD*, *DE* ve *EC*. Sonra *BC* hattı ve *D* noktasından bu hatta paralel *DZ* hattı çekilir. Bu paralel hat *AB* hattını 1/3 oranında böler. Çünkü *AZ*/*AB* = *AD*/*AC* ilişkisi geçerlidir ve çizim gereği *AD* = *AC*/3 olduğundan, hedefimiz yönünde *AZ* = *AB*/3 oranında bölünmüş olur.



Şekil 22

1 Özgün eserinde bu öneri, Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak *9. Öneri* olarak yer alır.

Not: Verilen bir hattı üç kısma bölmenin özel ve bilinegelen bir yöntemi daha vardır ki bunun için *1. Makale*deki önerilere ihtiyaç duyulmaz. Verilen hattın *AB* olduğunu varsayalım ve bu hattın üzerinde bir *ABC* eşkenar üçgen oluşturalım (*Şekil 23*). Üçgenin *A* ve *B* açılarına ilişkin açıortaylarını çizelim. Çizilen açıortayları *D* noktasında kesişir. Sonra ilkin *ADB* açısının *DE* ve daha sonra *ADE* ve *BDE* açılarının *DZ* ve *DH* açıortayları çizilir.



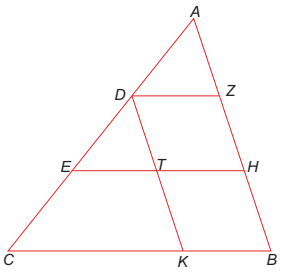
Şekil 23

AB hattı *Z* ve *H* noktalarıyla üç eşit kısma bölünür. Çünkü *ABC* eşkenar üçgeninin köşe açıları 60° olduğundan çizilen açıortaylar nedeniyle ∠(*DBA*) = ∠(*DAB*) = 30° ve *ABD* üçgeninde geriye kalan ∠(*ADB*) = 120° olduğu görülür. Buna göre *D* noktası etrafındaki 4 eşit açının her biri yine açıortaylar nedeniyle 30° olur. *ADZ* ve *BDH* üçgenleri ikizkenar ve *DHZ* üçgeni bir eşkenar üçgen olduğundan neticede *AZ*= *HZ* = *BH* olduğu kanıtlanmış olur.

***XIII. Önerme*: Verilen bir hattın diğer bir hatta eşdeğer olarak bölünmesi.**[1]

AB verilen, *AC* diğer *D* ve *E* noktalarında bölünmüş hat olduğunu ve bu iki hattın herhangi bir *A* açısının kenarlarını oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 24*). İlkin *BC* hattı çekilir. Daha sonra *D* ve *E* noktalarından *BC* hattına paralel *DZ* ve *EH* hatları, *D* noktasından *AB* hattına paralel *DK* hattı çekilir. Bu durumda *AB* hattı da *Z* ve *H* noktalarında *AC* hattı oranında bölünmüş olur. Çünkü amacımıza uygun olarak *AZ*/*ZH* = *AD*/*DE* ve *ZH*/*HB* = *DE*/*EC* ilişkileri geçerlidir.

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak *10. Öneri* olarak yer alır.



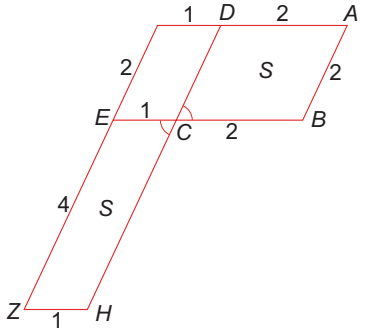
Şekil 24

***XIV. Önerme*: Açıları ve alanları eşit paralelkenarlarda eşit açıların kenarları ters orantılıdır; aksine eşit açıların kenarları ters orantılı paralelkenarların alanları eşittir.**

Örneğin *DABC* ve *ECHZ* paralelkenarların alanları ve *DCB* ile *ECH* açıları eşittir (*Şekil 25*). Bu durumda *BC*/*CE* = *CH*/*CD* olduğunu kanıtlamamız gerekir.

Kanıtı: *EC* ve *CB* hatlarının aynı hat üzerinde bulunduklarını varsayalım. Eğer *DCE* alanı oluşturulursa karşılıklı alanların eşitliği nedeniyle S(*DABC*)/S(*DCE*) = S(*ECHZ*)/S(*DCE*) oranı yazılabilir. Ancak bu oranda S(*DABC*)/S(*DCE*) = *BC*/*CE* ve S(*ECHZ*)/S(*DCE*) = *CH*/*CD* olduğundan *BC*/*CE* = *CH*/*CD* ilişkisi elde edilir.[1]

Aksine, eğer *BC*/*CE* = *CH*/*CD* ilişkisi geçerliyse bu S(*DABC*) = S(*ECHZ*) anlamına gelir, çünkü bu iki alanın S(*DCE*) alanına oranı kenarların oranına karşı düşer. Aynı alana oranlanan bu iki alanın eşitliği alanların eşitliğini gerekli kılar. Bu da bizim istediğimizdir.

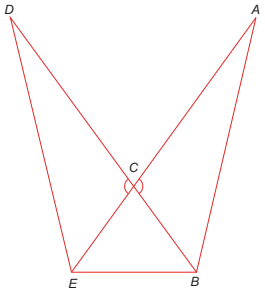


Şekil 25 [Burada *BC* (2)/*CE* (1) = *CH* (4)/*CD* (2) = S(*DABC*)/S(*DCE*) = S(*ECHZ*)/S(*DCE*) = 2; S(*DABC*) = S(*ECHZ*) = *S*]

1 Bir paralelkenarın *a* ve *b* ayrıtları ile aralarındaki *j* açısı verildiğinde, paralelkenarın yüksekliği *h* = (*b* × sin *j*) olmak üzere alanı, *S* = (*a* ×*h*) = [*a* × (*b* × sin *j*)] ilişkisiyle hesaplanır. Açıları eşit ($j = j_1 = j_2$) paralelkenar alanları oranlandığında $S_1/S_2 = (a_1 \times b_1)/(a_2 \times b_2)$ yazılabilir.

***XV. Önerme*: Eşit üçgenlerde eğer açılar bire bir eşitse bu durumda eşit açıların kenarları karşıt orantılıdır; aksine bire bir eşit açılı üçgenlerde eğer açıların kenarları karşıt orantılıysa üçgenler eşittir.**

Birbirine eşit olan *ABC* ve *DEC* üçgenlerde *ACB* ve *DCE* açıları eşittir. Bu durumda *AC*/*CE* = *DC*/*CB* ilişkisi geçerli olmalıdır.(*Şekil 26*).



Şekil 26

Kanıtı: *BE* hattı çekilir. *ABC* ve *DEC* üçgenleri eşit olduğundan S(*ABC*)/S(*BCE*) = S(*DEC*)/S(*BCE*) yazılabilir. Burada S(*ABC*)/S(*BCE*) = *AC*/*CE* ve S(*DEC*)/S(*BCE*) = *DC*/*CB* olur. Buna göre kanıtlamamız gerektiği gibi *AC*/*CE* = *DC*/*CB* ilişkisi geçerlidir.

Aksine eğer *AC*/*CE* = *DC*/*CB* ilişkisi geçerliyse, bu durumda Δ(*ABC*) = Δ(*DEC*) olmalıdır. Çünkü bu durumda S(*ABC*)/S(*BCE*) = *AC*/*CE* ve S(*DEC*)/S(*BCE*) = *DC*/*CB* olduğu ve koşul gereği Δ(*ABC*) = Δ(*DEC*) olması gerektiği anlaşılır. Bu da bizim kanıtlamak istediğimizdir.

Not 1: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Eşit olduğu ifade edilen *ABC* ve *ZDE* üçgenlerinde ∠(*A*) = ∠(*Z*) olduğunu varsayalım (*Şekil 27*). Eğer *AB* = *ZD* ise öneri hükmü gereği bu iki üçgenin birbirine eşit olacağı açıktır.

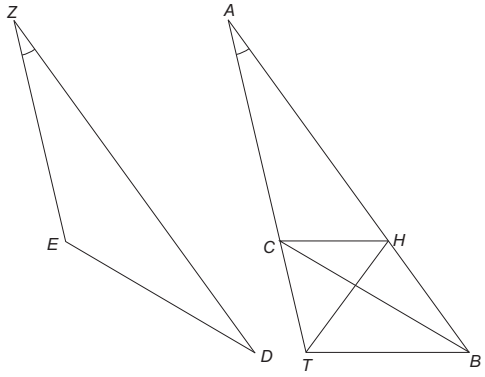
Ne var ki *AB* kenarı *ZD* kenarı ve *A* açısı *Z* açısı üzerine getirildiğinde, eğer *AC* ≠ *ZE* ise bu iki üçgenin eşit olmaması gerekir ki bu yanlıştır. Şu halde söz konusu oranlar eşit büyüklükler için geçerlidir. Söz konusu üçgende eğer yukarıda verilen oranlar geçerliyse, bu durumda üçgenin beraberliği gerçekleşmesi için *AC* = *ZE* olması gerekir.[1]

1 Burada Tûsî olmayana ergi kanıtlama yöntemini uygulamış ve özgün şekli iki üçgen haline getirerek Aslında *E* ve *C* ile *D* ve *T* noktalarının eşdeğerliğini kanıtlamaya çalışmıştır.

Bir an *AB* ve *ZD* hatlarının eşit olmadığını, *AB* hattının *ZD* hattından daha büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda *AB* hattından *ZD* hattına eşit olan *AH* parçasını ayıralım. Verilmiş olan üçgenlerin eşit olması için *ZE* > *AC* olmalıdır. Çünkü eğer *ZE* = *AC* ya da *ZE* < *AC* olsaydı, bu durumda *ZDE* üçgeni *ABC* üçgeninden küçük olurdu. Şimdi *AT* = *FC* olduğunu varsayalım, *TH* ve *TB* hatlarını çekelim.

Bu durumda Δ(*AHT*) = Δ(*ZED*) ve *ACH* üçgeni ortaktır. Ortak üçgen atılırsa Δ(*HBC*) = Δ(*HTC*) ve *HC*||*BT* olur. Şu halde *AB*|*AH* = *AT*|*AC* ya da *AB*|*FH* = *ZD*|*AC* olur.

Bu sonuncu iki oranın eşit olması için *AC* < *ZE* olmalıdır. Nihayet önermenin doğruluğunu kanıtlamak amacıyla iki oranın eşitliğinden ve *HTC* ile *HBC* üçgenlerinin eşitliğinden yararlanarak verilen üçgenlerin eşit olduğu gösterilir.



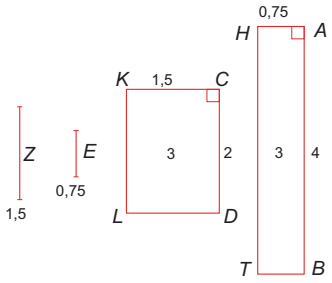
Şekil 27

Not 2: Eğer bundan önceki önermenin kanıtlanmasında bu önermeden yararlanmak istenirse, öncelikle paralelkenarları üçgenlere ayırmak gerekir.

***XVI. Önerme*: Eğer dört hat uygun orantılı olarak verilmişse, bu durumda birinciyle sonuncunun çarpımından oluşan dörtgenin alanı, geriye kalan ikisinin çarpımından oluşan dörtgen alana eşittir. Aksine, eğer herhangi dört büyüklükte bu koşul gerçekleşiyorsa söz konusu hatlar uygun orantılıdır.**

AB, *CD*, *Z* ve *E* hatlarının uygun orantılı (*AB*|*CD* = *Z*|*E*) olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 28*). *AB* ve *CD* hatlarının *A* ve *C* noktalarından

AH= *E* ve *CK* = *H* olacak şekilde *AD* ve *CK* dikleri çekilir ve sonra *HABT* ve *KCDL* dörtgen alanları oluşturulur. Verilen hatlar orantılı ve açılar eşit olduğuna göre bu alanların kenarları ters orantılıdır: *AB*/*CD* = *CK*/*AD* ya da *AB*/*CF* = *H*/*E* olduğundan bu iki alan eşittir.



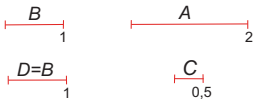
Şekil 28

[Burada *AB*(4)/*CD*(2) = *Z*(1,5)/*E*(0,75) = 2, S(*ABTH*) = S(*CDLK*) ya da (4 × 0,75) = (2 × 1,5) = 3]

Aksine bu iki alanın eşit olduğu varsayılırsa, bu durumda onların kenarları ters orantılı olacağından isteğimize uygun olarak hatlar orantılı olur.

***XVII. Önerme*: Herhangi orantılı üç hattan birincinin üçüncüyle çarpımı ikincinin karesine eşittir. Aksine herhangi üç hat arasında bu koşul geçerliyse bu hatlar orantılıdır.**

Orantılı hatların *A*, *B* ve *C* olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 29*). *B* hattına eşit bir *D* hattı oluşturalım. Bu durumda *A*/*B* = *D*/*C* ya da *A*/*B* = *B*/*C* ilişkisi elde edilir. Diğer bir deyişle önerme gereği (*A* × *C*) = B^2 ilişkisinin sağlandığı görülür.

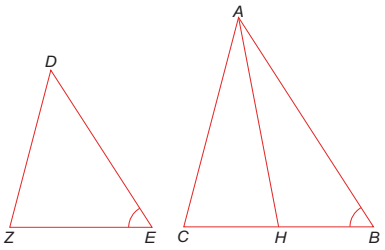


Şekil 29

Aksine eğer (*A*×*C*) = B^2 ilişkisi geçerliyse, bu durumda (*A* × *C*) = (*B* × *D*) ya da *A*/*B* = *D*/*C* oranının yani önermede öngörülen *A*/*B* = *B*/*C* ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

***XVIII. Önerme*: Herhangi benzer iki üçgen alanın oranı üçgenlerin uygun kenarları oranının karesine eşittir.**[1]

Benzer *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde örneğin S(*ABC*)/S(*DEZ*) = (*BC*/*EZ*)^2 ilişkisi geçerlidir (*Şekil 30*).



Şekil 30

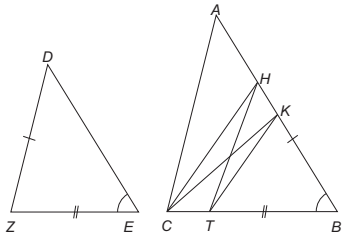
Benzer *ABC* ve *DEZ* üçgenlerinde *B* ve *E* açıları eşit, *BC* kenarı *EZ* kenarına karşı düşer. Buna göre *BC* ile *EZ* arasında *XI. Önerme* gereği *BC*/*EZ* = *EZ*/*BH* ilişkisini sağlayan bir ortalayan *BH* büyüklüğün bulunduğu varsayılabilir ve *ABC* üçgeninde *AH* hattı çekilir. Şu halde *ABH* ve *DEZ* üçgenlerinde eşit açıların kenarlar karşıt orantılıdır. Buna göre *AB*/*DE* = *EZ*/*BH* ve *BC*/*EZ* = *EZ*/*BH* ifadesinden *AB*/*DE* = *BC*/*EZ* ya da *AB*/*BC* = *DE*/*EZ* karşıt oranlı ilişki yazılabilir.

Ancak *XV. Önerme* gereği bir açıları eşit ve eşit açıların kenarları karşıt oranlı olan üçgenler eşittir. Diğer bir deyişle *ABH* üçgeni *DEZ* üçgenine eşittir. Neticede yükseklikleri eşit *ABC* ve *ABH* üçgenlerinin alanları oranlanırsa S(*ABC*)/S(*ABH*) = *BC*/*BH* elde edilir. Ayrıca eşit *ABC* ve *DEZ* üçgenlerin alanları oranlanır ve (*BC* × *BH*) = *EZ*^{2} olduğu göz önünde bulundurulursa, S(*ABC*)/S(*DEZ*) = S(*ABC*)/S(*ABH*) = *BC*/*BH* = *BC*^{2}/(*B*C × *BH*) = (*BC*/*EZ*)^2 nedeniyle önermenin öngördüğü S(*ABC*)/S(*DEZ*) = (*BC*/*EZ*)^2 ifadesinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

Not: Eğer *BH* = *BC* ya da *BH* > *BC* ise bir fark etmez ve aynı sonuca ulaşılır. Bu önermenin başka bir kanıt yolu daha vardır. Eğer *AB* = *DE* ise, eşit oranların karesi alındığında oranlar değişmediğinden sonuç aynıdır.

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri *19. Öneri* olarak verilir ve farklı şekilde ifade edilir.

AB hattının *DE* hattına eşit olmadığını ve *DE* < *AB* olduğunu varsayalım (*Şekil 31*). Bu durumda *BA* ve *BC* hattından *DZ* ve *EZ* hattına eşit *BH* ve *BT* hatlarını ayıralım. *BK* hattını bunların oranında bir üçüncü büyüklük gibi değerlendirelim. Sonra *HC*, *HT* ve *KT* hatlarını çekildiğinde *KT*//*HC* olması gerektiğini gösterelim: Bu durumda *BC*/*BT* = *BH*/*BK* ve Δ(*BHT*) = Δ(*BKC*) nedeniyle Δ(*BHT*) = Δ(*EDZ*) olur. S(*ABC*)/S(*KBC*) = *AB*/*KB* olduğundan S(*ABC*)/S(*DZE*) = *AB*/*KB*. Şu halde S(*ABC*)/S(*DZE*) = (*AB*/*BH*)^2 ya da S(*ABC*)/S(*DZE*) = (*AB*/*DZ*)^2 olduğu sonucuna ulaşılır.

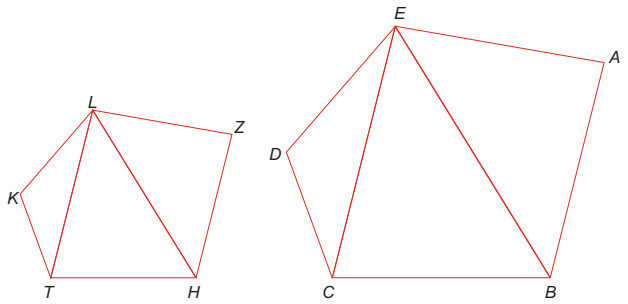


Şekil 31

***XIX. Önerme*: Benzer çokgenler eşit sayıda üçgene bölünür. Böyle yüzeylerin birbirlerine oranı, uygun kenarlarının birbirlerine olan oranın karesine eşittir.**[1]

Örneğin benzer *ABCDE* ve *ZHTKL* yüzeylerini göz önünde bulunduralım (*Şekil 32*). Burada *BE*, *CE*, *HL* ve *TL* hatlarını çekelim. Böylece bu iki benzer yüzeyde bir dizi eşit sayılı benzer üçgen oluşur. Özellikle ∠(*A*) = ∠(*Z*) ve *AB*/*ZH* = *AE*/*ZL* olduğundan *ABE* ve *ZHL* üçgenleri benzerdir. Şu halde ∠(*EBC*) = ∠(*LHT*) ve *AB*/*BE* = *ZH*/*HL*, *AB*/*ZH* = *BE*/*HL* yazılabilir. Sonra *BEC* ve *HLT* ile *ECD* ve *LTK* üçgenlerinin benzer olduğu anlaşılır. Böylece bütün uygun kenarların hatları aynı olduğuna göre uygun üçgen alanların oranı uygun kenarların oranları karesine eşittir. Neticede istediğimiz yönünde, çokgen alanlarının birbirine oranı uygun tarafların oranları karesine eşit olduğu kanıtlanmış olur.

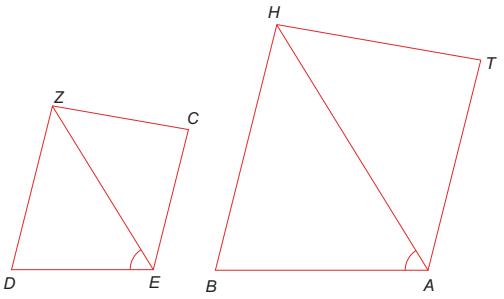
1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *20. Öneri* olarak yer alır.



Şekil32

***XX. Önerme*: Verilen bir hat üzerine, verilen herhangi bir çokgene benzer bir çokgen oluşturulması.**[1]

Verilen *AB* hattı üzerine *CEDZ* çokgenine benzer bir çokgen oluşturmak isteyelim (*Şekil 33*).



Şekil 33

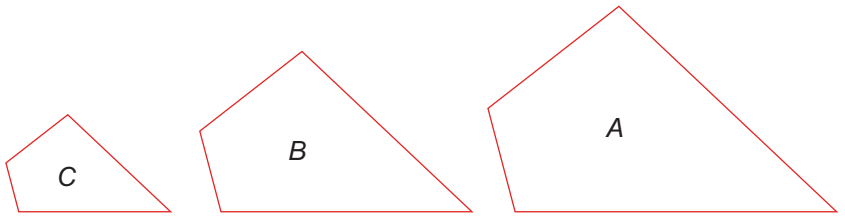
İlkin *CEDZ* çokgeni iki üçgene bölünür. *AB* hattının *A* noktasında *DEZ* açısına eşit olan *BAH* açısı oluşturulur. *F* açısına eşit olan *B* açısını oluşturup ikinci kenarı *H* noktasına kadar uzatılır. Bu durumda *ABH* ve *EDZ* üçgenleri benzerdir. Sonra *AH* üzerinde *CEZ* ve *CZE* açılarına eşit olan iki açı oluşturulur ve bu açıların kenarları *T* noktasında kesişinceye kadar uzatılır. Neticede *AB* hattı üzerinde oluşan *HTAB* çokgeni önermede öngörüldüğü gibi *ZCED* çokgenine benzerdir.

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *18. Öneri* olarak yer alır.

***XXI. Önerme*: Aynı yüzey şekline benzer tüm yüzeyler benzerdir.**

Eğer *A* ve *B* yüzeyleri *C* yüzeyine benzerse, onlar da kendi aralarında benzerdir (*Şekil 34*).

A ve *B* yüzeylerinin uygun açıları eşit ve kenarları uygundur. Bu eşitlik ve uygunluk *A* ve *B* ya da *B* ve *C* yüzeyleri için de geçerlidir. Önermede öngörülen de bu özelliktir.

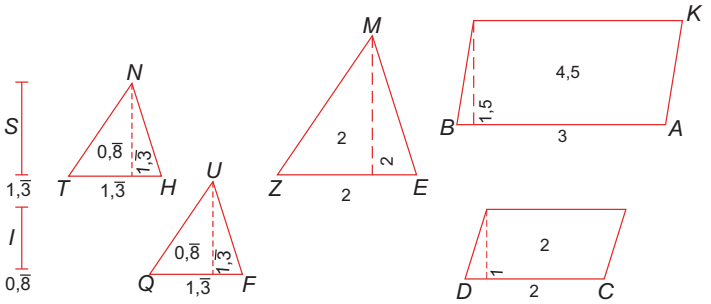


Şekil 34

***XXII. Önerme*: Eğer uygun orantılı doğrularla benzer yüzeyler oluşturulursa bunların alanları da uygun orantılıdır, aksine uygun orantılı alanların kenar hatları da uygun orantılıdır.**

Uygun orantılı ya da $AB/CD = EZ/HT$ ilişkisini sağlayan *AB*, *CD*, *EZ* ve *HT* doğrularıyla oluşturulan düz hatlı *KAB*, *TCD*, *MEZ* ve *NHT* şekillerinin *21. Önerme* gereği benzer olduğunu varsayalım (*Şekil 35*). Eğer *S* hattı *AB* ve *CD* hatlarıyla, *I* hattı ise *EZ* ve *HT* hatlarıyla üçüncü uygun orantılı ise, bu durumda $AB/CD = CD/S$ ve $EZ/HT = HT/I$ ilişkileri geçerlidir. Eğer $AB/CD = EZ/I$ ya da $HT = I$ ise, *KAB* ve *LCD* şekilleri benzer olduğundan *18 Önerme* gereği $S(KAB)/S(LCD) = AB/S$ ya da $S(KAB)/S(LCD) = (AB/CD)^2$ olur. Ayrıca $S(MEZ)/S(NHT) = EZ/I$ ve $AB/S = EZ/I$ olduğuna göre önermenin öngördüğü gibi $S(KAB)/S(LCD) = S(MEZ)/S(NHT)$ eşitliği sağlanır.

Aksine yüzeylerin uygun oranlı olması halinde de $AB/CD = EZ/HT$ olması gerekir. $AB/CD = EZ/QF$ olduğunu varsayalım. *QF* hattı üzerinde benzer *UFQ* şeklini kuralım. Bu durumda $S(KAB)/S(LCD) = S(MEZ)/S(UFQ)$ olur. Ancak $S(KAB)/S(LCD) = S(MEZ)/S(NHT)$ olduğundan $\Delta(NHT) = \Delta(UFQ)$ olmalıdır. Neticede her iki yüzeyin kenarları uygun olarak eşittir. Böylece $HT = FQ$ ve istediğimize uygun olarak $AB/CD = EZ/HT$ olduğu kanıtlanmış olur.



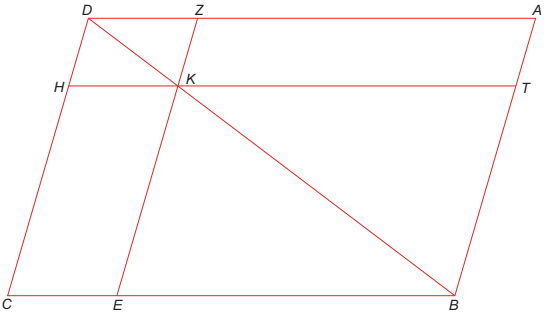
Şekil 35 [Burada *AB* = 3; *CD* = 2; *EZ* = 2; *HT* = 1,3̄; *S* = 1,3̄; *I* = 1,8̄

S(*KAB*)/S(*LCD*) = S(*MEZ*)/S(*NHT*).= (*AB*/*CD*)^2 = (1,5)^2 = 2,25; *AB*/*CD* = *EZ*/*HT* = 1;5]

***XXIII. Önerme*: Bir paralelkenar köşegeni üzerine kurulan paralelkenarlar kendi aralarında ve üzerinde kuruldukları paralelkenara benzerdir.**[1]

Örneğin *ABCD* paralelkenarın *BD* köşegeni üzerine *ZKHD* ve *TBEK* paralelkenarları kurulmuştur (*Şekil 36*). *BDC* üçgeninde *EK* //*CD* olduğundan, *BC*/*EC* = *BD*/*KD* ve *BC*/*KH* = *BD*/*KD* oranları yazılabilir. Aynı şekilde *BAD* üçgeninde *BD*/*KD* = *AB*/*AT* ve *BD*/*KD* = *AB*/*ZK* oranları yazılabilir. Böylece *ABCD* ve *ZKHD* paralelkenarların açıları eşit ve kenarları uygun orantılı olduğundan benzerdir. Aynı şekilde *ABCD* ve *TBEK* paralelkenarları da benzerdir.

Neticede önerme gereği *ZKHD* ve *TBEK* paralelkenarları kendi aralarında ve *ABCD* paralelkenarına benzer olduğu kanıtlanmış olur.

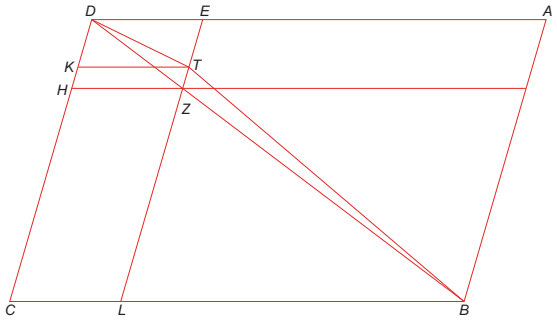


Şekil 36

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *24. Öneri* olarak yer alır.

***XXIV. Önerme*: Eğer bir paralelkenar benzer bir paralelkenardan ayrılmışsa ayrıldığı paralelkenarın köşegeni üzerinde bulunur.**[1]

Örneğin *D* açısı ortak *DEZH* paralelkenarı *DABC* paralelkenarından ayrılmıştır (*Şekil 37*). Bu durumda *DZ* köşegeni *DB* köşegeninin bir kısmını oluşturmalıdır.



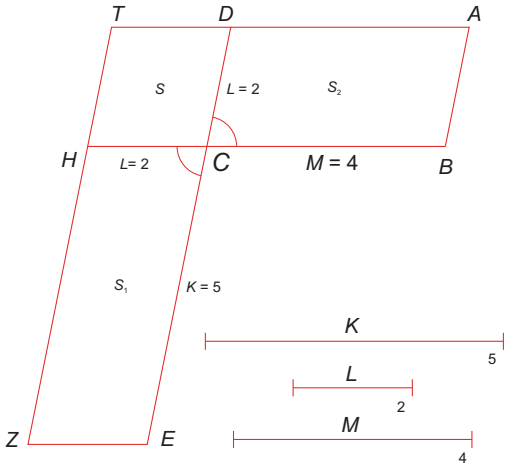
Şekil 37

Bir an *DABC* paralelkenar köşegeninin *DTB* olduğunu varsayalım. *AD* hattına paralel *TK* hattını çekelim. *EZ* hattı *EL* yönündedir. *ETKD* alanı *DABC* paralelkenarının köşegeni üzerinde olduğu için *AD*/*ED* = *CD*/*KD* olmalıdır. Hâlbuki benzerlik nedeniyle *AD*/*ED* = *CD*/*HD* olması gerektiğinden *KD* = *HD* olması gerekir ki bu yanlıştır. Şu halde önerme gereği *BD* köşegeni *BZD* üzerinde olmalıdır.

***XXV. Önerme*: Eşit açılı paralelkenarların kenarları bileşik orantılıdır.**[2]

Örneğin *ABCD* ve *CEZH* paralelkenarlarında *C* açısı ortak, *BC* ve *CH* hatları ile *DC* ve *CE* hatlarının aynı doğru üzerinde yer aldığını varsayalım (*Şekil 38*). Şu halde *14. Önerme* gereği *BC*/*CH* = *M*/*L* ve *DC*/*CE* = *L*/*K* orantıları geçerlidir. Bu durumda *K*/*M* = (*K* × *L*)/(*L* × *M*) yazılabilir. *BC*/*CD* = (*BC* × *L*)/(*CD* × *L*) = S_1/*S* = S(*ABCD*)/S(*DCHT*) olduğuna göre S_1/*S* = *M*/*L* olmalıdır. Aynı şekilde *CD*/*CE* = S(*DCHT*)/S(*CEZH*) olduğuna göre S(*DCHT*)/S(*CEZH*) = *S*/S_2 = *L*/*K* olmalıdır. Ayrıca *M*/*K* = (*M*/*L*)/(*L*/*K*) = (*BC* × *CD*)/(*CE* × *CH*) = (S_1/*S*)/(*S*/S_2) = S(*ABCD*)/S(*CEZH*) olduğundan önerme gereği S(*ABCD*)/S(*CEZH*) = (*BC* × *DC*)/(*CH* × *CE*) ilişkisi geçerlidir.

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *26. Öneri* olarak yer alır.
2 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *23. Öneri* olarak yer alır.



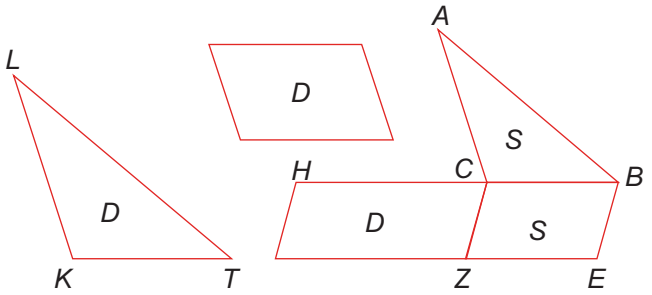
Şekil 38 [Burada S(*ABCD*)/S(*CEZH*) = (*BC* × *DC*)/(*CH* × *CE*) = 8/10 = 4/5]

***XXVI. Önerme*: Verilmiş olan düz hatlı iki şekilden birine eşit alanlı ve diğerine benzer olan bir düz hatlı şeklin oluşturulması.**[1]

Burada amaç *ABC* şekline benzer ve aynı anda alanı *D* şekline eşit olan bir yüzey oluşturmaktır (*Şekil 39*). Bunun için *1. Makale*, *44* ve *45. Öner-me*lerden yararlanarak *ABC* şekli *BC* hattı üzerinde aynı alana eşit bir *BCZE* paralelkenarına dönüştürülür. Aynı şekilde düz hatlı *D* şekli de ilkin aynı alana eşit bir üçgene ve bu üçgen de *CZ* hattı ve CBE açısına eşit HCZ açısı üzerinde aynı alana eşit bir *ZCH* paralelkenarına dönüştürülür. *BC* hattı *CH* hattı olarak uzatılır ve her iki paralelkenar *BC* ve *EZ* paralel hatları arasına yerleştirilir. Sonra *BC* ve *CH* hatlarının orta oranına eşit *KT* hattı üzerine *ABC* şekline benzer bir *KTL* şekli oluşturulur ki bu önermede bulunması istenen benzer şekildir.

Kanıtı: *BC* ve *CH* hatlarının ortalama oranı *KT* olduğuna göre *17. Önerme* gereği $BC/TK = TK/CH$ ya da $TK = (BC \times CH)^{1/2}$ ilişkisinden $BC/CH = (BC/TK)^2$ ilişkisi türetilebilir. Buna göre S(*CBEZ*)/S(*HEZ*) = $(BC/TK)^2$ ayrıca S(*ABC*) = S(*CBEZ*) olduğuna göre *KTL* şekli önermede öngördüğü gibi *ABC* şekline benzer ve aynı anda alanı *F* = S(*HCZ*) alanına eşittir.

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri *25. Öneri* olarak verilir.

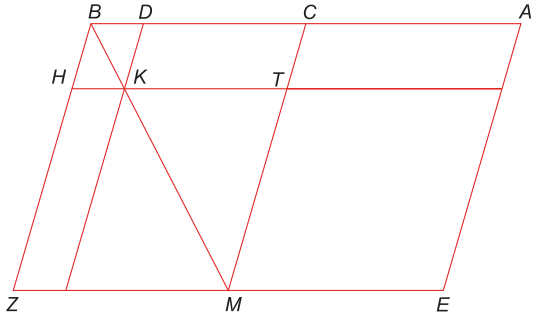


Şekil 39

***XXVII. Önerme*: Verilen bir hat üzerinde bulunan ve o hattın yarısı üzerine bulunan paralelkenara benzer olan eksik alanlı paralelkenarlar arasında en büyük alanlı olanı, söz konusu paralelkenar gibi hattın yarısı üzerinde oluşturulan ve eksik paralelkenara benzer olan paralelkenardır.**

Verilen bir *AB* hattının yarısı *BC* hattı üzerine bir *BCMZ* paralelkenarı kurulur (*Şekil 40*). *AB* hattı üzerinde *BDKH* paralelkenar alanı kadar *AB* hattından eksik ve *BCMZ* paralelkenarına benzer olan herhangi bir *ADK* paralelkenarını oluşturalım. Önerme gereği tam olmayan *AB* hattı üzerine kurulu *ADK* alanları içinde en büyük olanı *ACME* alanıdır (diğer bir deyişle *ACME* alanı *ADK* alanından büyüktür).

Kanıtı: *BM* köşegenini ve gerekli olan hatları çekelim. Bu durumda S(*TME*) = S(*THZM*) > S(*KHZ*), ve S(*THZM*) > S(*CDKT*) olduğundan, önermede öngörüldüğü gibi S(*ACME*) > S(*ADK*) olduğu kanıtlanmış olur.[1]

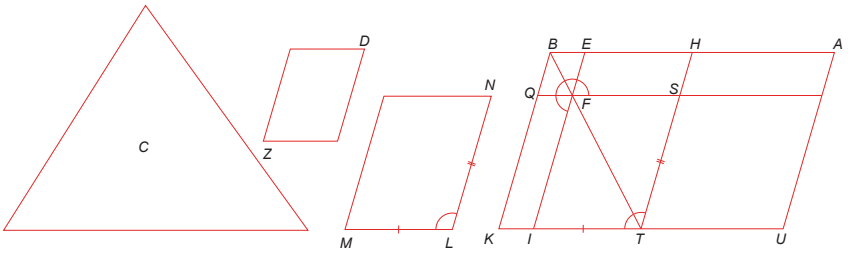


Şekil 40

1 S(*ACME*) = S(*ACT*) + S(*TME*) = S(*ACT*) + S(*THZM*) >S(*ACT*) + S(*CBHT*) > S(*ACT*) + S(*CDKT*) = S(*ADK*).

***XXVIII. Önerme*: Verilen bir hattın bir kısmına öyle bir paralelkenar oluşturalım ki onun alanı hem verilen düz hatlı bir şeklin alanına eşit olsun, hem de alanı verilen aynı hattın üzerine kurulu benzer paralelkenarın alanı kadar *eksik* olsun. Buna göre düz hatlı yüzey, hattın yarısı üzerine kurulu olduğu düşünülen paralelkenara benzer olan yüzeyden büyük olmalıdır.**

Sırasıyla *AB* verilen bir hat, *C* düz kenarlı yüzey olsun, *DZ*'nin bir paralelkenar olduğunu varsayalım (*Şekil 41*). Burada amaç *AB* hattı üzerinde, alanı *C* alanına eşit olan, ayrıca alanı *AB* hattı üzerinde oluşturulan *DZ* şekline benzer bir paralelkenar alanı kadar eksik olan bir paralelkenar oluşturmaktır.



Şekil 41

Bunun için *AB* hattı *H* noktasında iki kısma bölünür ve *BH* hattı üzerine *DZ* şekline benzer bir *BH BK* benzer paralelkenarı kurulur ve *AT* alanı oluşturulur. Eğer S(*AT*) = S(*C*) ise önerme kanıtlanmış olur. Çünkü bu durumda *AB* hattı üzerinde S(*C*) alanına eşit S(*AT*) paralelkenarı oluşturulmuş ve geri kalan *EBFQ* paralelkenarı ise *DZ* şekline benzer olması sağlanmıştır.

Ancak eğer *AT*, S(*C*)'den büyük ise: Bu durumda:

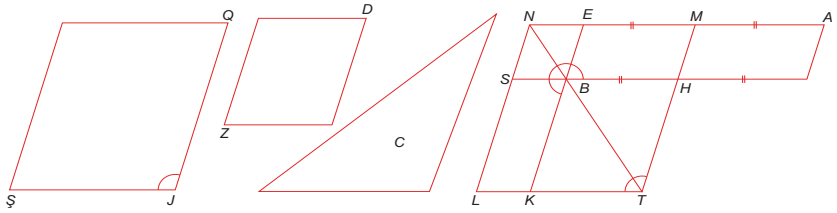
AT'nin *C*'den artık kısmı dahil, *DZ*'ye benzer *NM* paralelkenarı oluşturulur. Yani *NM AT*'nin fazlası ile S(*C*) nin toplamına alanına eşit olsun. Buradan *DZ*'ye benzeyen *HK* ve *NM* yüzeyleri benzer ve *L* açısı *T* ve *NLM*'ye ve karşılıklı *HT*'ye eşittir.

TS'yi *NL* ve *TI* gibi *LM* kadar böleriz. *IE TH* ve *SFQ*'yu *AB*'ye paralel uzatırız. *BT* köşegenini çizeriz. Burada *AF* yüzeyi oluşur. İstenilen de budur. Çünkü *SI* bundan da *NM*'yi kastediyoruz, bu da *AT*'nin fazlasıdır. Buradan *KH* = *S(C)* kadar olduğu görülür. *SFI* alanında *AF*'nin *S(C)* ye

eşit olduğunu kastediyoruz. Öyleyse *AF*'yi *AB* hattına ilave ederiz ki bu da *S(C)*'ye eşit olur. Bu durumda *DZ* alanına eşit *EQ* alanı *AB*'den eksik kalır. Bizim de istediğimiz budur. *AT S(C)* alanından fazlasını elde etmek için *S*(*AS*) yüzeyindeki *AH*'yi *S*(*C*)'ye eşit yaparız. Bu durumda *S*(*SU*) yüzeyi büyük olur.

***XXIX. Önerme*: Verilen bir hattın bir kısmına öyle bir paralelkenar kuralım ki onun yüzeyi hem verilen düz hatlı bir şeklin yüzeyine eşit olsun ve hem de alanı verilen aynı hattın üzerine kurulu benzer paralelkenarın yüzeyi kadar *fazla* olsun.**[1]

Sırasıyla *AB* verilen bir hat, *C* düz kenarlı yüzey olsun, *DZ*'nin bir paralelkenar olduğunu varsayalım (*Şekil 42*). Burada amaç *AB* hattı üzerinde, alanı *C* alanına eşit olan, ayrıca alanı *AB* hattı üzerinde oluşturulan *DZ* şekline benzer bir paralelkenar alanı kadar eksik olan bir paralelkenar oluşturmaktır.



Şekil 42

AB hattının *H* noktasında ikiye ayrıldığını düşünelim. *HB HK*'yi *HK* ve *C* alanına eşit *DZ*'ye benzer kılarız. *QŞ HK* birbirine benzer ve alanına eşit kılalım. Burada *T* açısı *Z* açısına eşittir. *TH* ve *JQ* karşılıklı açıları da eşittir. *TH*'yı *TM*'ye kadar uzatırız. Sonra da *JQ* ile *TK*'yi *TL*'ye *JŞ* kadar uzatırız. *ML*'den *MN NL*'ye paralel *AB KL*'ye paralel olur. Şekli tamamlar ve *AN* alanını oluştururuz. İstenilen de budur.

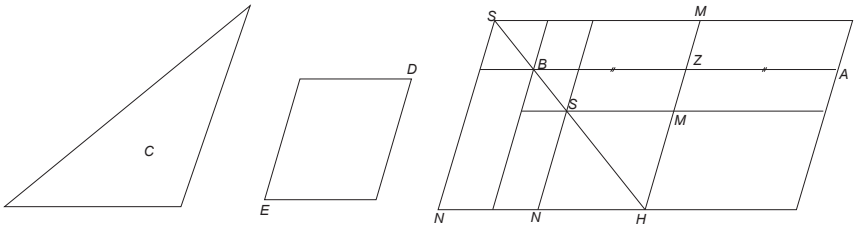
Bu da *ML*'nin alanıdır. Bundan *QŞ*'yi kastediyorum ki *HK* ve *C* alanlarının toplamına eşittir. Çünkü *HNK* yani *AN* alanı *C* alanına eşittir. *AB* hattına eklenen de budur. Bu da tamamlanması için eklenen kısımdır. *DZ* ye benzeyen *ES* alanı ilave edilmiştir. Bu da bizim istediğimizdir.

1 *28. Önerme*'ye çok benzeyen *29. Önerme*'de tek fark *eksik* yerine *fazla* kelimesinin kullanılmış olmasıdır.

Bu iki şekli bir arada göstermek istersek, *AB* hattına *C* alanına eşit bir paralelkenar ilave etmek istersek, bu paralelkenarın bir kenarı AB'ye çakıştırılır. *AB DE* paralelkenarına benzer olur. *AB*'yi *Z* noktasında ikiye böleriz. Burada *BZ*'ye de *ZE*'ye benzeyen *BH* alanı oluşturulur. Böylece *AH*'yı tamamlarız.

Eğer eklenen yüzeyin o hattan eksik olmasını istersek, *C* alanının *AH*'dan büyük olmaması şarttır. Bu durumda *C* alanı *AH* gibidir. Aksi takdirde *AH*'nin fazlasını *C* alanına katarız. Ama fazla olmasını istersek her ikisinin toplamını alır *TK*'yi *ZE*'den alınan miktar kadar yaparız. Bu da *BH*'ya benzer *L* ve *H* açıları eşit ve *TL* ve *ZE* kenarları karşıt olur.

HM'yi *LT*, *HN*'yi de *LK* gibi böleriz, *MS*'yi ve *NS*'yi de *BH* ve *AS* yüzeyinin her iki kenarına paralel olarak çıkartırız. Bu da *C* alanına eşittir. Fakat burada *ZE*'ye benzeyen *AB* kenarı ile *BS* fazlası meydana gelmiştir. Bunun *C* alanına eşit olması daha önce belirtilmişti.

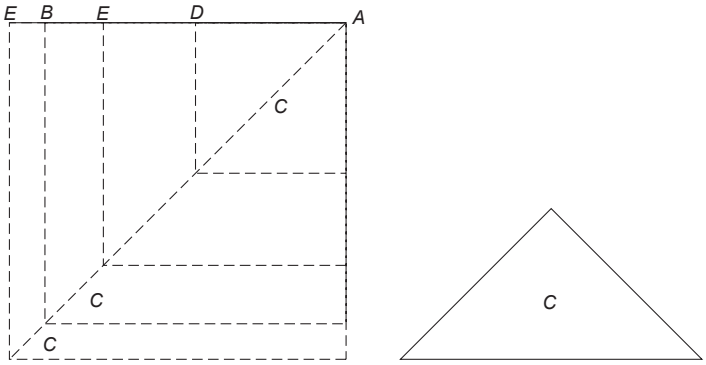


(*Şekil 43*)

AB hattına kare şeklinde bir alanı eklemek ya da çıkarmak istesek, *AB* hattını *D* noktasında ikiye böleriz. Eğer bu yarının karesi *C* düzgün kenarlı alanına eşitse, çıkardığımız yarının karesi eklenen yüzey olur. Aksi takdirde yani *C* yüzeyi *AB* hattının yarısının karesinden büyük ise ya karesidir ya da ikisinin toplamıdır.

AB hattını *D* noktasında ikiye bölelim. Bu hattın yani *AB*'nin yarısına *C* alanı kadar bir alanı ekleyecek ya da çıkaracak olursak, *DB* hattı üzerinde *E* noktasında *AB* alanından *C* alanı kadar bir alan çıkarılır. Bu da *DE*'dir. *AB* hattı üzerinde *C* alanı kadar alan eklenecek olursa o da *BE*'nin alanı olur.

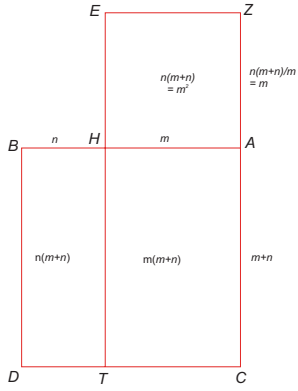
Bu da $C=AD^2$ ve $(AB^2 \pm AD^2) = AE^2$ anlamına gelir.



(*Şekil 44*)

***XXX. Önerme*: Verilen bir hattın altın oran (orta ve kenar) nispetinde ikiye ayrılması.**

Verilen *AB* hattı üzerine bir *ABDC* karesi ve *AC* hattı üzerine alanı *ABFC* karesi alanına eşit olan *ZETC* paralelkenarı (burada dörtgeni) kurulur, (*Şekil 45*). Böylece *AB* hattı *D* noktasında önergenin öngördüğü ortalama (altın) oranda bölünmüş olur.[1] Burada S(*ABDC*) = S(*ZETC*) olduğundan S(*ZEHA*) = S(*HBDT*) ve ∠(*EHA*) = ∠(BHT) olduğundan *25. Önerme* gereği *TH*/*HE* = *AH*/*BH* elde edilir. Ancak *TH* = *AB* ve *29. Önerme* gereği *ABDC* ve *AHEZ* şekillerinin benzer olması gerektiğinden *AHEZ* bir kare olduğundan *HE* = *AH* yazılabilir. Şu halde *AB*/*AH* = *AH*/*BH* [ya da (*m* + *n*)/*m* = *m*/*n*] altın oran ilişkisi kanıtlanmış olur.

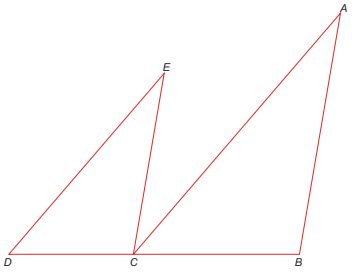


Şekil 45

1 Ortalama (ya da altın) oran (*m*+*n*)/*m* = *m*/*n* anlamına gelir. Burada verilen hat *AB* = *a* = (*m*+*n*) olmak üzere, *m* = *a*.[√5 – 1]/2 ve *n* = *a*.[3 - √5]/2 olarak elde edilir.

***XXXI. Önerme*: İki kenarı orantılı iki üçgen karşı kenarlar paralel ve bir açı temas edecek şekilde bitiştirilirse, üçgenlerin geri kalan kenarları bir hat boyunca yerleşir.**[1]

ABC ve *ECD* üçgenlerinin *ACE* açısı aracılığıyla bitiştirildiğini varsayalım (*Şekil 46*). Bu durumda eğer *AB*||*EC*, *AC*||*ED* ve *AB*|*EC* = *AC*|*ED* ise *BCD* hattının bir düz hat olduğu kanıtlanmalıdır. Paralel kenarlar nedeniyle ∠(*A*) = ∠(*E*) ve kenarların uygun oranı nedeniyle üçgenler benzerdir. *ABC* üçgeninde [∠(*A*) + ∠(*B*) + ∠(*ACB*)] = 180° ve ∠(*A*) + ∠(*B*) = ∠(*ACD*) olduğundan [∠(*ACD*) + ∠(*ACB*)] = 180° olması gerekir ve önermede öngörüldüğü gibi *BCD* bir doğrudur.



Şekil 46

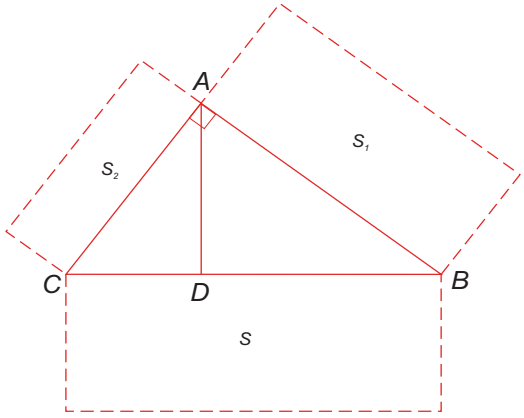
Not: Bu önerme şu şekilde de ifade edilebilir: Eğer iki benzer üçgen bir açı aracılığıyla temas eder ve uygun kenarları paralelse, tabanları bir düz hat üzerinde yer alır. Bu durumda paralel kenarlar nedeniyle ∠(*A*) = ∠(*ACE*) ve ∠(*B*) = ∠(*ECD*) olur. Bunlara *C* noktasında ortak ∠(*ACE*) ilave edilirse toplamları 180° olması gerektiğinden, önermenin öngördüğü gibi üçgen tabanlarının bir düz hat üzerinde bulunduğu kanıtlanmış olur.

***XXXII. Önerme*: Dik üçgenlerde hipotenüs üzerine kurulan düz hatlı şeklin alanı, kenarlar üzerine kurulan benzer düz hatlı şekillerin alanları toplamına eşittir.**[2]

ABC üçgeninin *A* açısı diktir, *BC* hipotenüsü üzerine *S* şeklinin, *AB* kenarı üzerine S_1 şeklinin, *AC* kenarı üzerine S_2 şeklinin kurulduğunu ve *S*, S_1 ve S_2 şekillerinin benzer olduğunu varsayalım. (*Şekil 47*).

1 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *32. Öneri* olarak yer alır.
2 Öklides'in özgün eserinde bu öneri Tûsî'nin sıralamasından farklı olarak 6. Kitapta *31. Öneri* olarak yer alır.

Buna göre *18* ve *19. Önerme* gereği benzer şekiller için, $S_1/S = AB^2/BC^2 = (AB/BC)^2$, $S_2/S = AC^2/BC^2 = (AC/BC)^2$ yazılabilir. Oranlar toplanırsa $(S_1/S) + (S_2/S) = (AB^2 + AC^2)/BC^2 = (S_1 + S_2)/S$ yazılabilir ve ayrıca dik üçgenlerde $BC^2 = (AB^2 + AC^2)$ olduğundan hipotenüs üzerine kurulan şekil alanı iki kenar üzerine kurulan şekillerin toplamına eşit olur.



Şekil 47

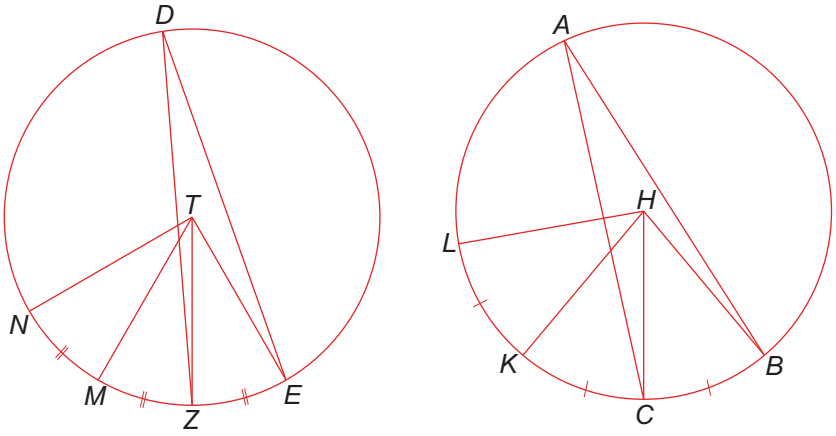
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır: Eğer *AD* diki çekilirse $AB^2 = (BC \times BD)$ olduğundan $S_1/S = AB^2/BC^2 = (BC \times BF)/BC^2 = BF/BC$ ve benzer şekilde $S/S_2 = BC/CD$ yazılabilir. Şu halde $S/(S_1 + S_2) = BC/(BD + CD)$ yazılabilir. Ayrıca $BC = (BD + CD)$ olduğuna göre önermenin öngördüğü gibi $S = (S_1 + S_2)$ olduğu kanıtlanmış olur.

***XXXIII. Önerme*: İki eşit dairenin içindeki merkezi ya da çevresel açıdan birinin diğerine oranı, kapsadığı yay oranı kadardır.**

ABC ve *DEZ* dairelerinin eşit, *A* ve *D* açılarının çevresel, *H* ve *T* açılarının ise merkezi olduğunu varsayalım (*Şekil 48*).

Bu durumda $Y(BC)/Y(EZ) = \angle(A)/\angle(D) = \angle(H)/\angle(T)$. *ABC* dairesinde *BC* yayına eşit *CK* ve *KL* yaylarını, *DEZ* dairesinde ise *EZ* yayına eşit *EM* ve *MN* yaylarını ayıralım. Buna göre $Y(BL)/Y(BC) = \angle(BHL)/\angle(BHC)$, aynı şekilde $Y(EN)/Y(EZ) = \angle(ETN)/\angle(HTZ)$ yazılabilir. Eğer $Y(BL) > Y(EN)$

ise $\angle(BHL) > \angle(ETN)$, $Y(BL) \leq Y(EN)$ ise $\angle(BHL) \leq \angle(ETN)$ olmalıdır. Şu halde önerme yönünde $Y(BC)/Y(EZ) = \angle(H)/\angle(T)$ ya da $Y(BC)/Y(EZ) = \angle(H/2)/\angle(T/2) = \angle(A)/\angle(D)$ ilişkileri geçerlidir.



Şekil 48

YEDİNCİ MAKALE

Bu makale 39 önermeden oluşur.

TANIMLAR

***Birim* (*vahde*):** Aynı türden büyüklükleri karşılaştırmak için, bu türden örnek seçilen ve bire eşit olduğu kabul edilen büyüklüktür.

***Sayı* (*aded*):** Birimlerin birleşiminden meydana gelen büyüklüğe denir.

Not: Sayı dizisinde yer alan her şeye sayı denir.(*Bir*)in sayı addedilmesi de bu sebepledir. Kendinden büyük sayıyı sayan küçük sayı onun bir parçasıdır ve sayılardan daha büyük sayılar da küçük sayıların katlarıdır.

***Çift sayı* (*adedü'z-zevc*):** İki eşit kısma bölünebilen bir sayıdır.

***Tek sayı* (*adedü'l-ferd*):** İki eşit kısma bölünemeyen bir sayıdır. Diğer bir deyişle çift sayıdan ya bir fazla ya da bir eksik sayıdır.

***Çift sayının karesi* (*adedü'z-zevcü'l-merrat*):** Çift sayının bir çift sayıyla çarpıldığı bir sayıdır.

***Tek sayının karesi* (*adedü'l-ferdü'l- merrat*):** Tek sayının bir tek sayıyla çarpıldığı bir sayıdır.

***Asal sayı* (*adedü'l-evvel*):** Kendisine ve birden başka sayıya bölünemeyen sayılara denir.

Sâbit nüshasında bunun dışında aşağıdaki tanımlar da bulunur:

***Bileşik sayları* (*adedü'l-mürekkeb*):** Diğer sayılardan oluşan sayılardır.

***Ortak bölünen saylar* (*adedü'l-müşterek*):** Bir hariç diğer sayılara tam bölünen sayılardır.

***Ortak bölünemeyen sayılar* (*adedü'l-mütebânî*):** Bir hariç diğer sayılara tam bölünemeyen sayılardır.

***Çarpılan sayıları* (*adedü'l-madrûb*):** Öyle bir sayıdır ki onda çarpılan sayı, çarpan sayısında bulunan birim sayısı kadardır.

***Karesel sayı* (*adedü'l-murabba'*):** Bir sayının kendisiyle çarpılması sonucu elde edilen ya da iki eşit sayının çarpımından oluşan sayıdır.

***Kübik sayı* (*adedü'l-muka'ab*):** Bir sayının karesiyle çarpılması sonucu elde edilen ya da eşit üç sayının çarpımından oluşan sayıdır.

***Düzlemsel sayı* (*adedü'l-musattah*):** Bir sayının başka bir sayıyla çarpılması sonucu elde edilen sayıdır. Sayılardan her biri bir dörtgenin kenarlarına karşı düşer.

***Cisimsel sayı* (*adedü'l-mücessem*):** Bir sayının dörtgen sayıyla çarpılması sonucu elde edilir. Bunun için üç sayı gerekir ve sayılardan her biri bir prizmanın kenarlarına karşı düşer.

***Uygun orantılı sayı* (*adedü'l-mütenâsib*):** Birincinin ikinciye, üçüncünün dördüncüye olan oranı eşit sayıdır.

***Mükemmel sayı* (*adedü't-tâmm*):** Bütün bölenlerinin toplamına eşit olan sayıdır.[1]

ÖNERMELER

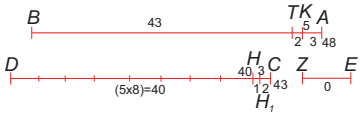
***I. Önerme*: Farklı iki sayının verildiğini varsayalım ve bunların ortak böleni bulunup bulunmadığını belirlemek isteyelim. Bunun için küçük sayının katları büyük sayıdan kalan sayı küçük sayıdan daha küçük oluncaya kadar çıkarılır, bu durumda kalan sayıya *1. Kalan* denir. Sonra küçük sayıdan *1. Kalan* sayının katları *2. Kalan* sayı *1. Kalan*'dan daha küçük oluncaya kadar çıkarılır ve *3. Kalan* elde edilir. Bu işlem *3. Kalan* sayıdan *2. Kalan* sayının katları çıkarılarak sürdürülür. Neticede sonuncu kalan sayı ile bir önceki kalan sayı arasındaki fark *birime* eşit olursa, verilen bu iki sayıda bir ortak bölen bulunmadığı sonucuna varılır.**

Örneğin $AB > CD$ olacak şekilde iki sayının verildiğini varsayalım (*Şekil 1*). Büyük *AB* sayısından *CD* küçük sayısının n_1 katı çıkarıldıktan sonra $[AB - (n_1 \times CD)] = AT$ (*1. Kalan*) $< CD$ elde edilir. İkinci adımda *CD* küçük sayısından *AT* kalanın n_2 katı çıkarılır ve $[CD - (n_2 \times AK)] = CH$ (*2. Kalan*) $< AT$ (*1. Kalan*) elde edilir. Sonra $[AT - (n_3 \times CH)] = AK$ (*3. Kalan*) $< CH$ (*2. Kalan*) vs. şeklinde bu işleme devam edilir. Eğer kalanlardan biri 1'e (*birime*) eşit olursa *AB* ve *CD* sayıları ortak bölensizdir denir.[2]

1 Örneğin 6 = (1 + 2 + 3) sayısı eşit olduğu bu sayıların her birine de bölünebilir.

2 Eğer verilen sayılar *a* ve *b*, sonuca 3 kademede ulaşıldığında oranlar *p, q, r* ve kalan sayılar *c, d,* 1 ile ifade edilirse, aşağıdaki cebirsel işlemler yapılmış olur: $c = a - (p.b)$, $d = b - (q.c)$ ve $1 = c - (r.d)$.

Kanıtı: Bir an aksini düşünerek verilen *AB* ve *CD* sayılarının *EZ* sayısına bölündüğünü varsayalım. Bu durumda *CD* sayısı *EZ* sayısına *BT* sayısı *CD* sayısına bölündüğü için *BT* sayısı da *EZ* sayısına bölünür. Varsayıma göre *AB* sayısı *EZ* sayısına bölündüğünden *AT* sayısı da *EZ* sayısına bölünür. *HD* sayısı *AT* sayısına bölündüğünden varsayım gereği *DH* sayısı da *EZ* sayısına bölünür. *DH* sayısı *EZ* sayısına bölündüğünden *DC* sayısı da *EZ* sayısına bölünür. Böylece sonuncu kalan birim sayısı da *EZ* sayısına bölünmelidir ki bu yanlıştır. Buna göre önerme gereği *AB* ve *CD* sayılarını ortak bölen bir *EZ* sayısı yoktur.[1]



Şekil 1- Bu örnekte $AB = 48 = (2^4 \times 3) > CD = 43$ (asal sayı) olarak verilmiştir. Şu halde $n_1 = 1$ olmak üzere *1. Kalan* = $AT = [AB - (n_1 \times CD)] = 48 - 43 = 5$ bulunur, ikinci adımda $n_2 = 8$ olmak üzere *2. Kalan* = $CH = [CD - HD] = [CD - (n_2 \times AT) = 43 - (8 \times 5)] = 3$ elde edilir. Bu durumda *3. Kalan* = $KT = [AT - (AK = CH)] = 3$ ve nihayet *4. Kalan* = $HH_1 = [HC - (H_1C = TK)] = (3 - 2) = 1$ olduğundan bu iki sayının bir ortak böleni yoktur. Buna göre $AB = 48$ ve $CD = 43$ sayılarını ortak bölen bir *EZ* sayısı bulunmamaktadır.

***II. Önerme*: Verilen ortak bölenli iki sayıda en büyük ortak bölenin bulunması.**

Örneğin $AB > CD$ olacak şekilde ortak bölenli iki sayının verildiğini ve en büyük ortak böleni bulmak istediğimizi varsayalım (*Şekil 2*). Eğer *AB* sayısı *CD* sayısına tam bölünürse bu durumda *CD* iki sayının ortak bölenidir.

Eğer *AB* sayısı *CD* sayısına tam bölünmezse bu durumda şüphesiz ki geriye kalan *AE* sayısı $AE < CD$ özelliklidir. Aynı şekilde eğer *CD* sayısı *AE* sayısına tam bölünmezse onun parçası *ZD* sayısı *AE* sayısına bölünür ve geriye $CZ < AE$ sayısı kalır. Bu işlem önceki kalan sayı son kalan sayıya bölünebildiği sürece sürdürülür. Eğer *AE* sayısının *CZ* sayısına kalansız

1 Kanıtta izlenen yol şudur: eğer verilen *a* ve *b* sayıları tekil sayılar değilse birim olmayan bir *e* tam sayısına bölünmeleri gerekir. Varsayım gereği *e* sayısı *a* ve *b* sayılarını ölçtüğüne göre $c = a - (p.b)$ sayısını ölçmelidir, ayrıca *e* sayısı *b* ve *c* sayılarını ölçtüğüne göre $d = b - (q.c)$ sayısını ölçmelidir. Nihayet *e* sayısı *c* ve *d* sayılarını ölçtüğüne göre $1 = c - (r.d)$ sayısını da ölçmesi gerekirken bu mümkün değildir. Buna göre ortak bölenleri bulunmayan *a* ve *b* sayılarını birim dışında ölçen başka bir tam sayı yoktur.

bölündüğünü varsayarsak, bu durumda *CZ* sayısının en büyük ortak bölen olduğunu söyleyebiliriz.

Şekil 2- Bu örnekte *AB* = 154 = (2 × 11 ×7) ve *CD* = 105 = (3 × 5 × 7) olarak verilmiş ve 7 sayısı bu sayıları en büyük ortak bölenidir. Bu durumda *AB*/*CD* = 154/105 = 1,46 olduğundan ortak bölünmez. Bu durumda *1. Kalan* = *AE* = [*AB* - (*EB* = *CD*)] = (154 - 105) = 49 hesaplanır. İkinci olarak *CD*/*AE* = 105/49 = 2,14 olduğundan tam bölünmez ve *2. Kalan* = *CZ* = {*CD* - [(2 × *EA*) = *DZ*)]} = (105 - 98) = 7 hesaplanır. Bu durumda *AE*/*CZ* = 49/7 = 7 tam bölündüğünden en büyük ortak bölen *HT* = 7 bulunur.

Bunun nedeni şudur: *AE* sayısı *CZ* sayısına bölünür, *DZ* sayısı da *CZ* sayısına ve kendine bölündüğüne göre *CD* sayısı da *CZ* sayısına bölünür. Aynı şekilde *BE* sayısı *CD* sayısına bölündüğünden *BE* sayısı da *CZ* sayısına bölünür. Neticede *AE* sayısı da *CZ* sayısına bölündüğünden *AB* sayısı da *CZ* sayısına bölünür.

Neden *CE* sayısı en büyük ortak bölendir?

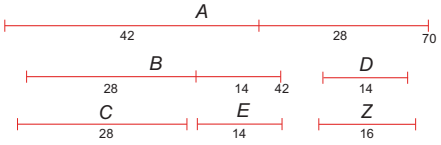
Bir an *HT* sayısının *CZ* sayısından daha büyük bir ortak bölen olduğunu varsayalım. Bu durumda *EB* ve *AE* sayılarının *HT* sayısına bölünebilmesi gerekir. Aynı şekilde *CD* ve *DZ* sayılarının da *HT* sayısına bölünmesi gerekir. Ne var ki *HT* sayısı *CZ* sayısından daha büyük olduğu varsayılmıştı. Buna göre önermenin öngördüğü gibi *CZ* sayısından daha büyük bir ortak bölen yoktur.

Buradan anlaşılacağı üzere herhangi iki sayı başka bir sayıya bölünebiliyorsa, bu iki sayının en büyük ortak böleni de bu sayıya bölünür.

***III. Önerme*: Verilen ikiden fazla asal olmayan sayıda en büyük ortak bölenin bulunması.**

Örneğin *A*, *B* ve *C* sayılarına ilişkin en büyük ortak böleni bulmak isteyelim (*Şekil 3*). Bu amaca uygun olarak ilkin *A* ve *B* sayılarına ilişkin en büyük ortak bölen *D* bulunur. Eğer *C* sayısı *D* sayısına tam bölünürse bu durumda *D* sayısı bu üç sayının en büyük ortak bölenidir.

Eğer *C* sayısı *D* sayısına tam bölünemezse bu durumda *C* ve *D* sayıları arasındaki en büyük ortak bölen bulunur. Kabul gereği sayılar ortak bölenli olduğundan böyle bir ortak bölen mevcuttur ve bunun da *E* olduğunu varsayalım. *D* sayısı *E* sayısına bölünür. *A* ve *B* sayıları *D* sayısına bölündüğü için *E* sayısına da bölünmelidir. *C* sayısı da *E* sayısına bölünür ve onlar arasında *E* sayısından büyük bir ortak bölen bulunmaz.



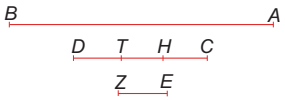
Şekil 3- Bu örnekte $A = 70 = (2 \times 5 \times 7)$, $B = 42 = (2 \times 3 \times 7)$ ve $C = 28 = (2^2 \times 7)$. İlkin *A* ve B sayılarının ortak böleni: *1. Kalan* $=(A - B) = 28$, *2 Kalan* $= [B - (A - B)] = (42 - 28) = 14$, bu durumda $(A - B)/[B - (A - B)] = 28/14 = 2$ tam bölündüğünden $D = 14$ sayısı *A* ve *B* ortak böleni. Ayrıca üçüncü sayı $C/D = 28/14 = 2$ tam bölündüğünden $E = 14$ her üç *A*, *B* ve *C* sayısının ortak bölenidir.

Bir an böyle olmadığını ve *Z* sayısının en büyük ortak bölen olduğunu varsayalım. Bu durumda *A* ve *B* sayıları *Z* sayısına bölündüğü için *C* ve *D* sayıları da *Z* sayısına bölünmesi gerekir. Ayrıca *C* ve *D* sayılarının ortak böleni olan *E* sayısı da *Z* sayısına bölünmelidir. Ancak varsayım gereği *E* sayısı *Z* sayısından küçüktür. Buna göre bu yanlıştır ve önermede öngörüldüğü gibi *A*, *B* ve *C* sayılarının en büyük ortak böleni *E* sayısıdır.

***IV. Önerme*: Küçük sayı kendinden büyük sayının parçası ya da bir alt katıdır.**

Eğer *AB* sayısı *CD* sayısına bölünebilirse bu durumda *CD* sayısı *AD* sayısının bir alt katıdır (*Şekil 4*). Eğer *AB* ve *CD* sayılarının ortak böleni yoksa bu durumda *CD* sayısı *H*, *T*, … vs. birimlerine ayrılır. Eğer *AB* ve *CD* sayılarının ortak böleni varsa *CD* sayısı *EZ* sayısına bölünür.

Bu durumda *AB* ve *CD* sayılarının *EZ* sayısına bölüneceği açıktır. Böylece *CH*, *HT* ve *TD* sayılarının her biri *AB* sayısının parçası olduğundan, onların toplamı $CH + HT + TD = CD$ sayısı da önermede öngörüldüğü gibi *AB* sayısının bir alt katıdır.

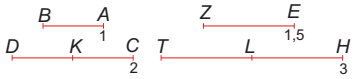


Şekil 4

Not: Parça ancak bir küçük sayı olabilir. Ancak parçaların toplamı küçük ya da büyük olabilir.

***V. Önerme*: Eğer iki sayı farklı iki sayının aynı alt katına eşitse, sayıların toplamı da bu sayılar toplamının aynı alt katına eşittir.**[1]

Örneğin eğer $AB = DC/n$ ve $EZ = HT/n$ ise, bu durumda $(AB + EZ) = (CD + HT)/n$ olmalıdır (*Şekil 5*).

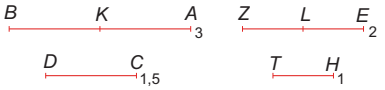


Şekil 5- Burada $AB = 1$; $EZ = 1{,}5$; $CD = 2$; $HT = 3$; $n = 2$; $(AB + EZ) = (DC + HT)/n = 2{,}5$.

Kanıtı: CD sayısını K noktasında AB sayısının m katına ve HT sayısını L noktasında EZ sayısının m katına ayıralım. Bu durumda $[m \times (AB + EZ)] = (CK + HL)$ ayrıca $[(n - m) \times (AB + EZ)] = (KD + LT)$ yazılabilir. Taraf tarafa toplanırsa $[n \times (AB + EZ)] = (CK + KD + HL + LT)$ ya da önermenin öngördüğü gibi $(AB + EZ) = (CD + HT)/n$ olduğu kanıtlanmış olur.

***VI. Önerme*: Eğer iki sayı farklı iki sayının aynı katına eşitse, bu durumda iki sayının toplamı da farklı sayılar toplamının aynı katına eşittir.**[2]

Örneğin $AB = (n \times CD)$ ve $EZ = (n \times HT)$ ise bu durumda $(AB + EZ) = [n \times (CD + HT)]$ olmalıdır (*Şekil 6*).



Şekil 6- Burada n = 2 olmak üzere $(AB + EZ) = [n \times (CD + HT)] = 5$.

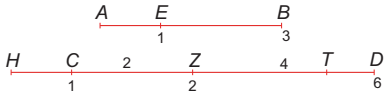
1 Bu önerme, eğer $a = b/n$ ve $c = d/n$ ise, cebirsel olarak $(a + c) = (b + d)/n$ anlama gelir.

2 Bu önerme ($m < n$ için), eğer $a = (m/n).b$ ve $c = (m/n).d$ ise, cebirsel olarak $(a + c) = (m/n).(b + d)$ anlama gelir. Bu ilişki şu şekilde genelleştirilebilir: $(a + c + e + g + \dots) = (m/n).(b + d + f + h + \dots)$.

Kanıtı: *AB* sayısını *K* noktası ile *CD* sayısının örneğin (*n* – 1) katına aynı şekilde *EZ* sayısını da *L* noktası ile *HT* sayısının aynı (*n* – 1) katına ayıralım. Bu durumda *AK* = *CD*, *EL* = *HT* ve (*AK* + *EL*) = (*CD* + *HT*) olması gerektiği açıktır. Ayrıca *AB* = (*AK* + *KB*) ve *EZ* = (*EL* + *LZ*) sayıları eşit hisseli olduğundan, önermede öngörüldüğü gibi (*AB* + *EZ*) = [(*AK* + *KB*) + (*EL* + *LZ*)] = [*n* × (*CD* + *HT*)] ilişkisi yazılabilir.

***VII. Önerme*: Eğer iki sayı farklı iki sayının aynı alt katına eşitse, bu durumda iki sayının farkı da farklı sayılar farkının aynı alt katına eşittir.**[1]

Örneğin eğer *AB* = *CD*/*n* ve *AE* = *CZ*/*n* ise, bu durumda (*AB* - *AE*) = (*CD* - *CZ*)/*n* ya da *EB* = *ZD*/*n* olmalıdır (*Şekil 7*).



Şekil 7- Burada *n* = 2 olmak üzere (*AB* - *AE*) = (*CD* - *CZ*)/*n* = 2ya da *EB* = *ZD*/*n* =3.

Kanıtı: Bir an bunun hatalı ve yerine *EB* = *ZH*/*n* ifadesinin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda *AB* = *HZ*/*n* olmalı, ne var ki varsayım gereği *AB* = *CD*/*n* olması gerektiğinden *HZ* ve *CD* aynı sayı ve *CZ* ortak bölen olmalıdır. Neticede *HC* = *ZD* olduğu için önermenin öngördüğü gibi *EB* = *ZD*/*n* olmalıdır.[2]

Not: Önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir. *EB* sayısının *ZD*/*n* değil de *ET*/*n* sayısına eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda *AB* = *CT*/*n* olmalıdır. Ne var ki varsayım gereği *AB* = *CD*/*n* olduğuna göre *CT* = *CD* olması gerekir ki bu yanlış olduğundan önerme kanıtlanmış olur.

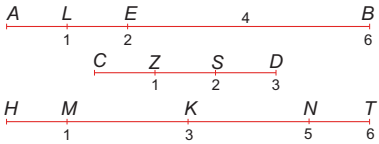
1 Bu önerme, eğer *a* = *b*/*n* ve *c*= *d*/*n* ise, cebirsel olarak (*a*-*c*) = (*b*-*d*)/*n* anlama gelir.

2 Öklid'e göre (*a* - *c*) = (*b* - *d*)/*n* yerine bir an (*a* - *c*) = *e*/*n* olduğunu düşünür. Ancak *c*= *d*/*n* olduğuna göre *a*= (*d* + *e*)/*n* yazılabilir. Kabul gereği (*d* + *e*) = *b* olması gerekir. Bu durumda *e* = (*b* – *d*) ifadesini varsayıma uyguladığında tekrar önermede öngörülen (*a* - *c*) = *e*/*n* = (*b* - *d*)/*n* ifadesini elde eder.

***VIII. Önerme*: Eğer biri diğerinin belirli bir katı olan iki farklı sayı birbirinden çıkarılırsa, bu fark sayılar farkının aynı katına eşittir.**[1]

Örneğin eğer $AB = (m/n).CD$ ve $AE = (m/n).CZ$ ise, bu durumda $EB = (m/n).ZD$ olmalıdır (*Şekil 8*).

Kanıtı:[2] AB hattına eşit HT hattı çekilir. Bunun üzerinde $m_1 < m$ ve $HK = (m_1/n).CD$ olacak şekilde bir K noktası işaretlenir. AE hattı üzerinde ise L noktası $AL = (m_1/n).CZ$ olacak şekilde belirlenir. HK ve KT kısımlarındaki hisse sayısı AL ve LE parçalarındaki hisse sayısı kadardır. CD parçasındaki HK kısımların sayısı CZ kısmındaki AL kısımlarının sayısı kadardır. $CD > CZ$ olduğundan $HK > AL$ olmalıdır.



Şekil 8- Burada $m/n = 2$, $m_1/n = 1$için $AB = (m/n).CD = (2 \times 3) = 6$ ve $AE = (m/n).CZ = (2 \times 1) = 2$ ise, bu durumda $EB = (m/n).ZD = (2 \times 2) = 4$; $HK = (m_1/n).CD = (1 \times 3) = 3$, $AL = (m_1/n).CD = (1 \times 1) = 1$.

$HM = AL$ olduğunu varsayalım. ZD kısmındaki MK parçasına eşit hisse sayısı CD kısmındaki HK kısmı kadardır. $TN = EL$ olsun. ZD kısmındaki KN kısmı hisse sayısı, CZ parçasındaki NT kısmı hisse sayısı kadardır. Böylece CZ kısmındaki HM ve NT eşit hisselerin sayısı, MN kısmındaki ZD hisse sayısı kadardır. Diğer bir deyişle amacımıza uygun olarak $AE = (m/n).CZ$ olduğunda $EB = (m/n).ZD$ olacağı kanıtlanmış olur.

Not: Bu önerme başka yol izlenerek de kanıtlanabilir. Eğer AE sayısında bulunan CZ hissesi, AB sayısında bulunan CD hissesinden küçük ise ($CZ/n < CD/n$), bu durumda EB ve ZD sayıları oranı AE sayısındaki CZ hissesine eşit olmaz ($ZD/EB \neq CZ/n$).

---

1 Bu önerme, $m < n$ için, eğer $a = (m/n).b$ ve $c = (m/n).d$ ise, cebirsel olarak $(a - c) = (m/n).(b - d)$ anlama gelir.

2 Öklid'e göre $e = b/n$ ve $f = d/n$ alınır. Varsayım gereği $b > d$ olduğundan $e > f$ ve $(e - f) = (b - d)/n$ yazılabilir. Bu husus a ve b içindeki tüm e ve f ve m katlarına uygulanırsa $m\,(e - f) = (m/n).(b - d) = (a - c)$ ya da $(a - c) = (m/n).(b - d)$ elde edilir.

Bir an *ZS* ve *EB* sayıları oranının *CZ* ve *AE* sayıları oranına eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda *CS* ve *AB* sayıları oranının *CZ* ve *AE* sayıları oranına eşit olması gerekirdi (*CS*/*AB* = *CZ*/*AE*). Bu ise *CD* = *CS* anlamına gelir ki yanlıştır. Önerme bu şekilde kanıtlanmış olur.

***IX. Önerme*: Eğer iki sayıdan her biri başka bir sayının aynı alt katına eşitse, bu durumda bu sayıların oranlarında yer değiştirilirse, bir parçanın diğer parçaya oranı ya tam sayıların oranına ya da bunların parçalarının oranlarına eşittir.**[1]

Örneğin *AB* = *CD*/*n* ve *EZ* = *HT*/*n* ise, bu durumda *EZ* sayısının *AB* sayısına oranı, *HT* sayısının *CD* sayısına ya da parçalarının oranına eşittir (*Şekil 9*).[2]

Şekil 9- Burada *n* = 2 için *AB* = *CD*/*n* = 4/2 = 2 ve *EZ* = *HT*/*n* = 3/2 = 1,5.

Kanıtı: *CD* ve *HT* sayılarını *K* ve *L* noktaları vasıtasıyla *EZ* ya da *AB* sayısı oranında eşit kısımlara ayıralım. Bu durumda *HL* sayısının *CK* sayısına oranı *LT* sayısının *KD* sayısına oranı gibidir. Bu durumda önermede öngörüldüğü gibi *AB* sayısının *EZ* sayısı oranı *CD* sayısının *HT* sayısına olan orana eşittir.

***X. Önerme*: Eğer iki sayıdan her biri başka bir sayının aynı katına eşitse, bu durumda bu sayıların oranlarında yer değiştirilirse, bir parçanın diğer parçaya oranı ya tam sayıların oranına ya da bunların parçaları oranlarına eşittir.**[3]

Örneğin *AB* = *CD*/*n* ve *EZ* = *HT*/*n* ise, bu durumda *AB* sayısının *EZ* sayısındaki hisse ya da hisseleri *CD* sayısının *HT* sayılarının oranı kadardır.[4]

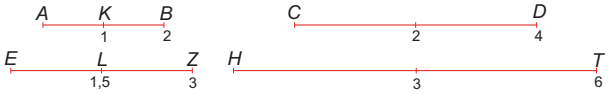
---

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a* = *b*/*n* ve *c* = *d*/*n* ise, bu durumda *a* ve *c* yer değiştirse, *a* sayısının bir kısım ya da kısımları *c* sayısına oranlansa, bu oran *b* ve *d* sayılarının oranına eşittir.

2 Buna göre *b* ve *d* sayısı *a* ve *d* sayısının eşit kısımlarına ayrılırsa, *a* ve *c* kısımları hangi oranlarda oranlanırsa oranlansın bu değer *b* ve *d* sayılarının oranına eşittir.

3 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a* = *(m/n).b* ve *c* = *(m/n).d* ise, *a*/*c* oranının hangi alt katı olursa olsun hep *b*/*d* oranına eşittir.

4 Bunu kanıtlamak için *a* ve *b* sayıları *m* adet *b*/*n* ve *d*/*n* eşit kısma ayrılır. *m* parça arasında *a* sayısının bir kısım ya da kısımları *c* sayısına oranlandığında, bu oran hep *b* ve *d* sayılarının oranına eşittir.

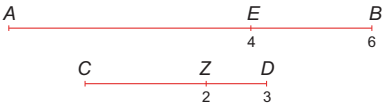


Şekil 10- Burada $n = 2$ olmak üzere $AB = CD/n = 4/2 = 2$; $EZ = HT/n = 6/3 = 2$; $AB/EZ = CD/HT = 2/3$; $EZ/AB = HT/CD = 3/2$.

Kanıtı: *AB* ve *EZ* sayılarını *K* ve *L* noktaları vasıtasıyla *CD* ve *HT* hisselerine ayıralım. Bu durumda *AK* ve *KB* sayılarının her birindeki hisseler *EL* ve *LZ* sayılarındaki hisseler kadar olur ki bu da *EZ* sayısındaki *AB* ya da *HT* sayısındaki *CD* sayısına eşittir. Buna göre kanıtlamak istediğimiz gibi *EZ* sayısındaki *AB* sayısına eşit hisse sayısı *HT* sayısındaki *CD* hisse sayısına eşittir.

***XI. Önerme*: Eğer iki sayıdan bunlarla aynı oranda iki başka sayı çıkarılırsa, kalan sayılar da aynı oranda olur.[1]**

Örneğin aralarında $AB/CD = AE/CZ$ oranı bulunan *AB* ve *CD* sayılarından *AE* ve *CZ* sayıları çıkarılırsa kalan sayılar arasında $EB/ZD = AB/CD$ oranı geçerlidir (*Şekil 11*).



Şekil 11- Burada $AB/CD = AE/CZ = 2$; $(AB - AE)/(CD - CZ) = EB/ZD = 2$.

Gerçekten *CD* kısmında bulunan *AB* sayısına ilişkin hisselerin sayısı, *CZ* kısmında bulunan *AE* sayısına ilişkin hisselerin sayısına eşit olduğundan, *ZD* kısmında bulunan *EB* sayısına eşit hisselerin sayısı aynıdır. Yani önergede öngörüldüğü gibi $EB/ZD = AE/CZ$ oranı geçerlidir.

***XII. Önerme*: Bir dizi uygun orantılı sayı verildiğinde, bu oran aynı zamanda tüm birinci sayılar toplamının tüm ikinci sayılar toplamı oranına eşittir.[2]**

Örneğin $A/B = C/D$ ise, bu durumda $A/B = (A + C)/(B + D)$ oranı geçerlidir (*Şekil 12*).

---

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer $a/b = c/d$ ise bu durumda $(a - c)/(b - d) = a/b$ ilişkisi geçerlidir.

2 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer $a/a' = b/b' = c/c' = \ldots$,ise bu oran aynı zamanda $(a + b + c + \ldots) = (a' + b' + c' + \ldots)$ anlamına gelir.

Şekil 12- A/*B* = *C*/*D* = 2; ise (*A* + *C*)/(*B* + *D*) = 7/(3,5) = 2 geçerlidir.

Bu önermenin nasıl kanıtlanacağı açıktır.

***XIII. Önerme*: Uygun orantılı dört sayının yerleri uygun olarak değiştirilirse yine uygun orantılı sayılar elde edilir.**[1]

Örneğin *A*/*B* = *C*/*D* ise, bu durumda *A*/*C* = *B*/*D* oranı geçerlidir (*Şekil 13*).

Şekil 13- Burada *A* =2; *B* = 1; *C* = 3, *D* = 1,5; *A*/*B* = *C*/*D* = 2; *A*/*C* = *B*/*D* = 2/3.

Kanıtı: Gerçekten de *A* ve *B* sayılarının hisse ya da adetleri *C* ve *D* sayılarının hisse ya da adetlerine eşittir. Sayıların yerleri değiştirildiğinde *A* ve *C* sayılarının hisse ya da adetleri *B* ve *D* sayılarının hisse ya da adetlerine göre değişmez. Oran uygun olduğundan önerme kanıtlanmış olur.

Not: Verilen son üç önermede uygun orantılı sayılarda ayırma ve yeniden düzenleme konusunda uygulanan kurallara açıklık getirmek isteriz.

Verilen bir uygun orana sırasıyla aşağıdaki işlemler uygulanabilir (*Şekil 14*):

$$AB/BC = DE/EZ$$

eğer artı (toplama) ve eksi (çıkarma) işareti değerlendirilirse:

$$(AB \pm BC)/BC = (DE \pm EZ)/EZ$$

ya da

$$AC/BC = DZ/EZ$$

oranda terimlerin yerleri değiştirilirse

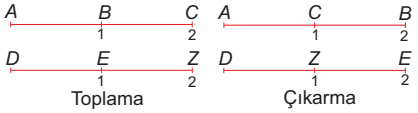
$$AC/DZ = BC/EZ$$

Eğer bu oranlar devrilirse:

$$BC/AC = EZ/DZ$$

$$DZ/AC = EZ/BC.$$

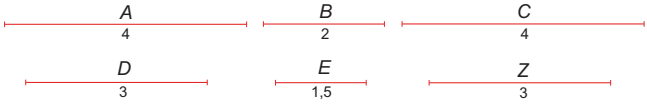
1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer *a*/*b* = *c*/*d* ise bu durumda *a*/*c* = *b*/*d* ilişkisi geçerlidir.



Şekil 14- Burada *AC*/*BC* = *DZ*/*EZ* = 2 ya da 1; *AC*/*DZ* = *BC*/*EZ* = 1; *BC*/*AC* = *EZ*/*DZ* = ½ ya da 1; *DZ*/*AC* = *EZ*/*BC* = 1.

***XIV. Önerme*: Eğer iki grup sayının ilkine ilişkin iki sayı diğer gurubun iki sayısıyla aynı orandaysa, bu durumda guruptaki sayıların tümü birbirleriyle aynı oranı paylaşır.**[1]

Örneğin *A*, *B*, *C* bir gurubun ve *D*, *E*, *Z* başka bir grubun sayıları ise ve *A*/*B* = *D*/*E*, *B*/*C* = *E*/*Z* oranları geçerliyse, bu durumda *A*/*C* = *D*/*Z* ilişkisi de geçerlidir (*Şekil 15*).



Şekil 15- Burada *A*(4)/*B*(2) = *D*(3)/*E*(1,5) = 2; *B*(2)/*C*(4) = *E*(1,5)/*Z*(3) = 0,5; *A*(4)/*C*(4) = *D*(3)/*Z*(3) =1.

Kanıtı: Gerçekten bu oranlarda sayıların yerleri değiştirilir *A*/*D* = *B*/*E*, *B*/*E* = *C*/*Z* ve eşitlenirse *A*/*D* = *C*/*Z* ya da tekrar yer değiştirilirse önermenin öngördüğü gibi *A*/*C* = *D*/*Z* olduğu görülür.

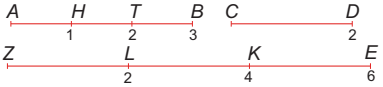
Not: Bu önerme şu şekilde ifade edilebilir: *Aynı oranlı oranlar birbirlerine eşittir*. Bu husus sayılardaki hisse gösterimi ile açıklanamaz. Eşit ve karmaşık oranlardaki sayılar hakkındaki açıklama iki önermeden sonra verilecektir. Bu sonuçlardan biri sayısal oran hakkında olan gösterimdir ki *8. Makalede* ele alınacaktır.

İkinci kural şudur: *Bir sayının başka bir sayıyla çarpılması halinde elde edilen sonuç, bu sayının birinciyle çarpılmasında elde edilen sonuca eşittir*. Bununla yukarıdaki husus şöyle açıklanabilir: birincisinin değeri ikincinin oranıyla çarpıldığında elde edilen sonuç ikincinin değerinin birincinin oranıyla çarpıldığında alınan sonuca eşittir. Böylece sonuç değişmez ve aynı kalır.

1 Bu önerme cebirsel olarak şu anlama gelir: Eğer *a/b* = *d/e* ve *b/c* = *e/f* ise bu durumda *a/c* = *d/f* ilişkisi geçerlidir.

***XV. Önerme*: Eğer herhangi bir sayı birimin belirli bir katına eşit olduğu kadar bir ikinci sayı da bir üçüncü sayının aynı katına eşitse, bu durumda ikinci sayı birimin katına eşit olduğu kadar, üçüncü sayı da birinci sayının aynı katına eşittir.**[1]

Örneğin $AB/1 = ZE/CD$ ise, bu durumda $CD/1 = ZE/AB$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 16*).



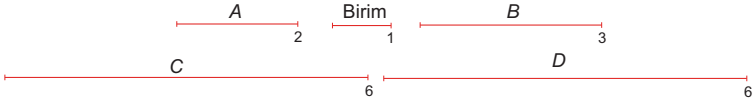
Şekil 16- Burada $AB/1 = ZE/CD = 3$ ve $CD/1 = ZE/AB = 2$.

Kanıtı: $ZE/CD = AB/1$ varsayımı gereği, *AB* sayısındaki birim sayısı *ZE* sayısındaki *CD* sayısı kadardır. *ZE* üzerinde *L* ve *K* (vs.) noktaları vasıtasıyla *CD* katlarını ve *AB* üzerine *H* ve *T* (vs.) noktaları vasıtasıyla birimin katlarını işaretleyelim. Bu durumda *ZL*, *LK*, *KE* hissesi kadar *CD* sayısındaki birim adedi, *AH*, *HT*, *TB* hissesi kadar *AB* sayısındaki birim sayısına eşit olur. Tüm hisselerin sayısı ise önermede öngörüldüğü gibi *ZE* sayısındaki *AB* hisse sayısındaki birim kadardır.

Not: Önerme şu şekilde de ifade edilebilir; *AB* sayısındaki birim sayısı *ZE* ve *CD* sayısındaki birim sayısı kadar olduğundan, *CD* sayısındaki birim sayısı *CD* sayısının belirli bir katı olan *ZE* sayısında, *AB* sayısının katı kadar olmalıdır.

***XVI. Önerme*: Herhangi bir sayı başka bir sayıyla çarpılınca elde edilen sonuç, ikinci sayının birinci sayıyla çarpımından elde edilen sayıya eşittir.**[2]

Eğer $(A \times B) = C$ ve $(B \times A) = D$ ise bu durumda $C = D$ olmalıdır (*Şekil 17*).



Şekil 17- Burada $[A(2) \times B(3)] = C = 6$ ve $[B(3) \times A(2)] = D = 6$ ya da $C = D = 6$.

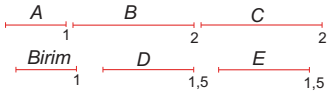
1 Bu önerme cebirsel olarak şu anlama gelir: Eğer *m* (birinci sayı), 1 (birim), $(m \times a)$ [ikinci sayı] ve *a* (üçüncü sayı) verilmişse, bu durumda $m/1 = (m \times a)/a$ ve $a/1 = (m \times a)/m$ ilişkileri geçerlidir.

2 Bu önerme cebirsel olarak $(a \times b) = (b \times a)$ anlamına gelir.

Kanıtı: Buna göre $B/1 = C/A$ ve $A/1 = D/B$ ilişkileri yazılabilir. Eğer sonuncu oranda sayıların yerleri değiştirilir $B/1 = D/A$ ve ilk orana eşitlenirse $C/A = D/A$ ya da önermenin öngördüğü gibi $C = D$ olduğu açıkça görülür.

***XVII. Önerme*: İki sayı bir üçüncü sayıyla çarpılırsa, elde edilen sayıların oranı çarpılan sayıların oranına eşittir.[1]**

Eğer örneğin $(B \times A) = C$ ve $(D \times A) = E$ ise, bu durumda $C/E = B/D$ olmalıdır (*Şekil 18*).

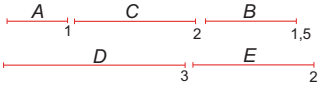


Şekil 18- Burada $[B(2) \times A(1)] = C = 2$ ve $[D(1,5) \times A(1)] = E = 1,5$; $C/E = B/D = 4/3$.

Kanıtı: Buna göre $A/1 = C/B = E/D$ yazılabilir. İkinci eşitlik ters yazılırsa $B/C = D/E$ ve sayıların yerleri değiştirilirse önermede öngörülen $B/D = C/E$ ilişkisi elde edilir.

***XVIII. Önerme*: Bir sayı iki farklı sayıyla çarpılırsa, elde edilen sayıların oranı çarpılan iki farklı sayının oranına eşittir.[2]**

Eğer örneğin $(C \times A) = E$ ve $(C \times B) = D$ ise, bu durumda $A/B = E/D$ olmalıdır (*Şekil 19*).



Şekil 19- Burada $[C(2) \times A(1)] = E = 2$ ve $[C(2) \times B(1,5)] = D = 3$; $A/B = E/D = 1,5$.

Kanıtı: *XVI. Önerme* gereği $(C \times A) = (A \times C) = E$ ve $(C \times B) = (B \times C) = D$ yazılabilir. Buna göre *XVII. Önerme* gereği $A/B = E/D$ önermenin öngördüğü sonuç elde edilir.

***XIX. Önerme*: Dört uygun orantılı sayıda, birincinin dördüncüyle çarpımı ikincinin üçüncüyle çarpımına eşittir.[3]**

Eğer $A/B = C/D$ şeklindeki uygun orantılı dört sayıda eğer $(A \times D) = H$ ve $(B \times C) = E$ ise, bu durumda $H = E$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 20*).

---

1 Bu önerme cebirsel olarak $b/c = (a \times b)/(a \times c)$ anlamına gelir.
2 Bu önerme cebirsel olarak $a/b = (a \times c)/(b \times c)$ anlamına gelir.
3 Bu önerme cebirsel olarak $a/b = c/d$ ise $(a \times d) = (b \times c)$ anlamına gelir.

Şekil 20- Burada $A(2)/B(1) = C(3)/D(1,5) = 2$; $(A \times D) = H = 3$; $(B \times C) = E = 3$ ya da $H = E = 3$.

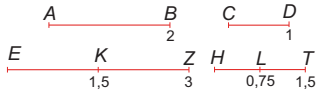
Kanıtı: Bir an $(A \times C) = Z$ ve $(A \times D) = H$ olduğunu varsayalım. Bu durumda *XVIII. Önerme* gereği $C/D = Z/H$ oranı geçerlidir. Diğer taraftan $(A \times C) = Z$ ve $(B \times C) = E$ olduğuna göre aynı nedenden $A/B = Z/E$ oranı yazılabilir. Buna göre $C/D = Z/E$ olduğu görülür. Ancak daha önce $C/D = Z/H$ olduğu gösterildiğine göre $Z/H = Z/E$ ya da $H = E$ olduğu kanıtlanmış olur.

Şimdi $H = E$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A/B = C/D$ olmalıdır. Çünkü yukarıda gösterildiği gibi $Z/E = A/B$ ve $Z/H = C/F$ olduğundan $H = E$ için $Z/E = Z/H$ olmalıdır. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi $A/B = C/D$ ilişkisi geçerlidir.

Not: Bu önerme şu şekilde ifade edilebilir: İki eşit nesnenin aynı nesneye oranı aynıdır ya da bunun aksi de geçerlidir. Bu ifade sayılar için açıklanmamıştır. Hisse ve hisselere göre bunun açıklaması açıktır. Buradan anlaşılacağı gibi birbirleriyle uygun orantılı üç sayıda birinci sayının üçüncü sayıyla çarpılması sonucu ikinci sayının karesi elde edilir. Aksine eğer sonuç bir kareye eşitse bu durumda sayılar uygun orantılıdır.

***XX. Önerme*: Bir orantıdaki en küçük iki sayı, diğer orantı sayılarıyla bir alt çarpanla ilişkilidir.**[1]

Eğer, *AB* ve *CD* sayıları $AB/CD = EZ/HT$ oranındaki sayıların en küçük olanlarına karşı düşüyorsa, bu durumda *AB* sayısı *EZ* sayısının hangi katına eşitse *CD* sayısı da *HT* sayısının aynı katına eşittir (*Şekil 21*).

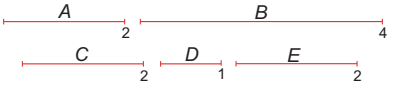


Şekil 21- Burada $AB(2)/CD(1) = EZ(3)/HT(1,5) = 2$, $EK(1,5)/HL(0,75) = EZ(3)/HT(1,5) = 2$

1 Bu önerme cebirsel olarak şu anlama gelir: $a/b = c/d$ oranında eğer a/b en küçük sayılardan oluşan bir kesirse bu durumda n belirli bir tamsayı olmak üzere $a = c/n$ ve $b = d/n$ ilişkisi geçerlidir.

Kanıtı: Bir an *AB* sayısının *EZ* sayısının bir ya da birkaç katına bir (*m*/*n*) < 1 çarpanıyla eşit olduğunu varsayalım: *EZ* = [(*m*/*n*) × *AB*]. Eğer *EZ* sayısı *K* noktasıyla *EK* ve *KZ* hisselerine ayrılırsa, bu durumda *HT* sayısı da *CD* sayısının hisselerine ayrılır. Bu durumda *EK*/*HL* = *EZ*/*HT* olmalıdır. Böylece *EK* ve *HL* sayıları *EZ* ve *HT* sayılarından daha küçük ve onlarla aynı oranda olmuş olur. Hâlbuki önkoşula göre *EZ* ve *HT* sayıları *AB* ve *CD* sayılarıyla aynı oranda en küçük sayılardır. Bu ise yanlış olduğuna göre *EZ* sayısı *AB* sayısının bir hissesi olduğu gibi *HT* de *CD* sayısının aynı sayıda hissesidir. Diğer bir deyişle önermenin öngördüğü gibi *EZ* sayısı *AB* sayısının hangi katına eşitse *HT* sayısı da *CD* sayısının aynı katına eşittir.

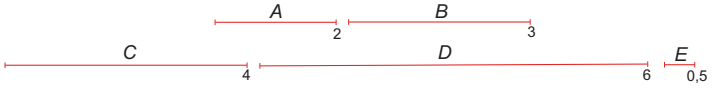
***XXI. Önerme*: Oranları ne olursa olsun en küçük sayılar ortak bölünemez.**[1]



Şekil 22- Burada [*C*(2) × *D*(1)] = *A*(2) ve[*C*(2) × *E*(2)] = *B*(4) olmak üzere *D*(1)/*E*(2) = *A*(2)/*B*(4). Ancak bu durumda *D* < *A* ve *E* < *B* olduğundan sonuç hatalı.

Kanıtı: Bir an böyle olmadığını bir *C* sayısının onların ortak böleni olduğunu, *D* ve *E* sayılarının *A* ve *B* sayılarının hisseleri olduğunu varsayalım (*Şekil 22*). Bu durumda (*C* × *D*) = *A* ve (*C* × *E*) = *B* olmak üzere *D*/*E* = *A*/*B* olması gerekirdi. Ne var ki *D* < *A* ve *E* < *B* olduğu için bu sonuç yanlıştır ve önermede öngörüldüğü gibi bir oranda en küçük sayılar ortak bölünmediği kanıtlanmış olur.

***XXII. Önerme*: İki ortak bölensiz sayı herhangi bir oranı oluşturan en küçük iki sayıdır.**



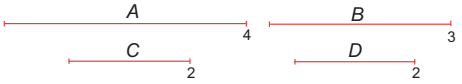
Şekil 23- Burada *C*/*D* = *A*/*B* = 2/3; *A*(2) = [*C*(4) × *E*(0,5)] ve *B*(3) = [*D*(6) × *E*(0,5)]; ancak *C* > *A*, *D* > *B*.

1 Diğer bir deyişle eğer *a* ve *b* sayılarından biri diğerine bölünemiyorsa, *a*/*b* oranı orantının en küçük iki sayısına karşı düşer.

Kanıtı: Eğer böyle olmasaydı daha küçük ve aynı oranı oluşturan *C* ve *D* sayıları ve bu sayılarda *A* = (*C* × *E*) ve *B* = (*D* × *E*) şeklinde ortak bölen bir *E* sayısının bulunması gerekirdi (*Şekil 23*). Ne var ki önkoşul gereği bu sayılar ortak bölensiz olması gerektiğinden bu yanlıştır ve önerme de olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XXIII. Önerme*: İki ortak bölensiz sayının birinin hissesi de diğeriyle ortak bölensizdir.**

A ve *B* sayılarının ortak bölensiz olduğunu varsayalım (*Şekil 24*). Bu durumda eğer *C* sayısı *A* sayısının bir hissesiyse *C* ve *B* sayıları da ortak bölensizdir.

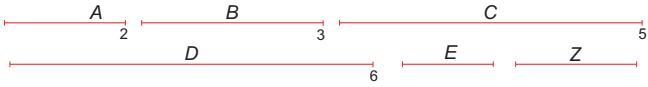


Şekil 24- Burada *A*(4)/*B*(3) = 4/3 ve A(4)/2 = C(2) için *C*(2)/*B*(3) = 2/3 ortak bölensiz.

Kanıtı: Eğer böyle olmasaydı bir *D* sayısı *C* ve *B* sayılarının bir ortak böleni olurdu. Bu durumda *D* sayısı *C* sayısının böleni ve *C* sayısı da *A* sayısının bir böleni olduğundan *B* ve *A* sayılarının bir ortak böleni olurdu ki bu önkoşul gereği yanlış ve geçersiz olduğundan önerilen önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XXIV. Önerme*: Bir sayıya ortak bölensiz iki sayının çarpımı da o sayıya ortak bölensizdir.**

A ve *B* sayılarının *C* sayısıyla ortak bölensiz olduğunu varsayalım. Eğer *D* = (*A* × *B*) ise bu durumda *C* ve *D* sayıları da ortak bölensizdir (*Şekil 25*).



Şekil 25- Burada *A* = 2, *B* = 3ile C = 5 ortak bölensiz. *D* = (*A* × *B*) = 6 ile C ortak bölensiz.

Kanıtı: Bir an bunun böyle olmadığını *E* sayısının *D* ve *C* sayılarının bir ortak böleni olduğunu varsayalım. Bu durumda *D*/*E* = *Z* ya da *D* = (*E* × *Z*)

yazılabilir. Ancak koşul gereği $D = (A \times B)$ olduğuna göre $(E \times Z) = (A \times B)$ ilişkisinden $E/A = B/Z$ oranı yazılabilir. E sayısı Z sayısının bölenidir ve A sayısı koşul gereği ortak bölensiz olduğundan E ve A sayıları oranın en küçük sayılarıdır. Ancak bu oran B/Z oranına eşit olduğundan B ve Z sayıları E ve A sayılarının bölenleri olmalıdır. Böylece E sayısı B sayısının böleni olur. Ancak E sayısı C sayısının böleni olduğundan C ve B sayısının ortak böleni bulunması gerekir ki bu varsayım gereği yanlıştır. Buna göre önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XXV. Önerme*: Ortak bölensiz sayıların karesi de ortak bölensizdir.**

A ve B sayılarının ortak bölensiz olduklarını varsayalım. Bu durumda $A^2 = C$ olmak üzere C ve B sayıları da ortak bölensizdir (*Şekil 26*).

Şekil 26- Burada $A = 2$ ile $B = 3$ ve $C = A^2 = 4$ ile $B = 3$ ortak bölensiz.

Kanıtı: $D = A$ olduğunu varsayalım. A ve D sayıları B sayısıyla ortak bölensiz olduğuna göre onların çarpımı $(D \times A) = A^2 = C$ sayısı da *24. Önerme* gereği B sayısıyla ortak bölensizdir.

***XXVI. Önerme*: Eğer iki sayı başka iki sayıyla ortak bölensizse, bu durumda sayıların çarpımı da ortak bölensizdir.**

Örneğin A, B ve C, D sayılarının her biri karşılıklı ortak bölensiz ise, bu durumda $(A \times B) = E$ ve $(C \times D) = Z$ olmak üzere, E ve Z sayıları da ortak bölensizdir (*Şekil 27*).

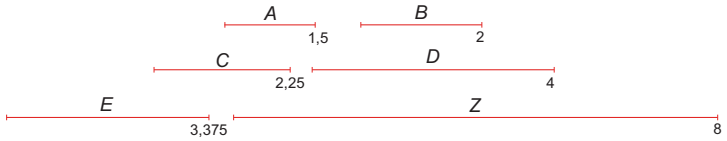
Şekil 27- Burada $A = 2$ ile $B = 3$ ve $C = 5$ ile $D = 1$ ortak bölensiz ise $(A \times B) = E = 6$ ile $(C \times D) = Z = 5$ de ortak bölensizdir.

Kanıtı: A ve B sayıları C sayısıyla ortak bölensiz olduğuna göre *24. Önerme* gereği E ve C sayılarıyla da ortak bölensizdir. Aynı şekilde A ve B sayıları D ile ortak bölensiz olduğundan Z ve D sayılarıyla da ortak bölensizdir.

Lakin *C* ve *D* sayıları *E* sayılarıyla ortak bölensiz oldukları için önermenin öngördüğü gibi *E* sayısı Z sayısıyla da ortak bölensizdir.

***XXVII. Önerme*: Ortak bölensiz iki sayının kareleri, küpleri ya da herhangi bir mertebeden üsleri de ortak bölensizdir.**

Örneğin eğer *A* ve *B* sayıları ortak bölensizse, bu durumda $A^2 = C$, $B^2 = D$, $A^3 = E$ ve $B^3 = Z$ olmak üzere, *C* ile *D* ve *E* ile *Z*, diğer bir deyişle genelleştirilirse A^n ve B^n sayıları ortak bölensizdir (*Şekil 28*).

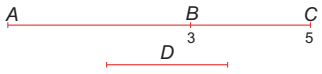


Şekil 28- Burada $A = 1{,}5$ ile $B = 2$ ortak bölensiz; $A^2 = C = 2{,}25$, $B^2 = D = 4$, $A^3 = E = 3{,}375$ve $B^3 = Z = 8$ olduğundan *C*, *D*, *E* ve *Z* ortak bölensizdir.

Kanıtı: *A* ve *B* ortak bölensiz olduğuna göre *25. Önerme* gereği kareleri de ortak bölensizdir. Buna göre A^2 ve B^2 sayıları ve bunlara eşit olan *C* ve *D* sayıları da ortak bölensizdir. *A* ile *C* sayılarının her biri, *B* ve *D* sayılarının her biriyle ortak bölensiz olduğuna göre *A* ile *C* ve *B* ile *D* sayılarının çarpımından oluşan *E* ve *Z* sayıları da *24. Önerme* gereği ortak bölensizdir. Aynı mantık daha yüksek mertebeden üsler için geçerli olduğundan, önerme *n*. mertebe için genelleştirilebilir.

***XXVIII. Önerme*: Ortak bölensiz iki sayının toplamı, sayıların her biriyle ortak bölensizdir; aksine iki sayının toplamı sayılardan her biriyle ortak bölünemiyorsa, sayıların kendileri de ortak bölensizdir.**

Eğer ortak bölensiz *AB* ve *BC* sayıları verilmişse, bu durumda *AC* = (*AB* + *BC*) sayısı da *AB* sayısıyla ortak bölensizdir (*Şekil 29*).



Şekil 29- Burada *AB* = 3 ile *BC* = 2 ortak bölensiz *AB* = 3 ile *AC* = (*AB* + *BC*) = 5 de ortak bölensiz.

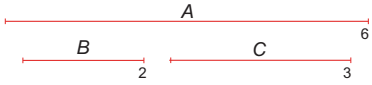
Kanıtı: Bir an bunun böyle olmadığını ve *D* sayısının *AB* ve *AC* sayılarıyla ortak bölenli olduğunu varsayalım. Bu durumda *D* sayısı *BC* sayısıyla da ortak bölenli olmalıdır ki bu yanlıştır. Şu halde önerme gereği *AB* ve *BC* sayıları ortak bölensiz olmak zorundadır.

Aksine *AC* ve *AB* sayılarının ortak bölensiz olduklarında da *AB* ve *BC* sayılarının da ortak bölensiz olduklarını kanıtlamaya çalışalım. Bir an bunun böyle olmadığını ve *D* sayısının *AB* ve *BC* sayılarının ortak böleni olduğunu varsayalım. Bu durumda *D* sayısı *AC* ve *AB* sayılarıyla da ortak bölenli olması gerektiğinden bu yanlıştır. Buna göre önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

Not: İki sayının ortak bölenli olması haline ilişkin önerge de aynı şekilde kanıtlanabilir.

***XXIX. Önerme*: Her bileşik sayı bir asal sayıyla ölçülebilir.**[1]

Eğer *A* bir bileşik sayıysa, *B* onun bölenidir (*Şekil 30*). Eğer *B* asal bir sayıysa önerme kanıtlanmış olur. Aksi halde bir diğer *C* asal sayısı da *A* sayısının bölenidir.



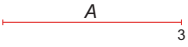
Şekil 30- Burada *A* = 6 = (2 × 3), 2 ve 3 asal sayılar.

Kanıtı: Eğer sayıların çarpımından oluşan bileşik sayı bir asal sayıya indirgenemez ise bu sayılar ardışık olarak gittikçe büyümek ve sayının kendisinden daha büyük olmak zorundadır ki bu yanlıştır. Buna göre asal olan her *C* sayısı önermede öngördüğü gibi *A* sayısını bölmek zorundadır.

***XXX. Önerme*: Her sayının ya kendisi ya da böleni bir asal sayıdır.**[2]

Eğer sadece kendine bölünebiliyorsa bu söz konusu sayının asal olduğu anlamına gelir (*Şekil 31*). Eğer bölen asal sayı değilse önerme gereği onu bölen asal sayılar bulunur.

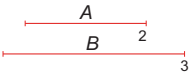
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *31. Önerme* olarak yer alır.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *32. Önerme* olarak yer alır.



Şekil 31- Burada $A = 3$ asal sayı.

***XXXI. Önerme*: Bir asal sayıyla ona bölünemeyen her sayı ortak bölünemez.**[1]

Eğer A asal sayı ve B ona bölünmeyen herhangi başka bir sayı ise bu durumda A ve B sayıları ortak bölünemez (*Şekil 32*).

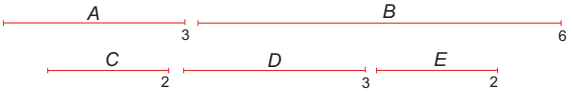


Şekil 32 Burada $A = 2$ ve $B = 3$ asal sayılar.

Kanıtı: Aksi halde A ve B sayılarını birimden başka bir böleni olması gerekirdi. Ne var ki varsayım gereği A bir asal sayıdır. Buna göre önermede öngörülen hüküm geçerlidir.

***XXXII. Önerme*: Eğer bir asal sayı herhangi bir çarpımın böleniyse, bu durumda çarpılanlardan birinin de bölenidir.**[2]

Eğer A bir asal sayı, $B = (C \times D)$ çarpımı ve A sayısı B çarpımının bir böleniyse bu durumda A asal sayısı C ya da D sayısının da bir bölenidir (*Şekil 33*).

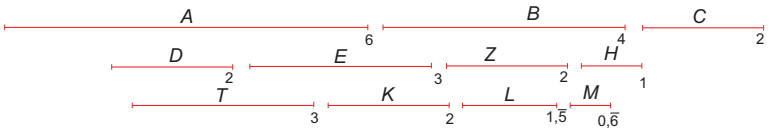


Şekil 33- Burada $A = 3$ asal sayı ve $B = (A \times E) = (C \times D) = 6$ olduğundan $A/C = D/E = 3/2$ yazılabilir.

Kanıtı: Eğer A sayısı C sayısının böleniyse önermenin hükmü yerine gelmiş olur. Aksi halde A ve C sayıları ortak bölensizdir ve bu durumda A sayısı B sayısının bir bölenidir. Bu durumda $B = (A \times E)$ yazılabilir. Varsayım gereği $B = (C \times D)$ olduğundan $A/C = D/E$ yazılabilir. Buna göre D/E oranını oluşturan sayıların en küçüğü, A ve C ortak bölensiz olduğundan, A ve C sayılarına karşı düşer. Şu halde önerme gereği A sayısı D sayısının böleni olur.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde bulunmamaktadır.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *30. Önerme* olarak yer alır.

***XXXIII. Önerme*: Verilen sayılardan oluşan oranlarda en küçük sayıların belirlenmesi.**[1]



Şekil 34- Burada $A = 6$, $B = 4$ ve C = 2 sayılarını bölen en büyük sayı $D = 2$ olduğuna göre;
$A/D = E = 3$, $B/D = Z = 2$ ve $C/D = H = 1$.

Verilen A, B ve C sayılarını bölen en büyük sayının D sayısı olduğunu varsayalım (*Şekil 34*). Bu durumda $A/D = E$, $B/D = Z$ ve $C/D = H$ ilişkileri yazılabilir. Bu durumda E, Z ve H sayıları A, B ve C sayılarıyla aynı oranda olan en küçük sayılardır.

Kanıtı: Bir an ortak bölenin T ve K, L, M sayılarının en küçük sayılar olduğunu varsayalım. Bu durumda $A/T = K$ ve $B/T = L$ yazılabilir. Buna göre $(T \times K) = A$ olur ancak varsayım gereği $(D \times E) = A$ olduğuna göre $E/K = T/D$ oranı yazılabilir. Ayrıca varsayım gereği $E > K$ olduğundan $T > D$ olmalıdır. Ne var ki D sayısı A, B, C sayılarının en büyük böleni varsayılmıştı. Şu halde $T > D$ ifadesi yanlış olduğundan, önermenin öngördüğü gibi E, Z, H sayıları dışında A, B, C sayılarıyla aynı oranda başka en küçük sayı bulunmaz.

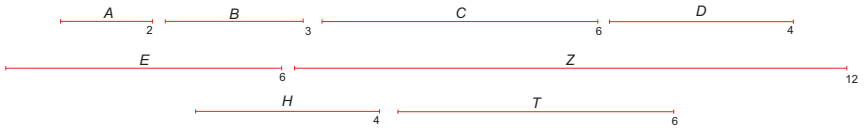
***XXXIV. Önerme*: İki böleni olan en küçük sayının belirlenmesi.**

Eğer küçük sayı kendinden büyük sayının böleni, büyük sayı ise kendini bölense bu durumda aktarılan en büyük sayı söz konusu büyük sayıdır (*Şekil 35*).

Eğer A ve B sayıları ortak bölensiz ise bu durumda $(A \times B)$ çarpımına eşit C sayısı aranan sayıdır. A ve B sayılarının C sayısının böleni olması açıktır. Lakin C sayısının en küçük sayı olması konusunda şunlar söylenebilir. Eğer A ve B sayıları C sayısından küçük olan bir Z sayısının da böleni ise

1 Bu önerme cebirsel olarak şu anlama gelir: $a = (m \times g)$, $b = (n \times g)$, $c = (p \times g)$ sayıları verilmiş olsun. Bu durumda $m/a = n/b = p/c$ oranları yazılabilir ve m, n ve p aranan sayılardır.

bu durumda $Z/B = D$ ve $Z/A = E$ ya da $(B \times D) = Z$ ve $(A \times E) = Z$ olduğu için $(B \times D) = (A \times E)$ olması gerekir. Buna göre A ve B sayıları, D ve E sayılarıyla oranlanan sayıların en küçükleridir. Şu halde A sayısı D sayısının bölenidir. Ayrıca $(A \times B) = C$ ve $(B \times D) = Z$ olduğundan $C/A = Z/D$ ya da $A/D = C/Z$ oranı yazılabilir. Neticede Z sayısından büyük C sayısı aynı zamanda Z sayısının da böleni olması gerekir ki bu yanlıştır. Şu halde A ve B sayıları C sayısından küçük bir sayının böleni olamazlar.



Şekil 35- Burada $A = 2$, $B = 3$, $C = (A \times B) = 6$.

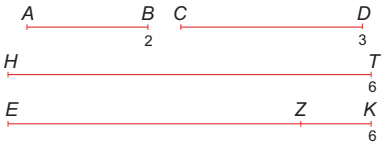
Şimdi A ve B sayılarının, ortak bölenli D/E oranında en küçük sayılara karşı düştüklerini varsayalım. Eğer $(A \times E) = C$ veya $(B \times D) = C$ ise bu durumda C aradığımız en küçük sayıdır. Çünkü 1) A ve B sayılarının C sayısın da bölenleri olması kendiliğince açıktır. 2) Ayrıca C sayısının en küçük sayı olması ise aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Eğer A ve B sayılarının C sayısından küçük örneğin Z sayısı gibi bir böleni bulunursa, $Z/A = T$ ve $Z/B = H$ yazılabilir. Lakin bu durumda $(A \times T) = Z$ ve $(B \times H) = Z$ olduğundan $A/B = H/T$ olması gerekir. Ne var ki yukarıda $A/B = D/E$ olduğu varsayılmıştı. Buna göre E ve D sayıları H ve T sayılarıyla aynı oranda olan en küçük sayılardır. Neticede D sayısı H sayısının böleni olur ve $(B \times D) = C$ yazılabilir. Diğer taraftan $(B \times H) = Z$ olduğundan $D/H = C/Z$ oranı geçerlidir [diğer bir değişle E ve D sayıları H ile T sayılarıyla aynı oranda sayılardır, D ve H satılarının böleni $(B \times D) = C$ sayısıdır].

Diğer taraftan $(B \times H) = Z$ olduğu için $D/H = C/Z$ olmalıdır. Bu durumda Z sayısından büyük C sayısı aynı zamanda Z sayısının da böleni olmalıdır. Bu ise yanlış olduğundan önermenin öngördüğü gibi A ve B sayılarının C sayısından küçük bir böleni bulunamaz.

***XXXV. Önerme*: İki bölenli en küçük sayı, aynı iki bölenli herhangi bir sayının da bölenidir.**

Eğer bir en küçük *HT* sayısının *AB* ve *CD* gibi iki böleni bulunduğu varsayılırsa, bu durumda eğer *AB* ve *CD* sayıları *EK* sayısının da böleniyse, bu durumda *HT* sayısı *EK* sayısının da bölenidir (*Şekil 36*).

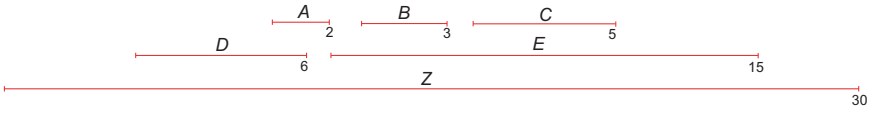


Şekil 36- Burada *HT* = (*AB* × *CD*) = (2 × 3) = 6; *EK* = 6.

Kanıtı: Eğer bu doğru değilse bu durumda *EK* sayısında *HT* sayısıyla ölçülemeyen *ZK* parçası artık kalmalıdır. *AB* ve *CD* sayıları *EZ* sayısının bölenleridir. *HT* ise *EZ* sayısının böleni olmalıdır. Ancak *AB* ve *CD* sayıları *EK* sayısının da bölenleri olduğundan *ZK* sayısının da bölenleri olmalıdır. Ne var ki varsayım gereği *HT* sayısı *AB* ve *CD* gibi bölenleri olan en küçük sayıdır. Bu nedenden dolayı *HT* sayısı *EK* sayısından büyük olması gerekir. Bu ise yanlış olduğundan önermenin hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XXXVI. Önerme*: İkiden fazla böleni olan bir sayıda en küçük bölünen sayının belirlenmesi.**

Bunun için önce *A* ve *B* sayılarının en küçük ortak bölüneni olan *D* sayısı bulunur (*Şekil 37*). Eğer üçüncü bir *C* sayısı bu *D* sayısına bölünüyorsa bu durumda *D* sayısı bu üç sayının en küçük bölünenidir.



Şekil 37- Burada *A* = 2, *B* = 3 ve *C* = 5; *D* = (*A* × *B*) = 6, *E* = (*B* × *C*) = 15 ve *Z* = (*A* × *B* × *C*) = 30.

D sayısının her üç sayının bölüneni olması açıktır. En küçük bölünen olması ise şu şekilde açıklanabilir. Bir an her üç sayının bölüneni *D* değil de *E* sayısı olduğunu varsayalım. Bu durumda *E* sayısı *A* ve *B* sayısının

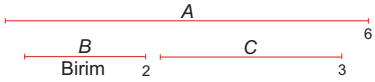
bölüneni olur. *A* ve *B* sayılarının en küçük bölüneni *D* olduğu için *E* sayısı *D* sayısının da bölüneni olmalıdır. Bu ise yanlıştır, çünkü *E* sayısı *D* sayısından küçüktür.

Eğer *C* sayısı *D* sayısının böleni değilse bu durumda *C* ile *D* sayılarının en küçük böleni bulunur. Bu *Z* sayısı olsun. *Z* sayısı *A*, *B* ve *C* sayılarının en küçük bölünenidir.

1) *Z* sayısının bölünen olması şöyle açıklanabilir. *D* sayısı *A* ve *B* sayılarının bölünenidir. *Z* sayısı ise *D* sayısının bölüneni olduğundan *A* ve *B* sayılarının da bölünenidir. Ayrıca *C* sayısının da bölünenidir.

2) *Z* sayısının en küçük bölünen olması şöyle açıklanabilir. Bir an *Z* en küçük bölünen olmadığını ve bunun *E* sayısı olduğunu varsayalım. Yukarıda belirtildiği gibi bu durumda *Z* sayısı *E* sayısının böleni olmalıdır. Hâlbuki *Z* sayısı *E* sayısından büyük olduğundan bu yanlıştır ve önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***XXXVII. Önerme*: Bir sayının böleni varsa bu durumda bölenle aynı sayıda hissesi de vardır.**[1]

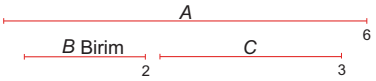


Şekil 38- Burada *A*(6)/*B*(2) = *C*(3)/1 = 3 hisse.

Eğer *A* sayısının böleni *B* ise *A*/*B* = *C*/1 ya da *B*/1 = *A*/*C* yazılabilir. Buna göre *B* sayısı bir birime karşı düşürülürse *A* sayısı *C* sayısı kadar hisseye bölünmüş olur. Diğer bir deyişle *A* sayısındaki *B* birim sayısı ile *A* sayısını bölen *C* sayısının değeri aynıdır.

1 Bu önerme cebirsel şu anlama gelir: Eğer a sayısının böleni b ise bu durumda *a = (m × b)*, ya da b büyüklüğüne bölünürse *m = (m × 1)* yazılabilir. Şu halde 15. Önerme gereği 1, *m, b, a* dörtlüsü nedeniyle *m* sayısı *a* sayısını ölçtüğü kadar birim de b sayısını ölçer. Bu durumda birim *b* sayısının *1/b* hissesi olduğundan, *m* sayısı da *a* sayısının *1/b* hissesine karşı düşer.

***XXXVIII. Önerme*: Bir sayının hissesi varsa bu durumda sayının hisse sayısına eşit bir de böleni vardır.[1]**

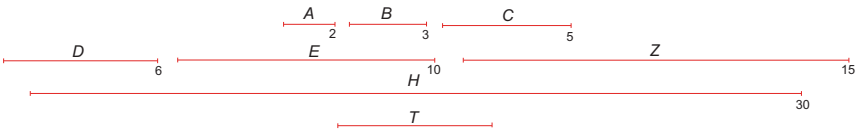


Şekil 39- Burada 3 hisse = *C*(3)/1 =*A*(6)/*B*(2).

Eğer *A* sayısın *B* birimlik *C* hissesi varsa *A* = (*B* × *C*) ifadesinden *A*/*B* = *C*/1 = *C* yazılabildiğine göre *A* sayısı *C* sayısı kadar *B* birimine ya da doğrudan B sayısına bölünebilir (*Şekil 39*).

***XXXIX. Önerme*: Bir sayının çarpanları içinde en küçük ortak çarpanın bulunması.[2]**

A, *B* ve *C* çarpanları verilmiştir. Amaç bu çarpanları bölen *D*, *E*, *Z* ölçüleri içinde en küçük *H* ortak böleni bulmaktır (*Şekil 40*). Buna göre *37. Önerme* gereği *H* sayısının aynı hisseli *D*, *E*, *Z* ve *A*, *B*, *C* bölenleri vardır. Bunun en küçük ortak bölen olduğu da söylenebilir. Eğer bir an tersi düşünülür ve *H* sayısından daha küçük *A*, *B*, *C* hisseleri olan bir *T* sayısının bulunduğunu varsayalım. Ancak *H* sayısının da aynı hisseli *A*, *B*, *C* bölenleri bulunduğu gibi *D*, *E*, *Z* sayıları da bu sayının çarpanları olmak zorunluluğundadır. Buna göre *T* sayısı *D*, *E*, *Z* tarafından ölçülür ve varsayım gereği *H* sayısından küçük olmalıdır. Ancak bu imkânsız olduğundan *A*, *B*, *C* sayılarının *H* sayısından küçük böleni yoktur.



Şekil 40- Burada *A* = 2, *B* = 3 ve *C* = 5;
D = (*A* × *B*) = 6, *E* = (*A* × *C*) = 10, *Z* = (*B* × *C*) = 15; *H* = (*A* × *B* × *C*) = 30.

1 Bu önerme bir önceki önermenin aksi yönde bir tekrarı şeklindedir ve şu anlama gelir: Eğer *b* sayısı *a* sayısının *1/m* hissesine karşı düştüğü varsayılırsa bu durumda *m* sayısı da *a* sayısını ölçer. Gerçekten de *b* = *a/m* ifadesi *1* = *m/m* şeklinde yazılabilir ve yine 15. Önerme gereği *1, m, b, a* dörtlüsü oluşur ve *m* = *a/b* nedeniyle *m* sayısı *a* sayısını ölçtüğü gibi, birim de *b* sayısını aynı sayıda ölçer.

2 Bu önerme *a, b* ve *c* çarpanların verildiğinde, en küçük ortak *d* çarpanının sayının *1/a, 1/b ve 1/c* hisselerini kapsaması gerektiği anlamına gelir. Eğer en küçük ortak çarpanın *d* yerine bir e sayısı olduğu varsayılırsa bu durumda bu *e* sayısı *a, b* ve *c* tarafından ölçülebilmesi ve ayrıca *e* < *d* olması gerekir ki bu mümkün değildir.

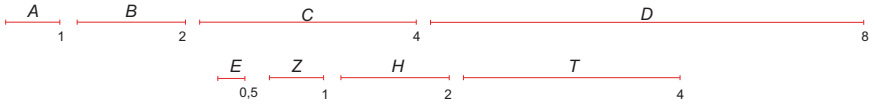
SEKİZİNCİ MAKALE

Bu makale 27 önermeden oluşur. Sâbit nüshasında fazladan iki önerme daha bulunur.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Eğer, belirli bir orana göre geometrik artan ardışık bir sayı dizisi verilmişse, bu sayıların iki ucunda yer alan sayılar ortak bölensizse, bu sayılar oranın en küçük sayılarına karşı düşer.**[1]

A, *B*, *C* ve *D* sayılarının birbirlerini izleyen belirli bir oran oluşturduğunu varsayalım. Bu durumda *A* ve *D* tekil sayıları *A*, *B*, *C* ve *D* sayılarıyla aynı oranda olan sayıların en küçüğünü oluşturur (*Şekil 1*).



Şekil 1- Burada $A/B = B/C = C/D = m = ½$.

Kanıtı: Bir an *E*, *Z*, *H* ve *T* sayılarının aynı oranları oluşturan en küçük sayılar olduğunu varsayalım. Bu durumda oranlar eşit olduğundan $A/D = E/T$ ilişkisi yazılabilir. *A* ve *D* ortak bölensiz olduğuna göre bunlar aynı oranı oluşturan herhangi iki sayının bölenleridir. Buna göre *A* sayısı *E* sayısının böleni olduğundan *A* sayısı *E* sayısından küçük olmalıdır. Bu ise varsayım gereği mümkün olamayacağına göre önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***II. Önerme*: Belirli bir orana göre geometrik artan istenen miktarda sayının belirlenmesi.**[2]

Örneğin A/B oranına eşit bir oran oluşturan dört sayının en küçüğü *A* ve *B* olsun. *A* ve *B* sayılarının karesi ile *A* ile *B* sayılarının çarpımıyla $C = (A^2)$,

---

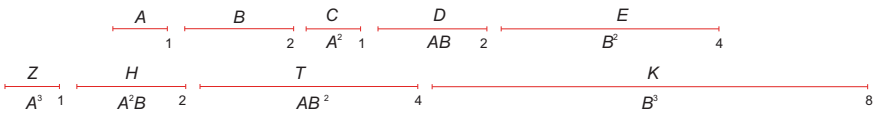
1 Önerme şu anlama gelir: Eğer bir oranı oluşturan tekil sayılar *a, b, c, d… j, k* şeklinde geometrik artan bir dizi oluşturuyorsa *(a/b = b/c = … = j/k = m)*, bu durumda dizinin her iki ucundaki *a* ve *k* tekil sayıları, dizinin müşterek en küçük oranına karşı düşer.

2 Bu önerme, verilen *a* ve *b* sayılarının *a/b* oranına eşit, *(n + 1)* terimli geometrik artan bir diziye ilişkindir:

$$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n$$

(ya da diğer bir değişle $a^n/a^{n-1}b = a^{n-1}b/a^{n-2}b^2 = \dots, a^2b^{n-2}/ab^{n-1} = ab^{n-1}/b^n = a/b$).

$D = (AB)$ ve $E = (B^2)$ sayılarını oluşturalım (*Şekil 2*). Böylece C, D ve E gibi üç adet yeni sayı elde edilmiş olur.



Şekil 2

Bu üç sayıyı A sayısıyla ve E sayısını B sayısıyla çarpalım:

$$(A \times C) = (A^3) = Z,$$
$$(A \times D) = (A^2B) = H,$$
$$(A \times E) = (AB^2) = T,$$
$$(B \times E) = (B^3) = K.$$

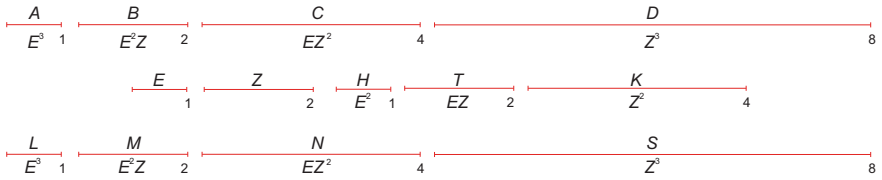
Böylece Z, H, T ve K gibi dört yeni sayı elde edilir. Bunlar yeni bir geometrik dizi oluşturmak için türetilen sayılardır. Çünkü A sayısı A sayısıyla çarpılınca C sayısı, A sayısı B sayısıyla çarpılınca D sayısı elde edildiğinden $A/B = C/D$ oranı bulunur. Diğer taraftan B sayısı A sayısıyla çarpılarak D sayısı ve B sayısı B sayısıyla çarpılarak E sayısı elde edildiğinden $A/B = D/E$ oranı elde edilir. Buna göre C, D, E sayıları, A ve B sayıları arasındaki aynı oranı sağlayan, üç ardışık sayıdır. Diğer taraftan A sayısı bu üç sayıyla çarpılarak Z, H ve T sayıları elde edilir ki bunlar da aynı oranı sağlar. A ve B sayıları E sayısıyla çarpılarak T ve K sayıları elde edilir ki bu dört sayı da birbirini izler.

Bu dört sayının en küçük sayı olması şöyle açıklanır: A ve B sayılarının ortak bölensiz olduklarını varsayarsak C ve E sayıları da uygun olarak A ve B sayılarının kareleridir. İlk türetilen üç sayı ve sonra bunlardan türetilen dört sayı ortak bölensizdir. Eğer bu dört sayıdan başka sayılar türetmek gerekirse aynı şekilde hareket etmek gerekir. Amacımız da budur.

Not: Buna göre birbirini belirli bir oranda izleyen üç sayı verildiğinde en küçük olanlar kenarda olanlardır ve sayıların karesine eşittirler. Dört sayı verildiğinde ise kenarda olanlar bu sayıların küpüne karşı düşer.

***III. Önerme*: Bir oran gereğince birbirini ardışık izleyen sayıların başlarındaki sayılar ortak bölensizdir.[1]**

A, *B*, *C* ve *D* sayılarının başlarındaki *A* ve *D* sayıları ortak bölensizdir (*Şekil 3*).



Şekil 3

Kanıtı: Önceki sayılarla aynı oranda en küçük üç adedini, örneğin *H*, *T*, *K* sayılarını ve sonra en küçük dört adedini örneğin *L*, *M*, *N*, *S* sayılarını oluşturalım. Bu sonuncu dört sayı *A*, *B*, *C* ve *D* sayılarına sayı ve oran yönünden uygun olduklarından en küçük sayılardır. Aynı zamanda *L* ve *S* sayıları ortak bölensiz olduğundan *A* ve *D* sayıları da önermede öngörüldüğü gibi ortak bölensizdir.

***IV. Önerme*: Verilen bir orana göre birbirinin peşi sıra oluşturulan çok sayıda ardışık sayıda en küçük olanın belirlenmesi.[2]**

Burada *2. Önerme*de olduğu gibi $C = A^2$, $D = (AB)$, $E = B^2$, $Z = (AC)$, $H = (AD)$, $T = (AE)$, $K = (BE)$ ilişkilerinin geçerli olduğu varsayılarak

---

1 Bu öneride verilen sayılar 2. Önermede olduğu gibi daha düşük mertebeden bir geometrik diziye eşitlenir. Buna göre geometrik artan n terimli *a, b, c, … , k* sayı dizisi

$$\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}\beta, \dots, \alpha^2\beta^{n-2}, \alpha\beta^{n-1}, \beta^{n-1}$$

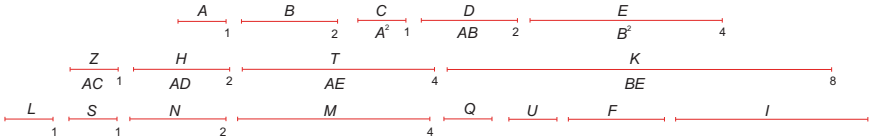
(ya da diğer bir değişle $\alpha^{n-1}/\alpha^{n-2}\beta = \alpha^{n-2}\beta/\alpha^{n-3}\beta^2 = \dots, \alpha^2\beta^{n-2}/\alpha\beta^{n-1} = \alpha\beta^{n-1}/\beta^n = \alpha/\beta$)

şeklinde olduğunu düşünelim. Bu dizide varsayım gereği α^n ve β^n ortak bölensiz olduğundan α^{n-1} ve β^{n-2} sayıları ve neticede a ve β sayıları da ortak bölensizdir. Bu durumda $a \equiv \alpha^{n-1}$ ve $b \equiv \beta^{n-1}$ olmalıdır.

2 Burada verilen sayıların önceki 4. Önermede olduğu gibi bir geometrik dizi oluşturmak yerine, belirli ancak aynı olmayan katsayılarla çarpılarak elde edildikleri varsayılır. Üç oranda en düşük terimler oranının *a/b, c/f, e/d* olarak verildiğini düşünelim. Bu durumda *b* ve *c* sayılarında en küçük ortak çarpan $l_1 = m.b = n.c$ şeklindedir. Şu halde *m.a, m.b = n.c, n.f* sayıları *a/b* ve *c/f* oranındadır. Sonra *n.d* ve *e* sayılarının en küçük ortak çarpanı $l_2 = p.n.d = q.e$ alınır ve *p.m.a, p.m.b = p.n.c, p.n.d = q.e, q.f* sayıları oluşturularak aranan 4 sayı elde edilir.

Eğer bunlar verilen oranda en küçük sayılar değilse *x, y, z, u* sayılarının verilen oranda daha küçük oldukları düşünülür. *a/b* en küçük terimlere karşı düştüğünden *a/b = x/y* nedeniyle *b* sayısı *y* sayısını ve aynı şekilde *c/d = y/z* nedeniyle *c* sayısı *y* sayısını kapsar. Buna göre *b, c* sayılarının en küçük ortak çarpanı l_1 sayısı *y* sayısını kapsar. Ancak $l_1/n.d$ *(= c/d) = y/s* nedeniyle *n.d* sayısı *z* sayısını kapsar. Ayrıca *e/f = x/u* nedeniyle *e* sayısı *z* sayısını kapsar. Neticede *n.d* ve *e* sayısının en küçük ortak çarpanı l_2 sayısı *z* sayısını kapsar. Ancak ne var ki $z < l_2$ ya da *p.n.d* olduğundan bu mümkün değildir.

$A/B = C/D = D/E$ oranlarının içinde, hangisinin en küçük olduğu belirlenmek istenmektedir (*Şekil 4*). İlkin B ve C sayılarının en küçük böleni T sayısını bulalım. Bu durumda $T/B = H/A$ ve $T/C = K/D$ olacağı açıktır. Sonra K ve E sayılarının en küçük böleni olan M sayısını bulmak için $M/K = S/H$ ve $M/E = L/Z$ oranlarını oluşturalım. Böylece M, L, S, N sayıları amaçlanan oranları sağlar. Çünkü $T/B = H/A$ ve $N/T = S/H$ olduğundan $A/B = S/N$ ve $T/C = K/D$ ve $N/T = M/K$ olduğundan $N/M = C/D$ yazılabilir. Diğer taraftan $M/E = L/Z$ ilişkisinden $M/L = E/Z$ elde edilir ve bu durumda M, L, S ve N bu oranları gerçekleyen en küçük sayılardır.



Şekil 4- Burada $A/B = C/D = Z/H = ½$; $T/B = H/A = 2$; $T/C = K/D = 4$; $M/S = M/L = 4$; $S/N = N/M = ½$.

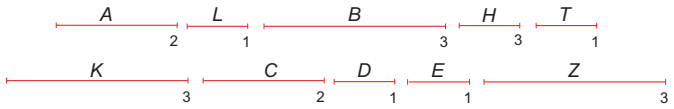
Eğer bir an bunun böyle olmadığını ve Q, U, F ve I sayılarının en küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda $A/B = Q/U$ olması gerekir. A ve B en küçük sayılardır ve onların oranı Q ve U oranına eşittir. Bu durumda $Q/A = U/B$ yani A sayısı Q sayısının böleni olur. Böylece C ve D sayıları U ve F sayılarının, E ve Z sayıları ise F ve I sayılarının bölenleri olurlar. Şu halde hem B hem de C sayısı D sayısının böleni olur. B ve C sayılarının en küçük böleni T sayısı olduğundan, T sayısı da D sayısının böleni olur. $T/K = U/F$ olduğundan K sayısı F sayısının böleni olur. Ne var ki E sayısı F sayısının böleniydi. Buna göre hem E hem de K sayısı F böleni olur. Hâlbuki E ve K sayılarının en küçük böleni M sayısıydı. Şu halde M sayısı F sayısının böleni olmalı. Bu ise yanlıştır. Çünkü varsayıma göre F sayısı M sayısından küçüktür. Bu durumda varsayıldığı gibi M, L, S ve N sayıları en küçük sayı olamaz.

***V. Önerme*: Orantılı düzlemsel sayılarda kenar çarpanları karmaşık orantılıdır.**[1]

Eğer $A = D.C$ ve $B = E.Z$ düzlemsel sayılar verilmiş ise bu durumda $A/B = (C/E)\times(D/Z)$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 5*).

1 Bu önerme, orantılı *a = c.d ve b = e.f* dörtgen sayılarda, sayı çarpanların da *c/e* ve *d/f* şeklinde orantılı oldukları anlamına gelir. Bunun için sürekli belirli bir oranı sağlayan üç sayının en küçüğü belirlenir. Eğer *l* sayısı *e, d* sayılarının *l = m.e = n.d* şeklinde en küçük ortak çarpanıysa bu durumda önceki 8. Makale 4. Önerme gereği bu üç sayı *m.c, m.e = n.d, n.f* şeklindedir. Bu durumda 7. Makale 17. Önerme gereği *(d.c)/(d.e) = c/e = (m.c)/(m.e) = (m.c)/(n.d)* ve benzer şekilde *(e.d)/(e.f) = d/f = (n.d)/(n.f)* ilişkileri de geçerlidir.

Kanıtı: Bu iki orana eşit olan oranları oluşturan en küçük K, T ve H sayılarını belirleyelim. Bunun için $D/Z = T/K$ ve $C/E = H/T$ ilişkileri sağlansın. Bu durumda $(D \times E) = L$ olsun. $(D \times C) = A$ ve $(D \times E) = L$ olduğundan $C/E = A/L$, ayrıca $(E \times D) = L$ ve $(E \times Z) = B$ olduğundan $D/Z = L/B$ olur. Oranlar eşitlenirse önermede öngörüldüğü gibi $H/K = (C/E)\times(D/H)$ ya da $A/B = (C/E)\times(D/Z)$ elde edilir.

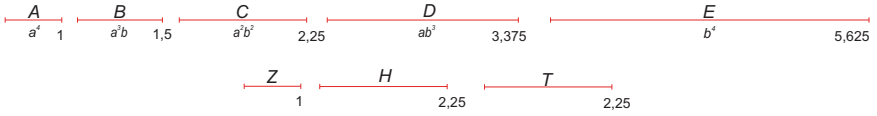


Şekil 5- $A(=2) = D(=1).C(=2)$ ve $B(3) = E(1).Z(3)$ ise $A/B = (C/E)\times(D/Z) = 2/3$

Not: Yukarıda oranların nasıl oluştuğu yeterince açıklığa kavuşturulmuştur. Burada ölçü birimini tanımlamaya gerek duyulmamıştır. Çünkü ölçü birimi tüm sayıların bölenidir.

***VI. Önerme*: Belirli bir orana göre sürekli orantılı çok sayıda ardışık sayı verildiğinde birinci sayı ikincinin böleni olmadığı sürece diğer sayılar da kendilerinden başka diğerlerinin böleni olmaz.**

A, B, C, D ve E belirli bir orana göre sürekli orantılı ardışık sayıları ifade etsin (*Şekil 6*). Ancak A sayısının B sayısını böleni olmasın. Bu durumda sayıların hiçbiri daha sonra gelen sayıların böleni değildir.



Şekil 6- Burada $a = 1$, $b = 1{,}5$, $n = 4$.

Kanıtı: Tanım gereği her sayının kendinden sonraki sayıya olan oranı A/B şeklindedir. Eğer bu sayılardan dolaylı olarak ikisine ilişkin oran, örneğin E/C olarak sadeleştirilirse, geriye yine aynı oran kalır. Eğer C, D, E sayılarının her birinin oranında Z, H ve T sayıları sadeleştirilirse Z ve T sayısı ortak bölensizdir ve $Z = 1$ olmak zorundadır. Çünkü $Z/H = C/E$ ilişkisi geçerlidir. C sayısı D sayısının böleni olmadığına göre Z sayısı H sayısının böleni olamaz. Buna göre 1 (yani birim) başka sayının bölenidir. Şu halde Z sayısı T sayısının da böleni değildir. Oranların eşitliğinden yararlanılırsa

$Z/T = C/E$ olduğundan göstermek istediğimiz gibi C sayısı da E sayısının da böleni olamaz.

***VII. Önerme*: Belirli bir orana göre sürekli orantılı çok sayıda ardışık sayı verildiğinde, eğer birinci sayı sonuncunun bir böleniyse, bu sayı ikinci sayının da bir bölenidir.**

A, B, C ve D belirli bir orana göre sürekli orantılı ardışık sayıları ifade etsin (*Şekil 7*). Eğer A sayısı D sayısının bir böleniyse, bu durumda A sayısı B sayısının da bir bölenidir.

Kanıtı: Eğer A sayısı B sayısının bir böleni değilse, önceki önerme gereği D sayısının da bir böleni olmamalıdır. Bu sonuç ise varsayıma aykırı olduğundan önerme öngörüsünü kanıtlar.

Şekil 7- Burada $A/B = (0{,}75)/(1{,}5) = 0{,}5$; $A/D = (0{,}75)/6 = 0{,}125$.

***VIII. Önerme*: Eğer iki sayı arasında belirli bir orana göre sürekli orantılı ardışık sayılar oluşturulabiliyorsa, bu iki sayıyla orantılı herhangi iki sayı arasında da bu iki sayıyla aynı orantıda sürekli orantılı ardışık sayılar oluşturulabilir.**[1]

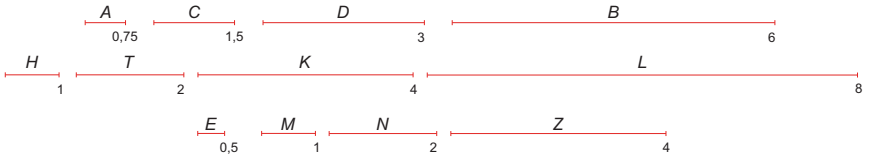
A ve B sayıları arasında bulunan C ve D sayılarıyla birlikte A, C, D ve B sayıları arasında birbiri ardınca A/C oranının geçerli olduğunu varsayalım (*Şekil 8*). Eğer herhangi iki E ve Z sayısı $E/Z = A/B$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda bu sayılarla birlikte A/C oranını sağlayan iki M ve N sayısını da vermek mümkündür.

Kanıtı: A, C, D ve B sayıları ve bunlarla aynı oranda olan H, T, K ve L sayılarını göz önünde bulunduralım. Bu durumda H ve L sayıları ortak bölensiz olur ve $A/B = H/L$ ilişkisi geçerlidir. Eğer $E/Z = H/L$ koşulu sağlanırsa

1 Bu önermede $a/b = e/f$ ilişkisinin geçerliliği varsayıldığında, eğer a, b arasında uygun geometrik orantılı c, d sayıları bulunuyorsa, bu durumda e, f arasında da aynı özellik ve sayıda sayının bulunacağı ifade edilir.

Bunun için aynı oranda en küçük terime kadar inen $a, c, d, \ldots, b$ ve $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \Delta$ sayı dizilerinin verildiğini varsayalım. Bu durumda bölünemeyen sayılar arasında $\alpha/\Delta = a/b = e/f$ ilişkisi geçerlidir. Eğer m bir tam orantı katsayısı olmak üzere $e = m.\alpha$ ve $f = m.\Delta$ sayıları tanımlanırsa, bu durumda a, b sayılarıyla aynı geometrik oranda ve sayıda olan bir $m.\alpha, m.\beta, m.\gamma, \ldots, m.\Delta$ sayı dizisi türetilebilir.

H ve *L* ile *E* ve *Z* sayılarının bölenleri aynı olur. Böylece önermede öngörüldüğü gibi *H*, *T*, *K*, *L* sayılarıyla *E*, *M*, *N*, *Z* sayılarının oranı aynı olur.

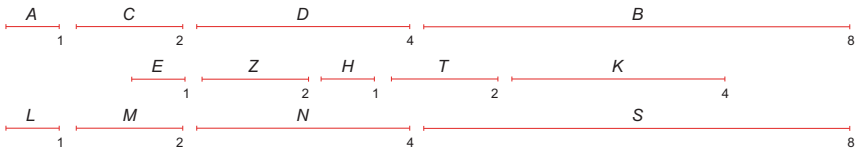


Şekil 8- Burada $A/B = H/L = 1/8$; $E/Z = H/L = 1/8$.

***IX. Önerme*: Eğer ortak bölensiz iki sayı arasında belirli bir orana göre sürekli orantılı bir dizi ardışık sayı türetilmiş ise, bu durumda o sayılardan herhangi biriyle *birim* (*vahid*) arasında da aynı sayıda ardışık sayı türetilebilir.**[1]

Ortak bölensiz *A* ve *B* sayıları arasında belirli bir orana göre ardışık orantılı *C* ve *D* sayılarının bulunduğunu varsayalım (*Şekil 9*). Bu durumda *A*/*C* oranını oluşturan *E* ve *Z* gibi en küçük iki sayıyı, sonra *H*, *T* ve *K* gibi üç sayıyı ve sonra *L*, *M*, *N* ve *S* gibi dört sayıyı oluşturalım. Bu sayılar *A*/*C* oranını oluşturan en küçük sayılar oldukları için, uygun olarak *A*, *C*, *D* ve *B* sayılarına eşittirler.

Kanıtı: Bu durumda $E^2 = H$, $EH = L$ ve $E/1 = H/E = L/H$ ilişkileri geçerli olduğundan *E* ve H sayıları birim ile *A* sayısı arasında uygun orantılı olarak yer alır. Aynı şekilde önermenin öngördüğü şekilde birim ile *B* sayısı arasında *Z* ve *K* sayıları yer alır.



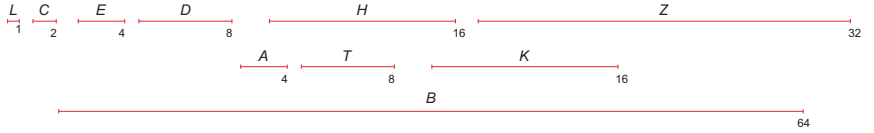
Şekil 9- Burada $A/C = E/Z = 1/2$; $E^2 = H = 1$; $EH = L = 1$; $E/1 = H/E = L/H = 1$; $1 < Z = 2 < K = 4 < B = 8$.

1 Bölünemeyen *a* ve *b* sayıları arasında *n* adet geometrik orantılı ardışık bir sayı dizisinin yer aldığını varsayalım. Bu durumda önerme gereği 1 ile *a* ve 1 ile *b* arasında da aynı n sayıda geometrik orantılı bir sayı dizisi bulunur. Buna göre *a, b* asal sayıları arasındaki geometrik orantılı n adet sayı α ve β sayılarıyla $a = \alpha^{n+1}$ ve $b = \beta^{n+1}$ olmak üzere $\alpha^{n+1}, \alpha^n\beta, \alpha^{n-1}\beta^2, \ldots, \alpha\beta^n, \beta^{n+1}$ şeklinde geometrik ardışık bir dizi oluşturur. Bu durumda $1/\alpha = \alpha/\alpha^2 = \alpha^2/\alpha^3 = \ldots = \alpha^n/\alpha^{n+1}$ ve $1/\beta = \beta/\beta^2 = \beta^2/\beta^3 = \ldots = \beta^n/\beta^{n+1}$ yazılabildiğinden önermede öngörüldüğü gibi 1, a ve 1, b arasında da n adet geometrik orantılı sayı yer alır.

***X. Önerme*: Eğer iki sayının her biriyle *birim* (*vahid*) arasında bir dizi sürekli orantılı ardışık sayı türetilmişse, bu sayılar arasında da aynı sayıda ardışık sayı türetilebilir.[1]**

A ve *B* verilen iki sayı olsun (*Şekil 10*). *A* ile *birim* (*vahid*) arasında *E* ve *C* sayıları bulunduğunu varsayalım. Bu durumda *A*, *E*, *C* ve *L* (= 1) ardışık geometrik bir sayı dizisi oluşturur. Aynı şekilde *B* ile *birim* (*vahid*) arasında *Z* ve *H* sayıları bulunur. Bu durumda da *B*, *Z*, *H* ve *L* (= 1) sayıları ardışık geometrik bir sayı dizisi oluşturur. Bu nedenden dolayı *A* ve *B* arasında ardışık iki sayının bulunması gerekir.

Kanıtı: Bu durumda $L/C = C/E$ ve $L = 1$ olduğundan $E = C^2$, ayrıca $C/L = A/E$ olduğundan $A = CE$, aynı şekilde $Z = D^2$, $B = DZ$ elde edilir. Daha sonra $H = CD$ sayısı türetilir ve *Z*, *H*, *D* sayılarının ardışık oldukları görülür. Son olarak *C* ve *D* sayıları *H* sayısıyla çarpılarak *T* ve *K* sayıları elde edilir. Böylece ardışık *A*, *T*, *K* ve *B* sayıları elde edilir. Zira önermede öngörüldüğü gibi $A = CE$ ve $T = CH$ olduğundan $A/T = E/H$ ya da $A/T = C/D$ ilişkisi yazılabilir. Ayrıca $T = HC$ ve $K = HD$ olduğundan $T/K = C/D$ ve son olarak $K = DH$ ve $B = DZ$ olduğundan $K/B = H/Z$ ya da $K/B = C/D$ ilişkileri geçerlidir.



Şekil 10- Burada $L/C = C/(E = A) = (E = A)/(D = T) = (D = T)/(H = K) = (H = K)/Z = Z/B = 1/2$

***XI. Önerme*: Herhangi iki karesel sayı arasında birbirleriyle uygun orantılı bir sayı daha bulunur. Bir karesel sayının diğerine oranı, sayıların karşılıklı kenar oranının karesine eşittir.[2]**

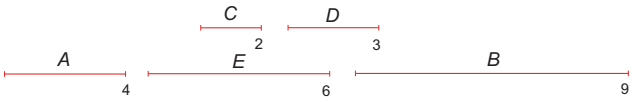
A ve *B* karesel sayılarının verildiğini varsayalım (*Şekil 11*). Bu durumda *C* ve *D* onların kenarları ya da kareköküdür. Bu durumda *A* ve *B* arasında türetilen sayı $E = (C \times D)$ olarak elde edilir.

---

1 Bu önerme öncekinin tersi yönünde bir önermedir. Buna göre $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \alpha^{n+1}$ ve $1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n, \beta^{n+1}$ gibi iki geometrik dizi verildiğinde, $\alpha^{n+1} = a$ *ve* $\beta^{n+1} = b$ alınır ve terimler çaprazlanarak çarpılırsa, $\alpha^{n+1}, \alpha^n\beta, \alpha^{n-1}\beta^2, \ldots, \alpha\beta^n, \beta^{n+1}$ şeklinde *a* ve *b* sayıları arasında n adet geometrik orantılı sayı elde edilir.

2 Eğer a^2 ve b^2 şeklinde iki karesel sayı verilmişse, *ab* çarpımıyla elde edilen a^2, *ab*, b^2 dizisi geometrik artışlı bir dizidir. Bu durumda $a^2/b^2 = (a/b)^2$ *ve* $a^2/ab = ab/b^2$ ilişkilerinin geçerli olduğu açıktır.

Kanıtı: Varsayım gereği $A/E = C^2/(C \times D) = C/D$ ve $E/B = (C \times D)/D^2 = C/D$ yazılabilir. Bu nedenden dolayı E sayısı A ve B sayıları arasında yer alır. Şu halde A, E, B dizisi uygun orantılıdır ve önermenin öngördüğü gibi $A/E = E/B$ ya da $A/B = (C/D)^2$ ilişkisi geçerlidir.



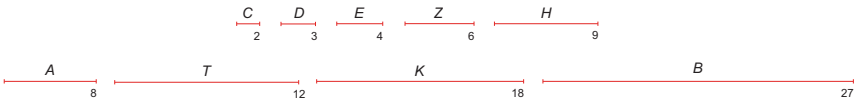
Şekil 11- Burada $A = C^2 = 4$; $B = D^2 = 9$; $E = CD = 6$.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. A ve B sayıları karesel olduklarından her biri ile *birim* (*vahid*) arasında bir sayı daha bulunur. Şu halde bu iki sayı arasında bir sayı daha bulunur ve bu üç sayı ardışık geometrik bir dizi oluşturur.

***XII. Önerme*: Herhangi iki kübik sayının arasında birbirleriyle uygun orantılı iki sayı daha bulunur. Bir kübik sayının diğerine oranı, sayıların karşılıklı kenar oranının küpüne eşittir.**[1]

A ve B verilen kübik sayılar, C ve D ise bu sayıların kenar ya da küp köklerine karşı düşen sayılar olsun (*Şekil 12*). Bu durumda A ve B sayıları arasında A, T, K ve B şeklinde önceki önermede olduğu gibi bir geometrik dizi oluşturan T ve K sayıları türetilebilir.

Kanıtı: Varsayım gereği $A = C^3$, $T = C^2D$, $K = CD^2$, $B = D^3$ ve $E = C^2$, $Z = CD$, $H = D^2$ ardışık geometrik diziler olması gerektiğinden $T = (E \times D) = (Z \times C)$ ve $K = (C \times H) = (Z \times D)$ ifadelerinden türetilebilir. Ayrıca $A/B = (C/D)^3$ ilişkisi geçerlidir.



Şekil 12

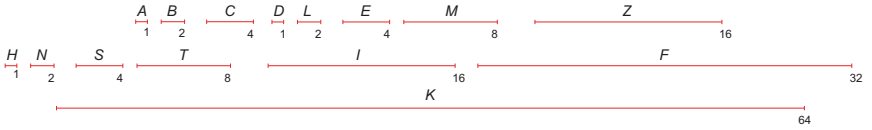
Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. A ve B sayılarının kübik olduklarından her biri ile *birim* (*vahid*) arasında iki sayı daha bulunur. Şu halde bu iki sayı arasında iki sayı daha bulunur ve bu dört sayı ardışık geometrik bir dizi oluşturur.

1 Eğer a^3 ve b^3 şeklinde iki kübik sayı verilmişse, a^2b, ab^2 çarpımlarıyla elde edilen a^3, a^2b, ab^2, b^3 dizisi geometrik artışlı bir dizidir. Bu durumda da $a^3/b^3 = (a/b)^3$ ve $a^3/a^2b = a^2b/ab^2 = ab^2/b^3 = a/b$ ilişkileri geçerlidir.

***XIII. Önerme*: Ardışık bir kuvvet dizisinde bu sayıların kareleri, küpleri ve daha yüksek mertebeden üsleri de ardışık bir kuvvet dizisi oluşturur.**[1]

Ardışık *A*, *B*, *C* kuvvet dizisi verilmiş olsun, bu sayıların *D*, *E*, *Z* kareleri ve *H*, *T*, *K* küpleri de ardışık bir kuvvet dizisi oluşturur (*Şekil 13*).

Kanıtı: Bu durumda $L = (A \times B)$ ve $M = (B \times C)$ olmak üzere *D*, *L*, *E*, *M*, *Z* sayıları ardışık geometrik bir dizi oluşturur. Oranların eşitliği nedeniyle $D/E = E/Z$ yazılabilir. Buna göre kareler ardışıktır. Eğer $N = (A \times L)$, $S = (A \times E)$, $I = (C \times E)$, $F = (C \times M)$ olarak alınırsa elde edilen *H*, *N*, *S*, *T*, *I*, *F*, *K* yedi sayı da $H/T = T/K$ oranlarının eşitliği nedeniyle önermede öngörüldüğü gibi bir ardışık geometrik dizi oluşturur.



Şekil 13- Burada $D/E = E/Z = ¼$; $H/T = T/K = 1/8$.

***XIV. Önerme*: Herhangi iki karesel sayıdan biri diğerinin böleniyse, bu durumda birinin kenarı da diğerinin bölenidir. Bunun tersi de doğrudur: Bir sayı bir diğer sayının böleniyse bu sayının karesi de diğer sayı karesinin bölenidir.**

Eğer $A = C^2$ karesel sayısı $B = D^2$ karesel sayısını bölerse, *C* kenar sayısı da *D* kenar sayısını böler (*Şekil 14*).

Kanıtı: Eğer $E = (C \times D)$ alınırsa *C*, *A*, *B* sayıları C/D oranını sağlayan bir ardışık geometrik dizi oluşturur. Buna göre *A* sayısı *B* sayısını böldüğüne göre, *E* sayısını da böler. Şu halde *C* sayısı da *D* sayısını da böler. Diğer taraftan eğer *C* sayısı *D* sayısını bölerse *A* sayısı da *E* sayısını böler.

Şekil 14- Burada $B/A = 4$; $D/C = 2$.

1 Eğer *a, b, c, …* artan bir geometrik kuvvet serisi oluşturuyorsa, bu durumda $a^2, b^2, c^2, \ldots$ ve $a^3, b^3, c^3, \ldots$ de artan geometrik dizi oluşturur. Genelleştirilirse $a^n, b^n, c^n, \ldots$ dizisinde a^n ve b^n arasında oranı a/b olan, b^n ve c^n arasında oranı b/c olan vs. her biri $(n+1)$ elemanlı geometrik diziler oluşturulabilir. Bu durumda $a^n/b^n = b^n/c^n = c^n/d^n = \ldots$ ilişkisi geçerlidir.

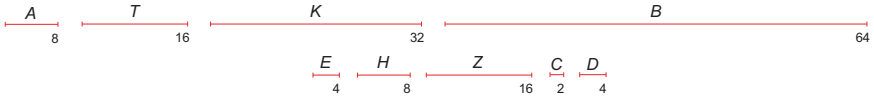
Buradan bir karesel sayı bir diğer karesel sayının böleni değilse onun kenarı da diğerinin böleni olamayacağı sonucu çıkar. Aksine bir sayı başka bir sayının böleni değilse bu sayıların kareleri de birbirlerinin böleni olamaz.

***XV. Önerme*: Herhangi iki kübik sayıdan biri diğerinin böleniyse, bu durumda birinin kenarı da diğerinin bölenidir. Bunun tersi de doğrudur: Bir sayı bir diğer sayının böleniyse bu sayının küpü de diğer sayı küpünün bölenidir.**

Eğer $A = C^3$ kübik sayı $B = D^3$ kübik sayıyı bölerse, C kenar sayısı da D kenar sayısını böler (*Şekil 15*).

Kanıtı: C ve D kenar sayılarından $E = C^2$, $H = (C \times D)$ ve $Z = D^2$ olmak üzere E, H, Z ardışık geometrik dizi elde edilir. Aynı şekilde $T = (C \times H)$ ve $K = (D \times H)$ ile Z/C oranını sağlayan A, T, K, B ardışık geometrik dizi bulunur. Varsayım gereği bu dizinin ilk sayısı A son sayı B sayısını böler. Bu nedenden dolayı A sayısı T sayısını da böler. Diğer taraftan eğer C sayısı Z sayısını bölerse, A sayısı da T sayısını böler. Böylece A sayısı B sayısının böleni olur.

Şu halde bir kübik sayı başka bir kübik sayıyı bölmezse, onların kenarları da birbirlerini bölmez. Tersine eğer bir sayı bir diğerinin böleni değilse bu sayıların küpleri de birbirini bölmez.



Şekil 15- Burada $D/C = 2$; $Z/E = 4$; $B/A = D^3/C^3 = 64/8 = 8$.

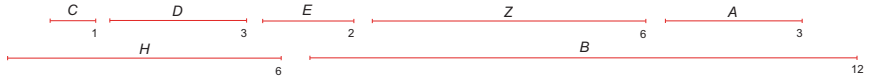
Not: Bu önermeler farklı yerlerde farklı şekillerde tanımlanır ve sunulur.[1] Biz burada Sâbit'in verdiği şekli benimsedik. Buna karşın Haccâc *11* ve *12. Önerme*leri *11. Önerme* olarak verir. Buradaki *13. Önerme* Haccâc'a göre *12. Önerme*dir. Haccâc ayrıca *13* ve *14. Önermelere* bizim *14* ve *15. Önerme*lerin başlangıcında verdiğimiz hükümleri de katar. Haccâc *15. Önerme*de önceki önermelerde verilen ilaveleri dâhil eder. Bundan sonraki önermelerde bir değişiklik yoktur.

1 Tûsî 8. Makalede *15. Önermeye* kadar Öklid'in eserindeki özgün sıralamayı izler.

***XVI. Önerme*: Benzer herhangi iki düzlemsel sayı arasında başka bir düzlemsel ardışık sayı daha vardır, öyle ki düzlemsel sayılardan birinin öbürüne oranı, düzlemsel sayılardaki uygun kenarlar oranının karesine eşittir.**[1]

Benzer iki düzlemsel sayının $A = (C \times D)$ ve $B = (E \times Z)$ olarak verilmiş olduğunu varsayalım (*Şekil 16*). Düzlemsel sayıların benzerlik koşulu nedeniyle $C/E = D/Z$ ilişkisi geçerlidir. Eğer A ve B sayıları arasında yer alan üçüncü düzlemsel sayı $H = (D \times E)$ olarak tanımlanırsa, bu durumda $A/B = (A/H)^2 = (C/E)^2$ ilişkileri geçerlidir.

Kanıtı: Bu durumda A, H, B düzlemsel sayıları uygun orantılıdır: $A = (C \times D)$ ve $H = (D \times E)$ olduğuna göre $A/H = C/E$ yazılabilir. Ayrıca $H = (D \times E)$ ve $B = (E \times Z)$ olduğuna ve benzerlik koşulu nedeniyle $H/B = D/Z = C/E$ yazılabilir. Şu halde $A/B = (C \times D)/(E \times Z) = (C/E)\times(D/Z) = (C/E)^2 = (H/B)^2$ bulunur. Ayrıca $(Z \times C) = (D \times E)$ olduğundan $(A\times B) = (C \times D) \times (E \times Z) = (D \times E)^2 = H^2$ ya da $A/H = H/B$ ve neticede önermede öngörüldüğü gibi $A/B = (C/E)^2 = (H/B)^2 = (A/H)^2$ olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 16- Burada $A = (C \times D) = 3$; $B = (E \times Z) = 12$ ve $H = (D \times E) = 6$; $A/B = (C/E)^2 = (H/B)^2 = (A/H)^2 = ¼$.

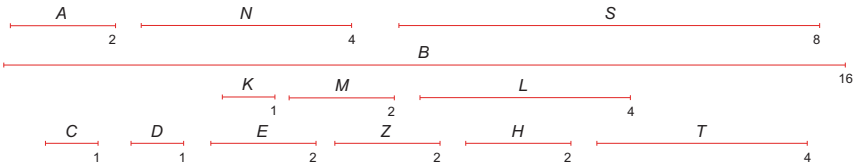
***XVII. Önerme*: Benzer herhangi iki prizmatik sayı arasına ardışık orantılı iki sayı tanımlanabilir, bu durumda prizmatik sayıların oranı uygun kenarların küpüyle orantılıdır.**[2]

Benzer prizmatik iki sayının $A = (C \times D \times E)$ ve $B = (Z \times H \times T)$ şeklinde verildiğini varsayalım (*Şekil 17*). Prizmatik sayıların benzerliği nedeniyle $C/Z = D/H = E/T$ oranları geçerlidir. $K = (C \times D)$ ve $L = (Z \times H)$ iki benzer düzlemsel sayı ve bunların arasında bir M sayısıyla birlikte K, M, L ardışık sayılarının C/Z oranını gerçeklediğini varsayalım. Bu durumda prizmatik sayıların oranı önceki önermeye benzer şekilde $A/B = (A/N)^3 = (C/Z)^3$ ilişkisini sağlar.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *18. Önermeye* karşı düşer.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *19. Önermeye* karşı düşer.

Kanıtı: Eğer $N = (E \times M)$ ve $S = (T \times M)$ olarak tanımlanırsa $N/S = (E \times M)/(T \times M) = E/T$, benzerlik nedeniyle $N/S = C/Z$ olduğu görülür. Ne var ki $A/N = (C \times D \times E)/(E \times M) = (C \times D)/M = K/M = C/Z$ olması gerekir. Benzer şekilde $S/B = (T \times M)/(Z \times H \times T) = M/(Z \times H) = M/L = C/Z$ olmalıdır.

Buna göre A, N, S, B dizisi ardışık C/Z oranını sağlayan sayılardan oluşur. Şu halde prizmatik sayılar oranlanırsa, önermede öngörüldüğü gibi $A/B = (C \times D \times E)/(Z \times H \times T) = (C/Z) \times (D/H) \times (E/T) = (C/Z)^3 = (A/N)^3$ olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 17- A = $(C \times D \times E) = 2$; $N = (E \times M) = 4$; $S = (T \times M) = 8$ ve $B = (Z \times H \times T) = 16$; $A/B = (C/Z)^3 = (A/N)^3 = 1/8$.

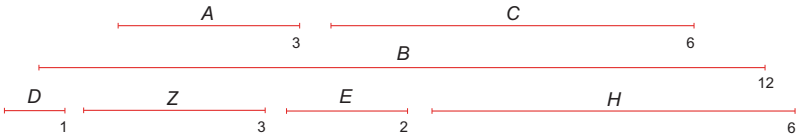
***XVIII. Önerme*: Eğer iki sayı aralarındaki başka bir sayıyla ardışık bir geometrik dizi oluşturuyorsa, bu sayılar benzer düzlemsel sayılardır.**[1]

A ve B sayılarının arasında bulunan C sayısıyla bir ardışık geometrik dizi oluşturduğunu varsayalım. Bu durumda bunlar benzer iki düzlemsel sayıdır (*Şekil 18*).

Kanıtı: Bunun için ilkin A ve B sayılarıyla ardışık bir geometrik dizi oluşturan C sayısıyla $A/D = C/E$ şeklinde aynı oranı sağlayan en küçük D ve E sayıları belirlenir. Bu durumda eğer $Z = A/D$, $C/D = B/E$, $B/E = H$ olarak tanımlanırsa $A = (D \times Z)$ ve $B = (E \times H)$ ifadelerinden bu sayıların düzlemsel, ayrıca $C = (D \times B)/E = (D \times H)$ yazılabildiğine göre A, C ve B sayılarının benzer düzlemsel sayılar oldukları kanıtlanmış olur.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *20. Önermeye* karşı düşer.

Bu önerme 16. Önermenin tersidir ve *a, b, c* ardışık geometrik artan bir dizi oluşturması halinde *a* ve *b* sayılarının benzer dörtgen sayılar olduğunu ifade eder. Bunun için $\alpha/\beta = a/c = c/b$ oranlarının en düşük terimde gerçekleşmesini sağlayalım. Bu durumda m ve n birer tamsayı olmak üzere $a = (m.\alpha)$, $c = (m.\beta)$ ve $c = (n\,\alpha)$, $b = (n.\beta)$ ifadeleri sağlanır ve *a* ve *b* sayıları iki çarpana bağlı hale gelir. Bu durumda $\alpha/\beta = a/c = c/b = m/n$ ya da $\alpha/m = \beta/n$ yazılabilir. Şu halde $a = (m.\alpha)$ ve $c = (m.\beta)$ benzer dörtgen sayılardır.

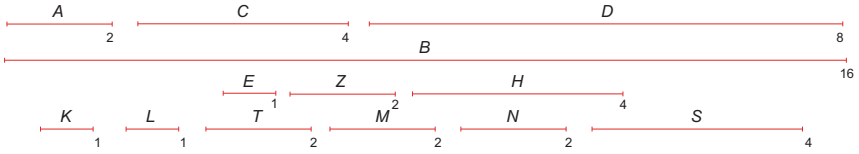


Şekil 18- Burada $A = (D \times Z) = 3$; $C = (D \times H) = 6$ ve $B = (E \times H) = 12$.

***XIX. Önerme*: Eğer iki sayı aralarındaki başka iki sayıyla ardışık bir geometrik dizi oluşturuyorsa, bu sayılar benzer prizmatik sayılardır.**[1]

A ve *B* sayılarının arasındaki *C* ve *D* sayılarıyla ardışık bir geometrik dizi oluşturduğunu varsayalım, bu durumda bu iki sayı benzer iki prizmatik sayıdır (*Şekil 19*).

Kanıtı: Bunun için ilkin *A* ve *B* sayılarıyla ardışık bir geometrik dizi oluşturan *C* ve D sayılarıyla aynı A/C oranını sağlayan en küçük ardışık *E*, *Z* ve *H* sayıları belirlenir. Bu durumda *E*, *H* sayıları benzer prizmatik sayılara karşı düşer ve $K/M = L/N = E/Z$ oranları geçerlidir. Varsayım gereği *E*, *Z*, *H* sayıları *A*, *C*, *D* sayılarıyla uygun orantılı olduğundan bu sayılar ardışık olarak aynı oranı sağlar. Şu halde $A = (E \times T) = (K \times L \times T)$ ve $B = (H \times S) = (M \times N \times S)$ yazılabildiğinden *A* ve *B* sayıları prizmatiktir. Ayrıca $D = (T \times H)$, $B = (H \times S)$ olduğundan $D/B = T/S$ ve benzer şekilde $T/C = L/N$, $T/S = K/M$ olduğundan *A* ve *B* sayıları benzer prizmatik sayılardır.



Şekil 19- Burada $A = (E \times T) = (K \times L \times T) = 2$ ve $B = (H \times S) = (M \times N \times S) = 16$.

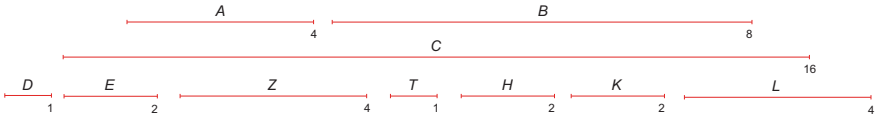
***XX. Önerme*: Bir geometrik dizi oluşturan ardışık üç sayıdan birincisi karesel bir sayıysa üçüncüsü de karesel bir sayıdır.**[2]

Eğer ardışık geometrik bir dizi oluşturan *A*, *B*, *C* sayılarından *A* sayısı karesel bir sayıysa *C* sayısı da kareseldir (*Şekil 20*).

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *21. Önermeye* karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *22. Önermeye* ve *20. Önermede* (Tûsî'de *18. Önermenin*) sayılardan ilkinin karesel olması özel haline karşı düşer.

Kanıtı: İlkin bu üç sayıyla aynı oranda olan en küçük *D*, *E* ve *Z* ardışık geometrik sayı dizisi oluşturulur. Varsayım gereği burada *D* ve önerme gereği *Z* sayısı da kareseldir. *A* sayısı kenarının *H*, *D* sayısı kenarının *T*, *Z* sayısı kenarının *K* olduğunu varsayalım. Oranları eşitliği nedeniyle $D/Z = A/C$ geçerlidir. Ayrıca *D* ve *Z* sayılarının ortak böleni bulunmadığından *A* ve *C* sayıları bunların bölenleridir. Buna göre *T* sayısı *E* sayısının böleni olduğundan *K* sayısı da *H* sayısının bölenidir. *L* sayısı *C* sayısının kenarı olmak üzere $T/H = K/L$ ya da $T^2/H^2 = K^2/L^2$ ilişkisi geçerlidir. Varsayım gereği $T^2 = D$, $H^2 = A$, $K^2 = Z$ olmalıdır. Bu durumda $D/A = Z/C$ olur ve önermede öngörüldüğü gibi *C* sayısı *L* sayısının karesine eşit olur.



Şekil 20- Burada $A = H^2 = 4$ ve $C = L^2 = 16$.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek kanıtlanabilir. *A* sayısı ile *C* sayısı arasında *B* sayısının yer alması ve bu üç sayının bir ardışık geometrik dizi oluşturması nedeniyle *18. Önerme* gereği *A* ve *C* sayıları benzer düzlemsel sayılardan oluşur. Bu durumda *A* sayısının varsayım gereği karesel olması *C* sayısının da karesel olmasını zorunlu kılar.

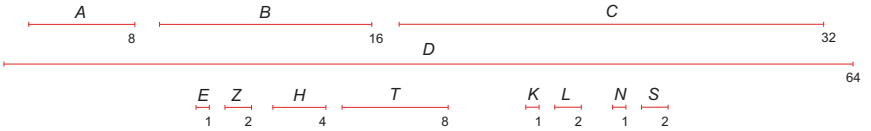
***XXI. Önerme*: Bir geometrik dizi oluşturan ardışık dört sayıdan birincisi kübik bir sayıysa dördüncüsü de kübik bir sayıdır.**[1]

Eğer ardışık geometrik bir dizi oluşturan *A*, *B*, *C*, *D* sayılarından *A* sayısı kübik bir sayıysa *D* sayısı da kübik bir sayıdır (*Şekil 21*).

Kanıtı: İlkin bu üç sayıyla aynı oranda olan en küçük *E*, *Z*, *H* ve *T* ardışık geometrik sayı dizisi oluşturulur. Varsayım gereği burada *E* ve önerme gereği *T* sayısı da kübiktir. *A* sayısı kenarının *L*, *E* sayısı kenarının *K*, *T* sayısı kenarının *L* olduğunu varsayalım. Oranları eşitliği nedeniyle $E/T = A/D$ geçerlidir. Ayrıca *E* ve *T* sayılarının ortak böleni bulunmadığından *A* ve *D* sayılarının bölenleridir. Buna göre kübik sayı olan *E* kübik sayı olan *A* sayısının böleni olduğundan, *K* kenarı da *L* kenarının böleni olmalıdır. *N*

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *23. Önermeye* ve *20. Önermede* (Tûsî'de *19. Önermenin*) sayılardan ilkinin kübik olması özel haline karşı düşer.

sayısı *S* sayısının böleni olduğu ölçüde *K* sayısı da *L* sayısının bölenidir. Bu durumda $N/S = K/L$ ya da $N^3/S^3 = K^3/L^3$ ilişkisi geçerlidir. Varsayım gereği $K^3 = E$, $S^3 = T$, $N^3 = K$ olmalıdır. Bu durumda $E/A = T/D$ olur ve önermede öngörüldüğü gibi *D* sayısı *S* sayısının küpüne eşit olur.



Şekil 21- Burada $A = 2^3 = 8$; $B = 16$; $C = 32$ ve $D = 4^3 = 64$.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir. *A* sayısı ile *D* sayısı arasında *B* ve C sayılarının yer alması ve bu dört sayının bir ardışık geometrik dizi oluşturması nedeniyle *19. Önerme* gereği *A* ve *D* sayıları benzer prizmatik sayılardır. Bu özel varsayım gereği *A* sayısının kübik olması *D* sayısının da kübik olmasını zorunlu kılar.

***XXII. Önerme*: Eğer iki karesel sayıyla orantılı olan iki sayıdan biri karesel bir sayıysa diğeri de karesel bir sayıdır.**[1]

Eğer $A/B = C/D$ oranı geçerli ve *C*, *D*, *A* sayıları karesel sayılarsa, bu durumda *B* sayısı da kareseldir (*Şekil 22*).

Kanıtı: *C* sayısıyla *D* sayısı karesel sayılar olduklarına göre onların arasında başka bir sayı bulunmalı ve bunların üçü de ardışık geometrik bir dizi oluşturmalıdır. Aynı nedenden *A* sayısıyla *B* sayısı arasında da bir üçüncü sayı bulunması gerekir. Önceki önermeler gereği *A* sayısı karesel olduğuna göre *B* sayısı da önermede öngörüldüğü üzere karesel bir sayı olmalıdır.

Şekil 22- Burada $A(2^2 = 4)/B(3^2 = 9) = C(4^2 = 16)/D(6^2 = 36)$.

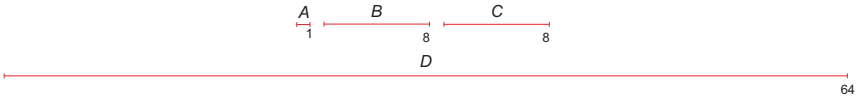
***XXIII. Önerme*: Eğer iki kübik sayıyla orantılı olan iki sayıdan biri kübik bir sayıysa diğeri de kübik bir sayıdır.**[2]

Eğer $A/B = C/D$ oranı geçerli ve *C*, *D*, *A* sayıları kübik sayılarsa, bu durumda *B* sayısı da kübik bir sayıdır (*Şekil 23*).

Kanıtı: *C* sayısıyla *D* sayısı kübik sayılar olduklarına göre onların

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *24. Önermeye* karşı düşer.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *25. Önermeye* karşı düşer.

arasında başka iki sayı bulunmalı ve bunların dördü de ardışık geometrik bir dizi oluşturmalıdır. Aynı nedenden *A* sayısıyla *B* sayısı arasında da iki sayı bulunması gerekir. Önceki önermeler gereği *A* sayısı kübik olduğuna göre *B* sayısı da önermede öngörüldüğü üzere kübik bir sayı olmalıdır.



Şekil 23- Burada $A(1^3 = 1)/B(2^3 = 8) = C(2^8 = 8)/D(4^3 = 64)$.

***XXIV. Önerme*: İki karesel sayıyla orantılı herhangi iki sayı benzer düzlemsel iki sayıdır.**[1]

Karesel *C* ve *D* sayıları arasında bulunan bir diğer sayıyla birlikte ardışık bir geometrik dizi elde edilir. Bu sayılarla orantılı *A* ve *B* sayıları arasında da bir üçüncü sayı mevcuttur ve önceki önermeler gereği *A* ve *B* sayıları, önermede öngörüldüğü gibi iki benzer düzlemsel sayıya karşı düşer (*Şekil 24*).

Şekil 24- Burada $A = 2^2 = 4$; $B = 4^2 = 16$; $C = (2 \times 4) = 8$; $D = (4 \times 8) = 32$.

***XXV. Önerme*: İki kübik sayıyla orantılı herhangi iki sayı benzer prizmatik iki sayıdır.**[2]

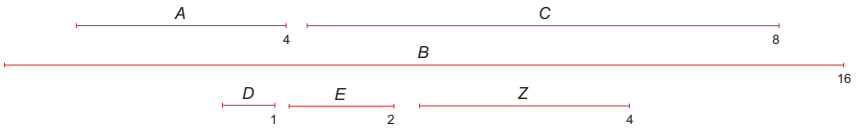
Bu önermenin açıklaması ve kanıtı önceki önermede olduğu gibidir.

Not: Bu iki önerme Haccâc nüshasında bulunmamaktadır.

***XXVI. Önerme*: İki benzer düzlemsel sayı iki karesel sayıyla orantılıdır.**[3]

Benzer *A* ve *B* düzlemsel sayıları arasında *C* sayısı bulunur ve bu üçü sayı ardışık bir geometrik dizi oluşturur (*Şekil 25*). Eğer bu sayılarla aynı oranda *D*, *E* ve *Z* gibi üç adet sayı oluşturulursa $A/B = D/Z$ ilişkisi geçerli olur. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi *D* ve *Z* karesel sayılardır.

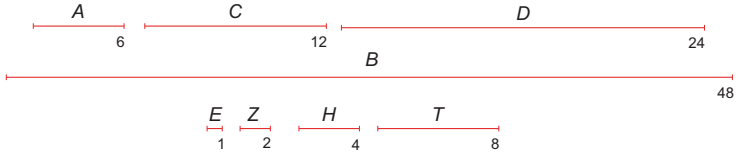
1 Bu önerme *18. Önermeye* eşdeğerdir Öklid'in özgün eserindeki *20. Önermeye* karşı düşer.
2 Bu önerme *19. Önermeye* eşdeğerdir ve Öklid'in özgün eserindeki *21. Önermeye* karşı düşer
3 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *26. Önermeye* karşı düşer.



Şekil 25- Burada $A[(1 \times 4) = 4]/B[(2 \times 8) = 16] = D\,(1^2 = 1)/Z(2^2 = 4) = 1/4$.

***XXVII. Önerme*: İki benzer prizmatik sayı iki kübik sayıyla orantılıdır.**[1]

Benzer *A* ve *B* prizmatik sayıları arasında *C* ve *D* sayıları bulunduğunu ve bu dört sayı ardışık bir geometrik dizi oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 26*). Eğer bu sayılarla aynı oranda *E*, *Z*, *H* ve *T* gibi dört adet en küçük sayı oluşturulursa $A/B = E/T$ ilişkisi geçerli olur. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi *E* ve *T* kübik sayılardır.



Şekil 26- Burada $A[(1 \times 2 \times 3) = 6]/B[(2 \times 4 \times 6) = 48] = E\,(1^3 = 1)/T(2^3 = 8) = 1/8$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *27. Önermeye* karşı düşer.

DOKUZUNCU MAKALE

Bu makale 38 önermeden oluşur.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Eğer bir düzlemsel sayı benzer başka bir düzlemsel sayıyla çarpılırsa, bir karesel sayı elde edilir.**[1]

A ve *B* sayılarının benzer iki düzlemsel sayı olduğu varsayılırsa, bu durumda (*A* × *B*) = *C* bir karesel sayıdır (*Şekil 1*).

Kanıtı: Önerme gereği *D* = (*A* × *A*) olduğunu varsayalım, bu durumda *A*/*B* = *D*/*C* ilişkisi yazılabilir. Ancak *A* ve *B* sayıları benzer olduğundan, *D* ve *C* sayılarının da benzer olması gerekir. Buna göre *D* bir karesel sayı olduğundan *C* de bir karesel sayı olmak zorundadır.

Şekil 1- Burada *A*[= (1 × 2) = 2] × *B*[= (2 × 4) = 8] = *D* = 4^2 = 16; *A*/*B* = *D*/*C* = 1/4.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır: Benzer *A* ve *B* sayıları birbirlerine bir katsayı çarpanıyla eşittir. Bu durumda (*A* × *B*) çarpımı da *A* sayısının karesiyle aynı katsayıyla orantılı olduğundan, çarpımın kendisi de bir karesel sayı olmalıdır.

***II. Önerme*: Eğer bir sayı bir diğeriyle çarpıldığında bir karesel sayı elde ediliyorsa bu durumda çarpılan bu sayılar benzer iki düzlemsel sayıdır.**[2]

Eğer (*A* × *B*) = *C* çarpımı bir karesel sayıysa, bu durumda *A* ve *B* sayıları benzer birer düzlemsel sayıdır (*Şekil 2*).

Kanıtı: Eğer *D* = (*A* × *A*) ise bu durumda *D*/*C* = *A*/*B* olacağı açıktır. Şu halde *A* ve *B* sayıları birer benzer düzlemsel sayıdır.

---

1 Eğer *a* ve *b* benzer (*a* = *m* × *b*) iki düzlemsel sayı olduğu varsayılırsa, $a/b = a^2/ab = a^2/mb^2 = m$ ilişkileri yazılabilir.

2 Bu önerme 1. Önermenin tersi niteliğindedir.

Şekil 2- $(A \times B) = (2 \times 8) = D = 16 = 4^2$; $A = 2 = (1 \times 2)$ ve $B = 8 = (2 \times 4)$.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır: $(A \times B) = C$ çarpımı bir karesel sayı ve bu üç sayı birbirine uygun orantıda olduğuna göre A ve B sayıları da iki benzer düzlemsel sayıdır.

Buradan temel kural türetilebilir: karesel bir sayının karesel bir sayıyla çarpımı kareseldir. Karesel sayının karesel olmayan bir sayıyla çarpımından elde edilen sayı karesel değildir. Karesel bir sayı herhangi bir sayıyla çarpıldığında karesel bir sayı elde edilirse çarpılan sayı da kareseldir. Eğer çarpım karesel değilse, bu durumda çarpan sayı da karesel değildir.

***III. Önerme*: Kübik sayının karesi bir kübik sayıdır.**[1]

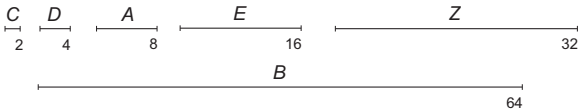
Eğer A kübik bir sayıysa bu durumda $A^2 = B$ sayısı da kübik bir sayıdır (*Şekil 3*).

Kanıtı: Önerme gereği C sayısı A sayısının bir kenarı ve D sayısının da C sayısının karesi olduğunu varsayalım. Bu durumda A ile *birim* (*vahid*) ve D ile C sayıları uygun orantılı olması gerektiğinden $1/A = A/B$ ilişkisi geçerlidir. Şu halde *8. Makale 21. Önerme* gereği A ve B sayıları arasında orantılı iki sayı daha vardır ve bu dördü ardışık bir geometrik dizi oluşturur. Önerme gereği A sayısı kübik olduğundan B sayısı da kübik olmak zorundadır.

Şekil 3- Burada $A = C^3 = 2^3 = 8$; $B = A^2 = 8^2 = 64 = 2^3$.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Önerme gereği C sayısı $A = C^3$ kübik sayısının kenarı ve $B = A^2$ olması gerekir. Bu durumda eğer $E = (A \times C)$ ve $Z = (A \times D)$ olarak tanımlanırsa, $E/C = Z/D$ benzerlik koşulu nedeniyle E ve Z sayıları A ve B sayılarının arasında yer alırlar (*Şekil 4*). Şu halde C, D, A, E, Z ve B sayıları ardışık bir geometrik dizi oluşturur. Neticede A sayısı kübik olduğundan B sayısı da kübik olmak zorunluluğundadır.

1 Bu önerme $a^3.a^3 = a^{2.3} = (a^2)^3$ anlamına gelir.

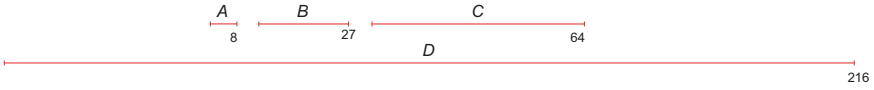


Şekil 4- Burada $C = 2$; $D = 2^2 = 4$; $A = 2^3 = 8$; $E = 2^4 = 16$; $Z = 2^5 = 32$ ve $B = 2^6 = 64 = 4^3$.

***IV. Önerme*: Kübik sayının bir kübik sayıyla çarpılması halinde bir kübik sayı elde edilir.**[1]

Eğer A ve B sayılarının kübik olduğu varsayılırsa, bunların çarpımı $C = (A \times B)$ olan C sayısı da kübik bir sayıdır (*Şekil 5*).

Kanıtı: Varsayım gereği A kübik olduğundan $D = A^2$ sayısı da kübik olmalıdır. Eğer A/B oranı A sayısıyla çarpılırsa $A/B = A^2/(A \times B) = D/C$ yazılabildiğinden A, B ve D, C sayılarının benzer olduğu görülür. Şu halde D sayısı kübik olduğundan C sayısı da kübik olmalıdır.



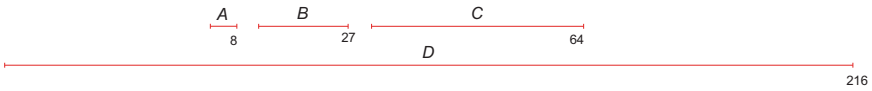
Şekil 5- $C = (A \times B) = (2^3 \times 3^3) = (8 \times 27) = 216 = 6^3$.

***V. Önerme*: Bir sayı bir kübik sayıyla çarpıldığında kübik bir sayı elde ediliyorsa çarpılan sayı da kübik bir sayıdır.**

Eğer bir $C = (A \times B)$ çarpımında A ve C sayıları kübikse B sayısı da kübiktir (*Şekil 6*).

Kanıtı: Bir önceki önermede olduğu gibi bir $D = A^2$ sayısı tanımlanırsa, varsayım gereği A sayısı kübik olduğundan D sayısı da kübiktir ve $A/B = D/C$ ilişkisi geçerlidir. Şu halde A, C, D sayıları kübik olduğundan B sayısı da kübik olmalıdır. Bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız husustur. Böylece kübik bir sayı kübik olmayan bir sayıyla çarpıldığında sonucun kübik olmayan bir sayı; tam tersine kübik bir sayı başka bir sayıyla çarpıldığında sonuç kübik olmayan bir sayı ise çarpılan sayının da kübik olmayan bir sayı olduğu açığa çıkmış oldu.

1 Bu önerme $a^3.b^3 = (ab)^3$ anlamına gelir.

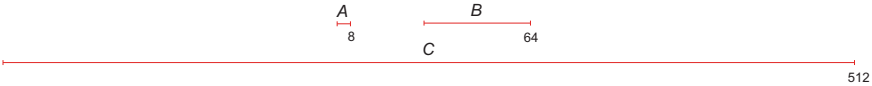


Şekil 6- $(A \times B) = (2^3 \times 3^3) = (8 \times 27) = 216 = 6^3 = C$.

***VI. Önerme*: Bir sayının karesi kübik bir sayıysa kendi de kübik bir sayıdır.**[1]

Eğer B kübik bir sayı olmak üzere $B = A^2$ ilişkisi geçerliyse, bu durumda A sayısı da kübik bir sayıdır (*Şekil 7*).

Kanıtı: Varsayım gereği $B = A^2$ olduğuna göre $C = (A \times B)$ sayısı kübik bir sayıdır. Bu ilişkilerden $A/B = 1/A = B/C$ yazılabildiğine, B ve C sayıları kübik olduğuna göre, A sayısı da önermede öngörüldüğü gibi kübik bir sayı olmak zorunluluğundadır.



Şekil 7- Burada $B = A^2 = 8^2 = 64 = 4^3$; $A = 8 = 2^3$.

***VII. Önerme*: Bir *bileşik* (*mürekkep*) sayı başka bir sayıyla çarpılırsa prizmatik bir sayı elde edilir.**[2]

Önermede A sayısı bir bileşik sayı olduğu varsayıldığına göre $A/D = E$ ya da $A = (D \times E)$ yazılabilir (*Şekil 8*). Bu durumda A sayısı bir B sayısıyla çarpıldığında $C = (A \times B) = (D \times E \times B)$ elde edileceğinden önermede öngörüldüğü gibi prizmatik bir sayı elde edilmiş olur.

Şekil 8- $A = (D \times E) = (2 \times 3) = 6$; $C = (A \times B) = (D \times E \times B) = (2 \times 3 \times 5) = 30$.

***VIII. Önerme*: *Birim*le (*vahid*) başlayan geometrik ardışık bir sayı dizisinde:**

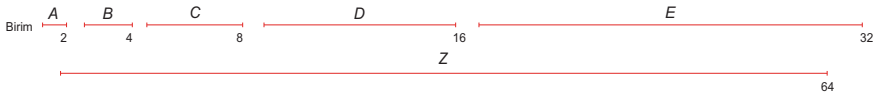
1. **Üçüncü, beşinci, yedinci vs. aralarında bir fark bulunan sayılar karesel;**

1 Bu önerme $(a^3)^2 = (a^2)^3$ anlamına gelir.

2 Daha önce tanımlanmamış olan bileşik (mürekkep) sayı tekil olmayan, diğer bir deyişle başka bir sayıya bölünebilen bir sayıdır. Buna göre önerme (Bileşik sayı) × (Sayı) = (Prizmatik sayı) ya da $[(a \times b) \times c] = (a \times b \times c)$ anlamına gelir.

2. Dördüncü, yedinci vs. aralarında iki fark bulunan sayılar kübik;
3. Yedinci (ve aralarında beş fark bulunan sayılar) küpün karesidir.

*Birim*den (*vahid*) sonra gelen sayıları *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ve *Z* olarak adlandırmış olalım (*Şekil 9*). Bu durumda:



Şekil 9- Burada $B = A^2 = 4$; $C = A^3 = 8$; $D = B^2 = 16$; $Z = C^2 = (A^3)^2 = 64$.

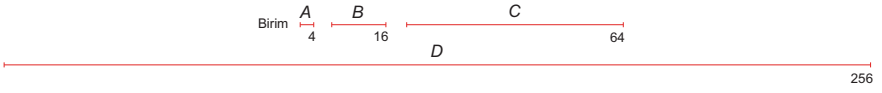
1- $1/A = A/B$ ya da $B = A^2$ olduğundan *B* sayısı kareseldir. Aynı şekilde $1/B = B/D$ ya da $D = B^2$ olduğundan *D* sayısı da kareseldir. Bu yöntemle *Z* sayısının da karesel olduğunu göstermek mümkündür.
2- $C = (A^2 \times A) = A^3$ olduğundan *C* sayısı kübiktir. Aynı nedenden $1/C = C/E$ ya da $Z = C^2$ olduğundan *Z* sayısı kübiktir.
3- *Z* sayısı aynı zamanda küpün karesidir.

***IX. Önerme*: *Birim*le (*vahid*) başlayan geometrik ardışık bir sayı dizisinde ikinci sayı karesel ya da kübikse müteakip tüm sayılar karesel ya da kübik sayılardan oluşur.**[1]

Sayıları *A*, *B*, *C* ve *D* olarak verildiğini ve *A* sayısının karesel olduğunu varsayalım (*Şekil 10*). Bu durumda *B*, *C* ve *D* sayıları da kareseldir.

Kanıtı: *B* sayısı *birim*le (*vahid*) başlayan dizinin üçüncü sayısı olduğundan kareseldir. Diğer taraftan geometrik dizilerde $A/B = B/C$ orantısı geçerlidir. Koşul gereği *A* ve *B* sayıları karesel olduğundan *C* sayısı da kareseldir.

Diğer taraftan *C* sayısı *birim*le (*vahid*) başlayan dizinin dördüncü sayısı olduğundan kübiktir. Bu durumda geometrik dizi nedeniyle $A/B = B/C = C/D$ orantıları geçerli olmalıdır. Koşul gereği *A* ve *C* sayıları kübik olduğunda önermede öngörüldüğü gibi *B* ve *D* sayıları da kübiktir.

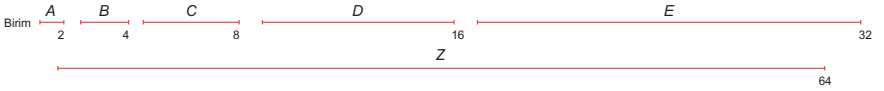


Şekil 10- Burada $A = 2^2 = 4$; $B = 4^2 = 16$; $C = 8^2 = 4^3 = 64$; $D = 16^2 = 256$.
Eğer $A = 2^3 = 8$ ise $B = 4^4 = 16^3 = 4.096$; $C = 8^5 = 32^3 = 32.768$; $D = 16^6 = 64^4 = 16.777.216$.

1 Bu önerme sayı dizilerinin $1, a^2, a^4, a^6, \ldots, a^{2n}$ karesel ya da $1, a^3, a^6, a^9, a^{12}, \ldots, a^{3n}$ şeklinde kübik olduğu anlamına gelir.

***X. Önerme*: Eğer *Birim*le (*vahid*) başlayan geometrik ardışık bir sayı dizisinde birden sonraki ilk sayı karesel ya da kübik değilse (1 dikkate alınmamak koşuluyla) her ikinci sayı karesel ve üçüncü sayı kübiktir.**

Eğer *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z* sayı dizisinde *A* sayısının karesel olmadığı varsayılırsa *C* sayısı karesel değildir (*Şekil 11*). Aksi halde eğer *C* sayısı karesel ise $A/B = B/C$ koşulu nedeniyle *A* sayısı da karesel olması gerekir ki bu yanlıştır. Benzer şekilde *A* sayısı kübik değilse, *B* sayısı da kübik değildir. Aksi halde burada da $A/B = B/C$ koşulu nedeniyle A sayısının da kübik olması gerekir ki bu da yanlıştır. Aynı yöntem diğer sayılar için de geçerliliğini koruduğundan önermede öngörülen ifade geçerlidir.



Şekil 11- Burada $A = 2$; $B = 2^2 = 4$; $C = 2^3 = 8$; $D = 2^4 = 4^2 = 16$; $E = 2^5 = 32$; $Z = 2^6 = 4^3 = 64$.

***XI. Önerme*: *Birim*le (*vahid*) başlayan uygun oranlı bir geometrik ardışık sayı dizisinde bir büyük sayı bir küçük sayıya dizideki ikinci sayı oranında bölünür.[1]**

Eğer geometrik ardışık *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sayı dizisinde *E* sayısı *C* sayısına bölünürse $E/C = B$ ilişkisi yazılabilir (*Şekil 12*).

Kanıtı: Dizideki *C*, *D*, *E* terimleri 1, *A*, *B* terimleriyle uygun oranlı olduğundan $B/1 = E/C$ ya da $E/C = B$ ilişkisi geçerlidir.

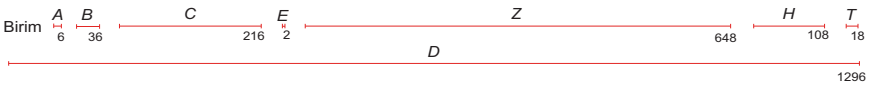
Şekil 12- Burada $E/C = B = 4$.

***XII. Önerme*: Eğer *birim*le (*vahid*) başlayan uygun oranlı bir geometrik ardışık sayı dizisinde sonuncu sayı bir asal sayıya bölünebiliyorsa dizinin birimden sonra gelen ilk sayısı da aynı asal sayıya bölünebilir.[2]**

Eğer uygun oranlı geometrik ardışık *A*, *B*, *C*, *D* sayı dizisinin en küçük böleni asal *E* sayısıysa, bu durumda *E* sayısı *A* sayısının da bir bölenidir (*Şekil 13*).

1 Bu önerme *1*, a_1, a_2, … , a_{n-1}, a_n geometrik dizisinde geçerli $a_{n+1}/a_{n-1} = a_2$ ilişkisine karşı düşer.

2 Bu önerme *1*, a_1, a_2, … , a_{n-1}, a_n geometrik dizisinde, *p* bir asal sayı olmak üzere, eğer a_n sayısını böler ya da $a_n/p = m$ ise bu durumda bu sayının a_1 sayısını da böler ($a_1/p = n$).



Şekil 13- Burada $A = (2 \times 3) = 6$; $D = (2 \times 3 \times 216)$.

Kanıtı: 1- E ve A sayılarının ortak bölensiz, E/A oranının en küçük sayılardan oluştuğunu ve ilkin $D/E = Z$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $D = (E \times Z)$ ve geometrik dizi koşulu nedeniyle $D = (A \times C)$ yazılabildiği için $E/A = C/Z$ ilişkisi geçerli olup E ve A sayıları C ve Z sayılarının bölenleri olmalıdır.

2- İkinci olarak $C/E = H$ olduğunu varsayalım. Bu durumda da $1/A = B/C$ ya da $C = (A \times B)$ ve $C = (E \times H)$ nedeniyle $E/A = B/H$ ilişkisi geçerli olup E ve A sayılarının B ve H sayılarının da böleni olduğu anlaşılır.

3- Son olarak $B/E = T$ olduğunu varsayalım. Bu durumda da $1/A = A/B$ ve $B = (E \times T)$ nedeniyle $E/A = A/T$ ilişkisinin geçerli olduğu görülür. Buna göre E ve A sayıları A ve $T = B/E$ nedeniyle B sayısının da böleni olduğu anlaşılır.

Şu halde önermede öngörüldüğü gibi E sayısı A sayısının da bir bölenidir.

Not: Bu önerme Haccâc nüshasında önceki önermeye takdim edilmiştir.

***XIII. Önerme*: Eğer *birim*le (*vahid*) başlayan uygun oranlı bir geometrik ardışık sayı dizisinde birimden sonraki ilk terim bir asal sayıysa, dizinin sonuncu terimi sadece dizinin önceki terimlerine bölünebilir.**[1]

Uygun oranlı bir geometrik ardışık A, B, C, D sayı dizisinde en küçük A sayısının bir asal sayı olduğunu varsayalım (*Şekil 14*). Bu durumda D sayısı sadece A, B ve C sayıları tarafından bölünebilir.

Kanıtı: D sayısını bölenin E sayısı olduğunu varsayalım. Bu durumda E sayısı dizinin ilk sayısı olamaz. Aksi halde A sayısının da böleni olması gerekirdi. Ancak koşul gereği A sayısının bir asal sayı olması gerektiğinden bu mümkün değildir.

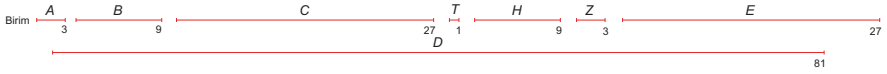
1 Bu önerme $1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ geometrik dizisinde a_1 asal bir sayı olması halinde dizideki bir a_n teriminin sadece $i < n$ olmak üzere, dizinin a_i terimlerine bölünebileceğini ifade eder.

Eğer D sayısının bir bileşik sayı olduğunu ve onu bölenlerin de dizinin ilk terimini oluşturduğunu varsayarsak bu durumda A sayısının da bir böleni olması gerekir ki A sayısı asal olduğundan bu mümkün değildir. Şu halde D sayısını bölen sayının A sayısından başka bir sayı olması imkânsızdır.

Eğer $D = (E \times Z)$ olduğu varsayılırsa, uygun oranlı geometrik dizi nedeniyle $(A \times C) = D = (E \times Z)$ ya da $A/E = Z/C$ ilişkisi yazılabilir. Bu durumda A sayısı E sayısının böleni olduğundan Z sayısı da C sayısının böleni olmalıdır. Ne var ki Z sayısı A, B ve C sayılarından hiçbiri olmamalıdır. E sayısı ise ne D ne de Z sayısı değildir. Neticede yukarıda olduğu gibi Z sayısının da dizinin birinci terimi olamayacağı sonucuna varılır.

Eğer $C = (Z \times H)$ olduğu varsayılırsa bu durumda $(A \times B) = C = (Z \times H)$ ya da $A/Z = H/B$ ilişkisi yazılabilir. Şu halde H sayısı B sayısının böleni ve aynı zamanda A ve B sayılarından farklı bir sayı olmalıdır. Ne var ki dizinin varsayım gereği asal birinci terimi değildir. Buna göre C sayısının da böleni ancak A sayısı olmalıdır.

Son olarak $B = (H \times T)$ olduğu varsayılırsa bu durumda $(A \times A) = B = (H \times T)$ ya da $A/H = T/A$ ilişkisi yazılabilir. Bu durumda A sayısı H sayısının böleni olduğundan T sayısı da A sayısının böleni olmalıdır. Bu ise A sayısı asal olduğundan yanlıştır ve neticede önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.



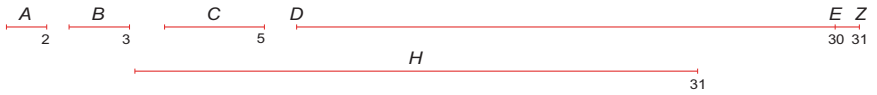
Şekil 14 (Özgün şekilde F sayısı hatalı olarak iki kez çizilmiştir). Burada $D = 3^6 = (9 \times 9) = (3 \times 27) = 81$.

***XIV. Önerme*: Sınırlı sayıda asal sayıdan hep daha fazla sayıda asal sayı bulunur.**[1]

Verilen asal sayıların A, B ve C sayıları olduğunu varsayalım. Bu sayıların çarpımı DE sayısının en küçük bölenleri A, B ve C sayılarıdır. Eğer DE sayısına bir *birim* (*vahid*) EZ ilave edilirse diğerlerinden farklı yeni bir DZ asal sayı elde edilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 20. Önerme olarak yer alır ve asal sayıların sonsuz sayıda olduklarını kanıtlar. Önermede *a, b, c, … ,k* asal sayılarının verildiği varsayılır ve bu sayılardan yeni bir $[(a \times b \times c \times \ldots \times k) + 1]$ sayı oluşturularak bu sayının da bir asal sayı olması gerektiği kanıtlanır.

Kanıtı: Bu şekilde elde edilen *DZ* sayısının asal olması halinde önerme hükmü yerine gelmiş olur. Bir an böyle olmadığını ve bu sayının *A*, *B* ve *C* sayılarından farklı *H* gibi bir böleni bulunduğunu varsayalım. Gerçekten de *H* sayısı bu sayılardan birine eşit olsa *DE* sayısının da böleni olması gerekir ki bu varsayım gereği imkânsızdır. Bu durumda *H* sayısı *EZ* ya da birimin böleni olması gerekir. Ancak varsayım gereği asal sayıların sayısı sınırlandırıldığından bu mümkün değildir. Şu halde olmayana ergi yöntemi gereği *DE* sayısı böleni *H* (= *DZ*) sayısı, *A*, *B*, *C* sayılarından farklı bir asal sayıdır.



Şekil 15- Burada *DZ* = [*DE* + *EZ*] = [(2 × 3 ×5) +1] = 31 = *H*.

Not: Bu önerme Haccâc nüshasında özgün metinde olduğu gibi *20. Önerme* olarak verilir.

***XV. Önerme*: Bir sayı sadece bir şekilde en küçük bölenler şeklinde ifade edilebilir.**[1]

Eğer *A* sayısının en küçük bölenleri *B*, *C* ve *D* ise, bu durumda *A* sayısı bunlardan başka bir asal sayıya bölünemez (*Şekil 16*).

Kanıtı: Aksi halde *A*/*Z* = *E* ya da *A* = (*E* × *Z*) olması gerekirdi. Ayrıca *B* sayısı *A* sayısının bir böleni olduğundan *A* = [*B* × (*C* × *D*)] nedeniyle (*E* × *Z*) = [*B* × (*C* × *D*)] ilişkisi yazılabilir. Ancak *Z* sayısı varsayım gereği bir asal sayı olan *B* sayısının bir böleni olmadığından *E* sayısı *B* sayısının bir böleni olmalıdır. Bu durumda *E* sayısının bölenleri *B*, *C* ve *D* sayıları olmalıdır. Ancak *E* sayısı *A* sayısından küçük olduğundan bu imkânsız olduğundan önerme hükmü olmayana ergi yöntemi gereği kanıtlanmış olur.

Şekil 16- Burada *A* = (*B* × *C* × *D*) = (2 × 3 × 5) = 30; *E* = *A*/*Z* = 30/2 = 15.

1 Öklid'in özgün eserinde 14. Önerme olarak sıralanan bu önermede, çarpanlarına indirgenmiş bir *a* sayısı eğer *b, c, d, … ,* k asal sayılarına bölünebiliyorsa, *a = (p × m)* şeklinde başka bir *p* asal sayı cinsinden ifade edilemeyeceği anlamına gelir.

***XVI. Önerme*: En küçük bölen iki sayının oluşturduğu uygun oranlı ardışık üç sayıdan ikisinin toplamı üçüncü sayıyı ortak bölmez.**[1]

A, *B* ve *C* uygun oranlı ardışık üç sayı olmak üzere bu sayıların $A = DE^2$, $B = (DE \times EZ)$ ve $C = EZ^2$ şeklinde ortak bölensiz *DE* ve *EZ* asal sayılarından oluştuğunu varsayalım. Bu durumda herhangi iki sayı toplandığında üçüncü sayıyla ortak bölünemez.

Kanıtı: *DE* ve *EZ* sayıları asal olduğundan *DE* ve $DZ = (DE + EZ)$ sayıları da *EZ* ile ortak bölünemez. Ancak $(A + B) = [DE^2 + (DE \times EZ)] = [DE \times (DE + EZ)] = (DE \times DZ)$ yazılabildiğinden $(A + B)$ $[= (DE \times DZ)]$ ile *C* $(= EZ^2)$ sayıları da ortak bölünemez.

Aynı yol izlenerek $(B + C)$ $[= (EZ \times DZ)]$ ile *A* $(= DE^2)$ sayılarının da ortak bölünemeyeceği kanıtlanabilir.

Son olarak *DE* ve *EZ* sayılarının ortak bölensiz olmaları nedeniyle, $(A + C)$ $[= (DE^2 + EZ^2)]$ ile *B* $[= (DE \times EZ)]$ sayılarının de ortak bölensiz olacağı ve önermede öngörülen hükmün geçerli olduğu açıktır.

Şekil 17- Burada $A = DE^2 = 2^2 = 4$, $B = (DE \times EZ) = (2 \times 3) = 6$ ve $C = EZ^2 = 3^2 = 9$.

Not: Bu önermede kullanılan $(DZ \times DE) = [(DE + EZ) \times DE] = (DE)^2 + (DE \times EZ)$ ve $(DZ)^2 = (DE + EZ)^2 = (DE)^2 + (EZ)^2 + 2(DE \times EZ)$ ilişkileri daha önce *2. Makale* kapsamında oranlarla ilgili önermelerde kanıtlanmıştı. Ancak burada birim konusunu da göz önünde bulundurmak ve *DZ* büyüklüğündeki birimle *DE* ve *EZ* büyüklüğündeki birimlerin aynı olduğunu hatırlatmak gerekir.

Burada *DH* ve *DE* büyüklüklerinin çarpılması ilkin *DE* birimlerin çarpılması sonra *DE* ve *EZ* birimlerinin çarpılarak bunlara ilave edilmesi anlamına gelir. Neticede ilk ilişkide verilen $(DZ \times DE) = [(DE + EZ) \times DE] = (DE)^2 + (DE \times EZ)$ sonucuna ulaşılmış olur.

---

1 Öklid'in özgün eserinde 15. Önerme olarak yer alan bu önermede, α/β oranı şeklinde indirgenerek elde edilen en küçük α ve β asal sayılarının oluşturduğu ardışık $a = \alpha^2$, $b = \alpha\beta$, $c = \beta^2$ geometrik dizi terimlerinin sırasıyla $(b + c)$, $(c + a)$, $(a + b)$ toplamlarıyla ortak bölünemeyeceğini ifade eder.

Aynı şekilde $(EZ)^2 + (EZ \times DE) = [(DE + EZ) \times EZ] = (DE \times EZ)$ yazılabilir ve ayrıca kısımları bütünle çarparak toplamakla bütünün karesini almak arasında bir fark olmadığından $(DZ \times DE) + (DZ \times EZ) = (DZ)^2$ elde edilir. Türetilen ifadeler birleştirilirse $(DZ)^2 = (DE)^2 + (EZ)^2 + 2(DE \times EZ)$ ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

***XVII. Önerme*: Birisi *birim* (*vahid*) olmamak koşuluyla asal iki sayı verildiğinde, aynı uygun oranda olmak koşuluyla üçüncü bir asal sayı verilemez.**[1]

Eğer *A* ve *B* sayılarının asal olduğu varsayılırsa bu durumda bunlarla $A/B = B/C$ şeklinde uygun oranda asal bir *C* sayısı verilemez (*Şekil 18*).

Kanıtı: Varsayım gereği $A/B = B/C$ koşulu sağlanmalıdır. Ancak *A* ve *B* sayıları asal olduğundan A/B oranı indirgenmiş bir orandır ve *B* asal sayısı da herhangi bir *C* asal sayısına bölünerek bu orana eşitlenemez. Şu halde önermenin hükmü olmayana ergi yöntemi gereği kanıtlanmış olur.

Şekil 18- $A/B = B/C$; $(A \times C) = B^2$ ya da $C = B^2/A = 9/2 = 4{,}5$.

***XVIII. Önerme*: Eğer hiçbiri *birim*e (*vahid*) eşit olmayan ardışık geometrik uygun oranlı bir dizi verilmiş ve bunlardan iki uçtaki sayı ortak bölünmez ya da asal bir sayıysa, bu durumda sonuncu sayıyla ondan sonra gelen sayı arasında bir oran kurulamaz.**[2]

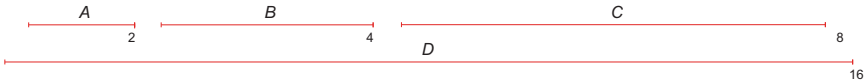
Hiçbiri *birim*e (*vahid*) eşit olmayan *A*, *B* ve *C* sayılarından iki uçtaki *A* ve *C* sayılarının ortak bölensiz olduğunu varsayalım (*Şekil 19*). Bu durumda *C* ve ondan sonra gelen *D* sayısı arasındaki C/D oranı A/B'ye eşit olmaz.

Kanıtı: Bir an $A/B = C/D$ ya da $A/C = B/D$ olduğunu varsayalım. Ancak *A* ve *C* sayıları A/C oranına indirgenmiş olduğundan bu durumda *A* sayısı hem *B* sayısının hem de *C* sayısının bir böleni olur, bu ise koşul gereği mümkün değildir. Böylece önermenin hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

---

1 Öklid'in özgün eserinde 16. Önerme olarak yer alan bu önerme, *a* ve *b* asal sayılar olmak üzere, uygun $a/b = b/x$ oranını sağlayan üçüncü bir *x* sayısının bulunamayacağı anlamına gelir.

2 Öklid'in özgün eserinde 17. Önerme olarak verilen bu önerme, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ geometrik dizisinde dizideki tüm sayılar birbirini böldüğünden asal olamayacağı anlamına gelir ve önermenin doğruluğunu olmayana ergi yöntemiyle kanıtlamış olur.

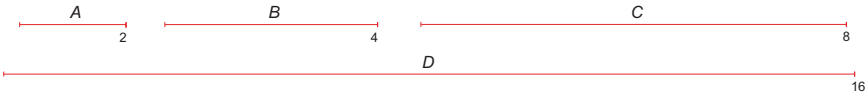


Şekil 19- Burada $A/B = C/D = ½$ ortak bölünebilir.

***XIX. Önerme*: Verilen iki sayıyla uygun orantılı bir üçüncü sayının bulunması.**[1]

Burada amaç, A ve B sayılarının ortak bölenli oldukları varsayılarak uygun oranlı bir üçüncü C sayısını türetmektir (*Şekil 20*). Bunun için $D = B^2$ sayısı oluşturulur. Bu durumda A sayısı D sayısının böleni $C = D/A$ ya da $D = (A \times C) = B^2$ yazılabildiğinden $A/B = B/C$ uygun oran ilişkisi elde edilir.

Eğer A sayısı D sayısının böleni değilse, bu durumda bir üçüncü sayı bulunmaz. Bir an aksini düşünerek üçüncü sayının C sayısı olduğunu varsayalım. Bu durumda $D = (A \times C)$ yazılabileceğinden A sayısı D sayısının böleni olmalıdır ki bu varsayım gereği mümkün değildir.



Şekil 20- Burada $A/B = B/C = ½$.

***XX. Önerme*: Eğer üç sayı verilmişse mümkünse bunlarla orantılı ardışık dördüncü bir sayının belirlenmesi.**[2]

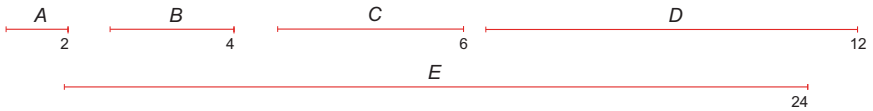
Verilen bu üç sayının A, B ve C olduğunu ve A ve C sayılarının da ortak bölenli olduğunu varsayalım (*Şekil 21*). Bu durumda $D = (A \times C)$ kabul edilir ve eğer A sayısı D sayısının bir böleni ya da $D \times A = E$ ise, bu durumda $(A \times E) = (B \times D)$ yazılabileceğinden $A/B = C/E$ ilişkisi geçerli olur ve E aranan dördüncü sayıya karşı düşer.

Eğer A sayısı D sayısının bir böleni değilse, bu durumda D sayısı verilen üç sayının dördüncüsü olamaz. Eğer bir an aksini düşünerek E sayısının

1 Öklid'in özgün eserinde 18. Önerme olarak yer alan bu önerme, a ve b sayıları asal olmamak koşuluyla $(a \times c) = b^2$ sayısını belirlemeye ya da a, $a(b/a)$, $a(b/a)^2$ ardışık geometrik dizisinin ilk üç terimini yazmaya karşı düşer.

2 Öklid'in özgün eserinde 19. Önerme olarak yer alan bu önerme, eğer a, b ve c gibi üç sayı verilmişse $a/b = c/d$ ilişkisini sağlayan bir d sayısının belirlenmesine ilişkindir.

üç sayının dördüncüsü olduğunu varsayarsak ($A \times E$) = D olması gerektiğinden A sayısı da D sayısının böleni olmalıdır. Ancak varsayım gereği bu doğru olmadığından önerme hükmü kanıtlanmış olur.

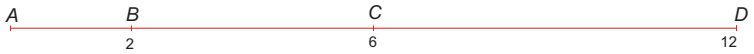


Şekil 21- Burada $A/B = C/E = ½$.

***XXI. Önerme*: Ne kadar sayıda çift sayı toplanırsa toplansın sonuç bir çift sayıdır.**

Eğer *AB*, *BC* ve *CD* sayılarının çift olduğunu varsayarsak, bu durumda bu sayıların toplamı *AD* sayısı da çifttir (*Şekil 22*).

Kanıtı: Her çift sayının yarısı bulunduğuna göre, tüm yarıların toplamı toplamın da yarısı anlamına gelir. Buna göre, *AD* sayısının da yarısı bulunduğuna göre, önermede öngörüldüğü gibi bir çift sayıdır.



Şekil 22- Burada $AD = (AB + BC + CD) = (2 + 4 + 6) = 12$.

***XXII. Önerme*: Çift sayıda ne kadar tek sayı toplanırsa toplansın sonuç bir çift sayıdır.**

Eğer *AB*, *BC*, *CD* ve *DE* sayılarının tek olduklarını varsayarsak, bu çift sayıdaki sayının toplamı *AE* bir çift sayıdır (*Şekil 23*).

Kanıtı: Eğer her tek sayıdan bir birim (*vahid*) çıkarılırsa geriye bir çift sayı kalır. Sayıların sayısı çift olursa birimlerin sayısı da çift olur. Buna göre çift sayıların toplamı çift olduğundan çift sayıda tek sayının toplamı *AD* de önermede öngörüldüğü gibi çift olmalıdır.

Şekil 23- Burada $AE = (AB + BC + CD + DE) = (3 + 5 + 7 + 9) = 24$.

***XXIII. Önerme*: Tek sayıda ne kadar tek sayı toplanırsa toplansın sonuç bir tek sayıdır.**

Eğer *AB*, *BC* ve *CD* sayılarının tek olduklarını varsayarsak, bu tek sayıdaki sayının toplamı *AD* bir tek sayıdır (*Şekil 24*).

Kanıtı: Eğer *CD* sayısından *ED* = 1 olmak üzere bir birim (*vahid*) çıkarılırsa geriye bir çift sayı *CE* = (*CD* - 1) kalır. Çift sayıda tek sayının toplamı *AC* sayısı da çift olduğundan *AD* = (*AC* + *CD*) bir çift sayı ve neticede sayının toplamı *AD* de önermede öngörüldüğü gibi bir tek sayıdır.

Şekil 24 Burada *AD* = (*AB* + *BC* + *CD*) = (3 + 5 + 7) = 15 ve *ED* = 1.

***XXIV. Önerme*: Çift sayıların farkı da bir çift sayıdır.**

Eğer *AB* ve *BC* sayılarının çift oldukları varsayılırsa, bu durumda *AC* = (*AB* – *BC*) sayısı bir çift sayıdır (*Şekil 25*).

Kanıtı: *AB* ve *BC* sayılarının çift oldukları varsayımı gereği (*AB*/2 – *BC*/2) = *AC*/2 yazılabilir. Bu durumda *AC*/2 sayısının mevcut olması nedeniyle *AC* sayısının önermede öngörüldüğü gibi çift olması gerekir.

Şekil 25 Burada *AC* = (*AB* – *BC*) = (8 - 2) = 6.

***XXV. Önerme*: Çift sayıdan tek sayı çıkarılırsa tek sayı elde edilir.**

Eğer *AB* bir çift ve *BC* bir tek sayıysa, bu durumda *AC* = (*AB* – *BC*) farkı bir tek sayıdır (*Şekil 26*).

Kanıtı: Eğer *BC* tek sayısından *CD* = 1 birim ayrılırsa, bu durumda *BD* = (*BC* – *CD*) sayısı bir çift sayı olacağından *AD* = (*AB* – *BD*) sayısı da çift olmalıdır. Şu halde, *CD* = 1 olduğundan, *AC* farkının önermede öngörüldüğü gibi bir tek sayı olması gerekir.

Şekil 26- Burada *AC* = (*AB* – *BC*) = (8 - 5) = 3 ve *CD* = 1.

***XXVI. Önerme*: Tek sayıdan çift sayı çıkarılırsa tek sayı elde edilir.**[1]

Eğer *AB* bir tek ve *BC* bir çift sayıysa, bu durumda *AC* = (*AB* – *BC*) farkı bir tek sayıdır (*Şekil 27*).

Kanıtı: Eğer *BD* = 1 birim alınırsa, bu durumda koşul gereği *AB* tek olduğundan *AD* = (*AB* + *BD*) sayısı bir çift sayı olacağından *AF* = (*AB* – *BD*) sayısı da çift olmalıdır. Ancak *DC* = (*DB* + *BC*) bir tek sayı olduğundan, *AC* farkının önceki *25. Önerme* gereği bir tek sayı olması gerekir.

Şekil 27- Burada *AC* = (*AB* – *BC*) = (7 - 4) = 3 ve *DB* = 1.

***XXVII. Önerme*: Tek sayıdan tek sayı çıkarılırsa çift sayı elde edilir.**[2]

Eğer *AB* ve *BC* tek sayıysa, bu durumda *AC* = (*AB* – *BC*) farkı bir çift sayıdır (*Şekil 28*).

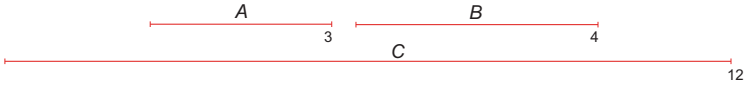
Kanıtı: Eğer *BC* üzerinde *BD* = 1 birimi ayrılırsa, bu durumda koşul gereği *AB* bir tek sayı olacağından *AD* = (*AB* - *BD*) ve *CD* = (*BC* – *BD*) sayıları çift olur. Şu halde *AC* = (*AD* – *DC*) farkı önermede öngörüldüğü gibi bir çift sayı olmalıdır.

Şekil 28- Burada *AC* = (*AB* – *BC*) = (9 - 5) = 4 ve *BD* = 1.

***XXVIII. Önerme*: Bir tek sayının çift sayıyla çarpımından bir çift sayı oluşur.**

Eğer *A* sayısının tek, *B* sayısının bir çift sayı olduğu varsayılırsa *C* = (*A* × *B*) çarpımı bir çift sayıdır (*Şekil 29*).

Kanıtı: *C* çarpımı *22. Önerme* gereği bir tek sayının çift sayıda toplanması sonucu elde edildiğine göre çarpım sonucu bir çift sayıdır.



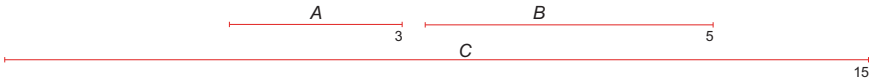
Şekil 29- Burada *C* = (*A* × *B*) = (3 × 4) = 12.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde bir sonraki önermeyle yer değiştirmiştir.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde bir önceki önermeyle yer değiştirmiştir.

***XXIX. Önerme*: Tek sayıların çarpımından tek sayılar elde edilir.**

Eğer *A* ve *B* sayılarının tek sayılar olduğu varsayılırsa *C* = (*A* × *B*) çarpımı bir tek sayıdır (*Şekil 30*).

Kanıtı: *C* çarpımı *23. Önerme* gereği bir tek sayının tek sayıda toplanması sonucu elde edildiğine göre çarpım sonucu bir tek sayıdır.

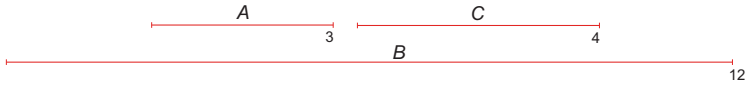


Şekil 30- Burada *C* = (*A* × *B*) = (3 × 5) = 15.

***XXX. Önerme*: Eğer bir çift sayının böleni bir tek sayıysa bölüm bir çift sayıdır.**[1]

Eğer *A* sayısının tek, *B* sayısının bir çift sayı olduğu varsayılırsa *C* = *B*/*A* bölümü bir çift sayıdır (*Şekil 31*).

Kanıtı: Eğer bir an *C* sayısının tek olduğu varsayılırsa *B* = (*A* × *C*) çarpımı *29. Önerme* gereği *B* sayısının tek olması gerekirdi ki bu yanlıştır. Buna göre önerme hükmü olmayana ergi yöntemi gereği kanıtlanmış olur.

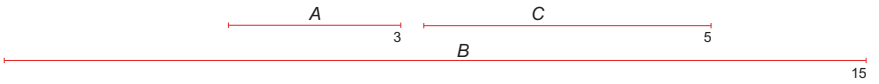


Şekil 31- Burada *C* = *B*/*A* = 12/3 = 4.

***XXXI. Önerme*: Eğer bir tek sayının böleni bir tek sayıysa bölüm de bir tek sayıdır.**[2]

Eğer *A* ve *B* sayılarının tek oldukları varsayılırsa *C* = *B*/*A* bölümü de bir tek sayıdır (*Şekil 32*).

Kanıtı: Eğer bir an *C* sayısının çift olduğu varsayılırsa *B* = (*A* × *C*) çarpımı *29. Önerme* gereği B sayısının çift olması gerekirdi ki bu yanlıştır. Buna göre önerme hükmü olmayana ergi yöntemi gereği kanıtlanmış olur.



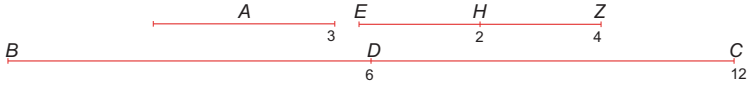
Şekil 32- Burada *C* = *B*/*A* = 15/3 = 5.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde bulunmamaktadır.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde bulunmamaktadır.

***XXXII. Önerme*: Bir çift sayıyı bölen bir tek sayı aynı sayının yarısını da böler.**[1]

Eğer *A* sayısı tek ve onun böldüğü *BC* sayısı çiftse, aynı *A* sayısı *BC*/2 sayısını da böler (*Şekil 33*).

Kanıtı: Burada *EZ* = *BC*/*A* ise, *30. Önerme* gereği *EZ* bir çift sayı olmalıdır. Eğer *BD* = *BC*/2 ve *EH* = *EZ*/2 olarak tanımlanırsa *EH* = (*BC*/*A*)/2 = (*BC*/2)/*A* = *BD*/*A* yazılabildiğine göre *A* sayısının önermede öngörüldüğü gibi *BD* = *BC*/2 sayısını da böldüğü kanıtlanmış olur.

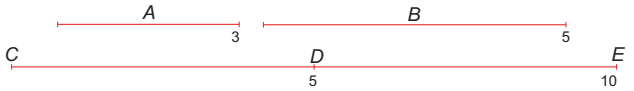


Şekil 33- Burada *BC*/*A* = 12/3 = 4; *EZ* = *BC*/2 = 12/2 =6; *EZ*/*A* = 6/3 = 2.

***XXXIII. Önerme*: Herhangi bir sayıyla ortak böleni bulunmayan bir tek sayı, aynı sayının iki katıyla da ortak bölensizdir.**[2]

Eğer *A* tek sayısı *CD* sayısıyla ortak bölensizse, bu durumda *CE* = 2.*CD* sayısıyla da ortak bölensizdir.

Kanıtı: Bir an bunun böyle olmadığını ve *A* sayısının *CD* sayısını *B* = *CD*/*A* şeklinde böldüğünü varsayalım. Bu durumda *31. Önerme* gereği *B* bir tek sayı olmalıdır. Ancak bu durumda varsayım gereği *A* sayısı bir çift sayı olan *CE* = 2.*CD* sayısının da bir ortak böleni olmalıdır. Varsayım gereği bu doğru olmadığından olmayana ergi yöntemi gereği önerme hükmü kanıtlanmış olur.



Şekil 34- Burada *CD*/*A* = 5/3; *CE* = (2 × *CD*) = 10; *CE*/A = (2 × *CD*)/*A* = 10/3.

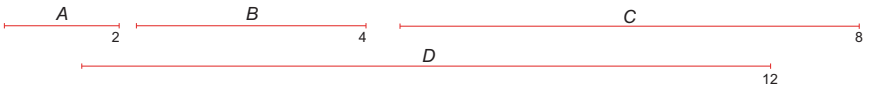
***XXXIV. Önerme*: İkinin üsleri alınarak oluşturulan sayıların tümü bir çift sayının bir çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.**[3]

Eğer *A* = 2 ve *B* = 2^2, *C* = 2^3, *D* = 2^4, … sayıları ikinin üsleri alınarak ardışık oluşturulursa, bu durumda *B* = 4 = (2 × 2), *C*= 8 = (2 × 4), *D* = 16 = (2 × 8), … sayıları bir çift sayının bir çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *30. Önerme* olarak yer alır.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *31. Önerme* olarak yer alır.
3 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *32. Önerme* olarak yer alır.

Kanıtı: Bu sayıların çift olması açıktır. Bu sayıların bir çift sayının çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilmeleri şöyle açıklanabilir: $A = 2$ olduğundan B, C ve D sayılarının bölen ve bölümleri yine A, B ve C sayılarından oluşur. Buna göre B, C ve D sayıları bir çift sayının bir çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.

Aksine eğer bu sayıların bir an tek oldukları varsayılırsa, bu durumda B, C ve D sayılarının bölenlerinin de tek olmaları gerekirdi. Bu durumda A, B ve C sayılarının her biri de tek sayılardan oluşmaları gerekir ki bu varsayım gereği yanlıştır. Şu halde B, C ve D sayılarının her biri, olmayana ergi yöntemi gereği önermede öngörüldüğü gibi, bir çift sayının bir çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.

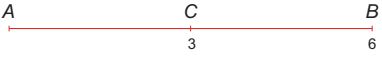


Şekil 35- Burada $A = 2$; $B = 2^2 = (2 \times 2) = 4$, $C = 2^3 = (2 \times 4)$ 8 ve $D = 2^4 = (2 \times 8) = 16$.

***XXXV. Önerme*: Herhangi bir sayının yarısı bir tek sayıysa, bu durumda bu sayı bir tek sayının çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.**[1]

Eğer verilen bir AB sayısının yarısı $AC = AB/2$ bir tek sayı ise, bu durumda AB sayısı bir çift sayıdır.

Kanıtı: AB sayısının yarısı bulunduğuna göre bir çift sayıdır. Ayrıca $AB/AC = 2$ olduğuna göre AB sayısı bir çift sayının çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilemez. Aksi halde $AC = AB/2$ sayısının çift olması gerekirdi. Ancak varsayım gereği AC bir tek sayıdır. Şu halde *28. Önerme* gereği AB sayısı önermede öngörüldüğü gibi bir tek sayının çift sayıyla çarpımı şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 36- Burada $AC = AB/2 = 6/2 = 3$; $AB = (2 \times 3) = 6$.

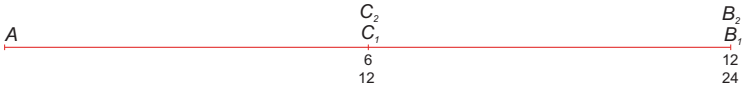
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *33. Önerme* olarak yer alır.

***XXXVI. Önerme*: İkinin katlarından türetilmeyen ve yarısı bir tek sayı olmayan herhangi bir sayı bir çift sayının çift sayıyla çarpımından ya da bir çift sayının tek sayıyla çarpımından oluşur.**[1]

Eğer *AB* sayısının yarısı *AC* sayısı bir tek sayı değilse, bu durumda *AB* sayısı bir çift sayının çift sayıyla çarpımı ya da tek sayının çift sayıyla çarpımından oluşur (*Şekil 37*).

Kanıtı: *AB* sayısının çift olması yarısının bulunmasıyla açıklanır. *AB* sayısının bir çift sayının bir çift sayıyla çarpımına eşit olması ise onun yarısının da bir çift sayı olmasına bağlıdır.

AB sayısının bir tek sayının çift sayıyla çarpımına eşit olması hali ise, çift sayının ikinci kez ikiye bölünmesi halinde çarpanlardan birinin bir tek sayı olmasına, diğer bir deyişle *AB* çarpanlarından birinin bir tek sayı olmasına bağlıdır.



Şekil 37- Burada $AC_1 = AB_1/2 = 12/2 = 6 = (2 \times 3)$; $AC_2 = AB_2/2 = 24/2 = 12 = (2 \times 6)$.

***XXXVII. Önerme*: Eğer geometrik ardışık uygun oranlı istenilen uzunlukta bir dizi verilmişse, bu durumda dizinin ikinciyle birinci terim farkının birinci terime oranı, dizinin sondan bir sonrakiyle birinci terim farkının tüm terimler toplamı oranına eşittir.**[2]

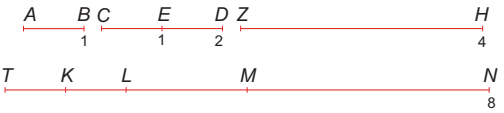
Eğer *AB*, *CD* ve *ZH* ile *TN* büyüklükleri uygun oranlı ardışık sayılara karşı düştüğü varsayılırsa, $CE = (CD - ED)$, $ED = AB$, $KN = (TN - TK)$ ve $TK = AB$ olmak üzere, önerme gereği $CE/AB = KN/(AB + CD + ZH)$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 38*).

*Kanıt*ı: Eğer *TN* büyüklüğünde *CD* büyüklüğüne eşit olan *TL* ve aynı şekilde *ZH* büyüklüğüne eşit *TM* büyüklüğü işaretlenirse, bu durumda

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 34. Önerme olarak yer alır.

2 Öklid'in özgün eserinde 35. Önerme olarak yer alan bu önerme, eğer geometrik ardışık uygun oranlı bir $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ dizisi verilmişse, bu durumda $(a_2 - a_1)/a_1 = (a_{n+1} - a_1)/(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ ilişkisinin geçerli olduğu anlamına gelir. Önermede belirtilmese de bu ifade $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ geometrik dizisinin bilinegelen $S_{n+1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ toplam ifadesini verir: $S_{n-1} = a(r^n - 1)/(r - 1)$. Örneğin $a = 1$, $r = 2$ ve $n = 3$ için elde edilen $1, 2, 2^2$ dizinin toplamı $S_2 = (2^3 - 1)/(2 - 1) = 7$ olarak elde edilir.

TN/*TM* = *TM*/*TL* = *TL*/*TK* olur. Diğer bir deyişle *NM*/*TM* = *ML*/*TL* = *LK*/*TK* ya da *LK*/*TK* = *KN*/(*KL* + *LM* + *MN*) yazılabilir. Ayrıca öngörüldüğü gibi *CE*/*AB* = *LK*/*TK* ilişkileri de geçerlidir.

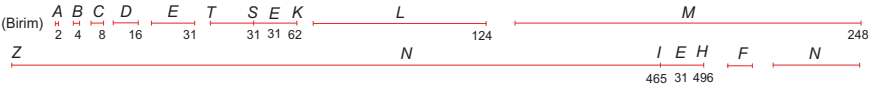


Şekil 38- Burada *AB* = 1, *CD* = 2, *ZH* = 4 ve *TN* = 8; buna göre (*CD* – *ED*)/*AB* = (*TN* – *TK*)/(*AB* + *CD* + *ZH*) = 1

Not: Bu durumda ayırma oranlarından yararlanılmış ancak konuya genel bir açıklama getirilmemiştir.

***XXXVIII. Önerme*: Eğer *birim*den (*vahid*) başlanarak ve ikinin katlarıyla uygun orantılı ardışık sayılar oluşturulur ve bu dizi toplamlarından biri bir sayının asal bir çarpanını oluşturursa, bu durumda bu sayıların toplamı dizinin son terimiyle çarpıldığında *mükemmel* (ya da çarpanları toplamlarına eşit) bir sayı elde edilir.**[1]

Ardışık geometrik bir dizide 1, *A*, *B*, *C* ve *D* sayılarının toplamı olan *E* sayısı bir sayının asal çarpanı ise bu durumda *ZH* = (*E* × *D*) mükemmel (diğer bir deyişle çarpanların toplamına eşit) bir sayıdır (*Şekil 39*).



Şekil 39- Burada *A* = 2, *B* = 2^2 = 4, *C* = 2^3 = 8, *D*= 2^4 = = 16 ve *n* = 5 olmak üzere
E = S_n = S_5 = (1 + *A* + *B* + *C* + *D*) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31;
ZH= (*E* × *D*) = (S_n × 2^{n-1}) = (S_5 × 2^4) = (16 × 31) = 496;
E = *TS* = *SK* = 31, *TK* = 62, *L* = 124 ve *M* = 248 (ya da *M*/*L* = *L*/*TK* = *TK*/*E* = 2).

Kanıtı: 1, *A*, *B*, *C* ve *D* sayılarının toplamına eşit olan *E* sayısından başlayarak bu sayılarla aynı oranda olan *TK*, *L* ve *M* sayılarını belirlemeye

1 Öklid'in özgün eserinde 36. Önerme olarak yer alan bu önerme, *1, 2, 2^2, 2^3, … ,2^{n-1}* geometrik dizisi toplamının bir sayının asal bir çarpanı olduğu ve bu toplam son terimle çarpıldığında, bir mükemmel sayı elde edileceği anlamına gelir. Diğer bir deyişle eğer S_n = *(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + … + 2^{n-1})* toplamı bir sayının asal bir çarpanıysa, bu durumda *(2^{n-1} × S_n)* çarpımı bir mükemmel sayıdır (ya da bu sayıda çarpanların çarpımı çarpanların toplamına eşittir) anlamına gelir: *(2 × 2 × 2 × 2 × 31) = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248)*.

çalışalım. Eğer ilkin $A/D = E/M$ oranı ya da $(E \times D) = (A \times M)$ ifadesi yazılırsa, burada $A = 2$ olduğundan, $ZH = (E \times D) = (A \times M) = 2.M$ elde edilir. Bu durumda $M/ZH = 1/2 = L/M = TK/L$ yazılabilir. Şu halde $M = ZH/2$, $L = M/2 = ZH/4$, $TK = L/2 = ZH/8$ ve son olarak $E = ZH/16$ yazılabildiğine göre E, TK, L, M ve ZH büyüklüklerin birbirlerine oranı hep ikidir.

Eğer TK sayısından E sayısına eşit KS sayısı $TS = TK - (KS = E)$ ve aynı şekilde ZD sayısından yine E sayısına eşit HI sayısı çıkarılırsa $ZI = ZH - (HI = E)$ elde edilir. Ancak *37. Önerme gereğ*i bir uygun oranlı geometrik ardışık dizide, dizinin ikinciyle birinci terim farkının birinci terime oranı, dizinin sondan bir sonrakiyle birinci terim farkının tüm terimler toplamı oranına eşittir. Şu halde $TS/E = ZI/(E + TK + L + M)$ yazılabilir. Ancak $TS = E$ olduğundan $ZI = (E + TK + L + M)$ ilişkisi geçerlidir. Ayrıca $TS = E = (1 + A + B + C + D)$ ve son olarak $ZH = (ZI + E) = (E + TK + L + M + E) = (1 + A + B + C + D + E + TK + L + M)$ ifadeleri geçerlidir. Eşitliğin sağ tarafındaki sayıların her biri ZH sayısının bölenidir ve bu sayının bundan başka bir böleni de yoktur.

Bir an bunun böyle olmadığını ve ZH sayısının bunlardan farklı bir N böleni bulunduğunu varsayalım. Bu durumda $ZH/N = F$ ya da $ZH = (F \times N)$ olmalıdır. Ancak $ZH = (E \times D)$ olduğuna göre $(E \times D) = (F \times N)$ ya da $E/F = N/D$ yazılabilir. Ne var ki F sayısı A, B, C ve D sayılar dizisinin başındaki birime (*vahid*) eşit olmadığından D sayısının bir böleni olamaz. Varsayım gereği E sayısı bir asal sayı olduğundan D sayısıyla bir ortak böleni bulunamaz. E/D oranındaki sayıların en küçükleri E ve F sayıları olduğundan D sayısı E sayısını bölmesi gerekir. Lakin A sayısı bu sayılar dizisinin birim dışında ilki olduğundan D sayısının A, B ve C sayılarından başka bir böleni bulunamaz. D sayısının bu sayılardan örneğin B sayısının bir böleni olduğu varsayılabilir. Bu durumda $B/D = E/L$ ya da $(E \times D) = (B \times L)$ yazılabilir. Ancak $(E \times D) = ZH$ olduğundan $ZH/B = L$ olması gerekir. Ne var ki koşul gereği $ZH/D = N$ olduğu varsayılmıştı. Bu durumda $N = L$ olması gerekir ki bu da yanlıştır. Şu halde ZH sayısının yukarıda verilen bölenlerden başka böleni yoktur. ZH sayısı önermede öngörüldüğü gibi aynı zamanda kendi öz bölenlerinin toplamına da eşit olduğundan bir mükemmel sayıdır.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yöntemi daha vardır. Eğer *ZH* sayısının yukarıda belirtilen bölenlerinden farklı bir *N* böleni daha varsa bunun bir tek ya da çift sayı olması gerekir.

İlkin çarpanları arasında ikinin katları bulunduğu için bir çift sayı olan *ZH* sayısının bir böleni olan bu ilave *N* sayısının bir tek sayı olduğunu varsayalım. Bu durumda *N* ilave böleni *ZH*/2 = *M* sayısının da böleni olması gerekir. Ancak bu durumda *M* sayısı da çift olduğundan *M*/2 = *L* sayısının da böleni olmalıdır. Bu şekilde sürdürülürse neticede *N* sayısı bir asal sayı olan ilk *E* sayısının da böleni olması gerekir ki bu yanlıştır.

İkinci olarak bir an ilave *N* sayısının bir çift sayı olduğunu ve bir çift sayı olan *ZH* sayısının bir böleni olduğunu varsayalım. Bu durumda *N*/2 sayısı *ZH*/2 = *M* sayısının böleni olmalıdır. Aynı şekilde (*N*/2)/2 sayısı da *M*/2 = *L* sayısının böleni olmalıdır vs. Bu ikiye bölmeler sonunda öyle bir noktaya dayanmalı ki bir sayı *N* sayısının böleni olmalıdır. Çünkü bu tek sayının iki katı bir çift sayının bölenidir. Eğer *E* sayısına ulaşmadan önce ya da *E* sayısına ulaştıktan sonra bu sayı birime (*vahid*) ulaşırsa, bu durumda *N* sayısı *A*, *B*, *C* ve *D* sayılarından biri olmalıdır. Ne var ki *N* sayısı varsayım gereği bu sayılardan farklı kabul edildiğinden bu da yanlıştır.

ONUNCU MAKALE

Bu makale 105 önermeden oluşur. Sâbit'in nüshasında ise 109 önerme vardır. Bunların *21*, *22*, *27* ve 28 olmak üzere dördü Sâbit'in ilave ettikleridir. Haccâc'ın verdiği *XXVII. Önerme*yi Sâbit *XXV. Önerme*de vermiştir. Buna göre sıralanış yönünden bir karışıklık söz konusudur.

GİRİŞ[1]

***Ortak Bölenli Büyüklükler*:** İster doğrusal, ister düzlemsel, ister hacimsel olsun öyle büyüklüklerdir ki onları ölçmek için aynı türden bir büyüklük bulunabilir.

***Ortak Bölensiz Büyüklükler*:** Öyle büyüklüklerdir ki onları ölçmek için aynı türden bir büyüklük bulunamaz.

***Kuvvette Ortak Bölenli Doğrular*:** Öyle doğrulardır ki onların karelerini ölçen eşdeğer nitelikte bir alan vardır.

***Kuvvette Ortak Bölensiz Doğrular*:** Öyle doğrulardır ki onların karelerini ölçen eşdeğer nitelikte bir alan yoktur.

Bu makalede ayrıca aşağıdaki hususlar da aydınlığa kavuşturulur. *Rasyonel* (*muntak*) ne anlama gelir? Eğer bir dizi hattı karşılaştırmak amacıyla bir hat göz önünde bulundurulsa, aşağıdaki durumlarla karşılaşılır:

Bir doğruya kıyas edilmek üzere başka doğrular çekilirse bu doğruların sayısı sonsuz olur. Bunlardan bazıları sadece uzunluk bazıları da hem uzunluk hem kuvvet yönünden ayrılır. Verilen doğru ve bunun uzunluğuyla ortak bölenli herhangi bir doğru, aynı şekilde karesiyle ortak bölenli herhangi bir alan *rasyonel* (*muntak*) olarak bilinir. Bunun dışında bir doğrunun boyuyla ortak bölensiz herhangi bir hat, aynı şekilde onun karesiyle ortak bölensiz herhangi bir alan *irrasyonel* (*asamm*) olarak tanımlanır. Bu tanıma bir hatla bu hattın karekökü ortak bölensiz olan hatlar ve bir alanla bu alanın karekökü olan alanla ortak bölensiz olan alanlar da dâhildir.

1 Öklid'in özgün eserinde bu ara başlık *Tanımlar I* şeklindedir ve 5 alt başlık altında verilmektedir.

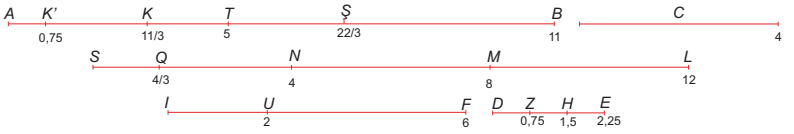
ÖNERMELER

***I. Önerme*: Eğer herhangi iki sayının büyüğünden onun yarısından fazlası çıkarılır, geri kalan farktan da onun yarısından fazlası çıkarılır ve bu işlem sürdürülürse neticede son kalan fark küçük olan diğer sayıdan daha küçüktür.**

AB ve *C* sayılarının *AB* > *C* olacak şekilde verildiğini varsayalım (*Şekil 1*). *C* sayısının belirli bir (*m*) katına eşit ve *AB* sayısından daha büyük olan bir *SL* sayısı oluşturalım [*SL* = (*m* × *C*) > *AB*]. Bu durumda bu sayının *LM*, *MN* ve *NS* gibi boyu *C* sayısına eşit kısımları bulunur. Eğer *AB* sayısından *AB*/2'den büyük olan *BT* sayısı, sonra *AT*'den *AT*/2'den büyük olan *TK* sayısı ayrılır. Bu işlemle eğer *AB*'den ayrılan örneğin *BT*, *TK*, *AK* kısımlarının sayısı *LS*/*C*'ye (= *m*) eşitse, bu durumda *AK* < *C* olduğu kanıtlanabilir.

Kanıtı: Eğer *AK* büyüklüğünün aynı (*m*) katı *DE* oluşturulursa *DZ* = *AK* olduğundan *DE* [= (*m* × *AK*)] < *AB* yazılabilir. Ayrıca *ZH* < *TK* ve *HE* < *BT* olduğu gibi *DE* büyüklüğü de *SL* büyüklüğünden çok daha küçüktür.

Ancak *DZ*/*SN* = *ZH*/*NM* = *HE*/*ML* olduğuna göre *DE*/*SL* = *DZ*/*SN* yazılabilir. Ancak *DE* < *SL* olduğuna göre *DZ* < *SN* olduğu yazılabilir. Buna göre *DZ* = *AK* ve *SN* = *C* olduğundan önermede öngörüldüğü gibi *AK* < *C* olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 1- Burada *AB* (= 11) < *C* (= 4), *m* = 3 olmak üzere *SL* = (*m* × *C*) = 12, *C* = *SN* = *NM* = *ML*; *BT* (= 5) > *AB*/2 (= 4,5), *TK* (= 4,25) > *AT*/2 (= 2,5), *AK* (= 0,75) < *C*. Ayrıca *IF*/*IU* = 3 için *SN*/*NQ* = *IF*/*IU* = 3 ilişkisinden *SQ* = 4/3.

Not: Öklid *12. Makalenin 13. Öneri*sinde şöyle bir işlemde bulunur: Keyfi iki büyüklüğün büyüğünden büyük sayının yarısı çıkarılır ve kalan büyüklükten yine onun yarısı çıkarılarak bu işlem, son fark küçük büyüklükten daha küçük oluncaya kadar sürdürülür. Buna göre bu kitabı düzenleyen yazar bir dizi nüshayı karşılaştırarak şu sonuca ulaşır: Herhangi iki büyüklüğün büyüğünden onun yarısı ya da yarısından fazlası çıkarılırsa,

çıkarılanla geriye kalan büyüklüğün oranı her ne olursa olsun fark etmez ve önermenin hükmü geçerliliğini sürdürür. Ancak her adımda bu oranın sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek gerekir. Neticede oranın, *yarı* ya da benzeri başka bir ifadeyle sınırlandırılması gerekmez ve *IF*/*IU* şeklinde genel ifade edilebilir (*Şekil 1*).

Kanıtı: *C* büyüklüğüne eşit *SN* hattı alınır ve *SN*/*NQ* = *IF*/*FU* oranını sağlayan *Q* noktası belirlenir. Bu durumda *SQ* < *C* ve *IU*/*FU* = *SQ*/*QN* olur. Sonra *QN* büyüklüğünün (*m*) katı *DE* [= (*m* × *QN*)] < *AB* olmasını sağlamak gerekir.

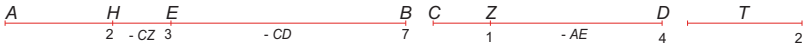
Buna göre *SM*/*ML* ve *SN*/*NM* oranlarını *IU*/*UF* oranında kurmak gerekir, şöyle ki *QN*, *NM*, *ML* sayı değerleri *QN* ile *DE* arasındaki orana eşit olmalıdır. Diğer bir deyişle *QN*/*SQ* = *NM*/*NS* olmalıdır. Oran değiştirilirse *QN*/*NM* = *SQ*/*NS* elde edilir. Ancak *SQ* < *SN* olduğundan *QN* < *NM* yazılabilir. Neticede *SL* > *AB* > *QL* > *DE* ilişkileri geçerli ve *SM*/*ML* = *SM*/*MN* = *SN*/*NQ* = *IF*/*IU* oranları eşittir.

Sonra *AB* hattından *SL* hattına eşit *BŞ* hattı, *AŞ* hattından *ŞT* hattı ve *AT* hattından *TK* hattı, *AB* hattı hisseleri *SL* hisselerine eşit ve aynı oranda olacak şekilde ayrılır. Bu durumda *AK*/*AB* = *SQ*/*SL* olur ve oran değiştirilirse *AK*/*SQ* = *AB*/*SL* elde edilir. Neticede *AB* < *SL* olduğundan *AK* < *SQ* olur, ayrıca *SQ* < *C* olduğundan *AK'* < *C* elde edilir.

***II. Önerme*: Eşit olmayan iki büyüklükte, ilkin büyük olandan küçük mümkün olduğu kadar çıkarılır, sonra kalan fark mümkün olduğu kadar küçükten çıkarılır ve bu işlem sürekli tekrarlandığında önceki fark hiçbir zaman diğerini ölçmüyorsa, bu iki büyüklük ortak bölensizdir denir.**

Söz konusu iki büyüklüğün, *AB* > *CD* olmak üzere verildiğini varsayalım. Her ne kadar ortak bölensiz olmakla birlikte bir an *T* sayısının bu iki sayının bir ortak böleni olduğunu varsayalım (*Şekil* 2). Bu durumda birinci farkın *AE* = (*AB* − *CD*) ve *AE* < *CD* olduğunu ikinci farkın ise *CZ* = (*CD* − *AE*) < *AE* olduğunu varsayalım. Buna göre üçüncü fark olarak *AH* = (*AE* − *CZ*) olarak elde edilir.

Buna göre *AB* büyüklüğünden çıkarılan birinci büyüklük $EB = CD > AB/2$. Yine *AB* büyüklüğünden çıkarılan ikinci büyüklük $HE = CZ > AE/2$ olduğuna göre neticede varsayımın doğru olması için *1. Önerme* gereği bu farkın bir adımdan sonra *T* sayısından küçük olması gerekir. Bu adımın *AH* olduğunu varsayalım. Ancak *T* sayısı varsayım gereği *CD* sayısının bir böleni olduğundan, *EB* sayısının da bir böleni olmalıdır. Aynı şekilde *T* sayısı varsayım gereği *AB* sayısının da bir böleni olduğundan, *AE* sayısının da bir bölenidir. Keza *T* sayısı *CD* sayısının da bir böleni olduğundan *CZ* sayısının ve *CZ* sayısı ise *HE* sayısının da bir böleni olduğuna göre *HE* sayısının da bir bölenidir. Sonuçta *T* sayısı *AE* sayısının da bir böleni olduğundan *AH* sayısının da bir bölenidir. Ne var ki yukarıda $AH < T$ olduğu varsayıldığına göre bu yanlıştır. Şu halde önerme hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

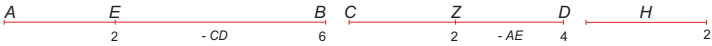


Şekil 2- Burada $AB = 7$; $CD = 4$; $CD > AB/2$; $AE = (AB - CD) = (7 - 4) = 3 < CD = 4$; $CZ = (CD - AE) = (4 - 3) = 1 < AE = 3$; $AH = (AE - CZ) = (3 - 1) = 2 = T > AE/2$.

***III. Önerme*: İki ortak bölenli büyüklüğün en büyük ortak bölenini bulunması.**

Eğer $AB > CD$ olmak üzere *CD* sayısı *AB* sayısının ortak böleniyse *CD* aranan ortak bölendir.

Aksi halde $AE = (AB - CD) < CD$ olmalıdır (*Şekil 3*). Bu durumda *AE* sayısı *CD* sayısının bir böleni olabilir. İşleme önceki önermede olduğu gibi devam edilir. *AB* ve *CD* ortak bölenli olduklarından neticede kesinlikle birinin diğerinin böleni olduğu bir büyüklüğe ulaşılır. Bu son büyüklüğün *CZ* olduğunu ve bu sayının *AE* sayısının bir böleni olduğunu varsayalım. Bu durumda *CZ* büyüklüğü *AB* ve *CD* büyüklüklerinin en büyük ortak böleni olur.



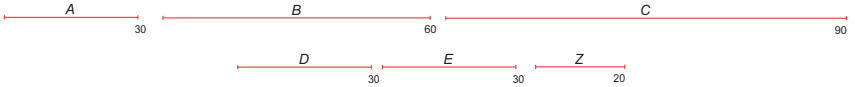
Şekil 3- Burada $AB\ (= 6) > CD\ (= 4)$, $AE = (AB - CD) = (6 - 4) = 2$, $CZ = (CD - AE) = (4 - 2) = 2$.

Aksi halde bir $H > CD$ sayısı en büyük ortak bölen olmalıdır. Bu durumda H büyüklüğü AB ve CD büyüklüğünün ortak böleni olduğundan ilkin EB ve sonra AB böleni olacağından ZD ve nihayet CD büyüklüğünün de böleni olmalıdır. Bu ise $H > CD$ varsayımı gereği yanlıştır. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi CZ büyüklüğü AB ve CD büyüklüklerinin en büyük ortak bölenidir. Buradan anlaşılacağı üzere bu iki miktarın böleni olan herhangi bir büyüklük aynı zamanda en büyük ortak bölenin de bölenidir.

***IV. Önerme*: İkiden fazla ortak bölenli büyüklüklerde en büyük ortak böleninin bulunması.**

Yukarıdaki önerme gereğince ilkin A ve B büyüklüklerinin en büyük ortak böleni D belirlenir. Eğer D büyüklüğü C büyüklüğünün de ortak böleniyse, bu durumda D büyüklüğü A, B ve C büyüklüklerinin en büyük ortak böleni olur.

Bir an D büyüklüğünün C büyüklüğünün ortak böleni olmadığını bunun yerine E büyüklüğünün en büyük ortak bölen olduğunu varsayalım. E sayısı D sayısının böleni olduğu varsayıldığına göre A ve B sayılarının da böleni olmalıdır. Şu halde E büyüklüğü her üç büyüklüğün de en büyük ortak bölenidir. Aksi halde Z en büyük ortak bölen olmalıdır. Ancak E büyüklüğü A ve B büyüklüklerinin de böleni olduğundan Z büyüklüğü D büyüklüğünün de böleni olur. Ayrıca E sayısı D ve C sayılarının böleni olduğundan Z ve E sayılarının da böleni olmalıdır. Ne var ki $E > Z$ varsayıldığı için bu yanlıştır. Böylece aradığımız E sayısını olmayana ergi yöntemiyle belirlemiş oluruz.



Şekil 4- Burada $A = (2 \times 3 \times 5) = 30$, $B = (2 \times 2 \times 3 \times 5) = 60$, $C = (2 \times 3 \times 3 \times 5) = 90$; $D = 30$ ebob.

***V. Önerme*: Ortak bölenli büyüklüklerin birbirlerine oranı bir sayının başka bir sayıya oranı gibidir.**[1]

1 Bu önerme şu anlama gelir: Ortak bölenli a ve b büyüklükleri $a = (m \times c)$ ve $b = (n \times c)$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre ilk ifade $c/a = 1/m$ ya da $a/c = m/1$ ve ikinci ifade $c/b = 1/n$ şeklinde yazılabilir; bu ifadeler oranlanırsa $a/b = m/n$ elde edilir.

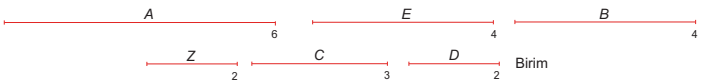
Burada A ve B verilen iki büyüklük ve bu sayıya ilişkin ortak bölenin C olduğunu varsayalım (*Şekil 5*). Bu durumda D ve E iki sayı olmak üzere büyüklükler $A/D = C$, $B/E = C$ şeklinde yazılabilir. İlk ifade $D/A = 1/C$ ya da $A/D = C/1$, benzer şekilde ikinci ifade $E/B = 1/C$ ya da $B/E = C/1$ şeklinde yazılabildiğine göre ilişkiler eşitlenirse önermede öngörüldüğü gibi $A/B = D/E$ elde edilir.

Not: Bu oransal eşitlik belirli sayılar için geçerlidir. A sayısının E büyüklüğüne eşit olan birim sayısı B sayısının da bir oranı olduğundan, A ve B sayıları orantılıdır. Buna göre A/B oranı bir büyüklüğün başka bir büyüklüğe oranı gibidir. Diğer bir deyişle bu büyüklükler belirli sayıların oranına eşittir.

Şekil 5- Burada $A = 6$, $B = 10$, $C = 2$ ebob, $A/B = D/E = 3/5$.

***VI. Önerme*: Eğer iki büyüklüğün oranı, iki sayının oranına eşitse bu büyüklükler ortak bölenlidir.**[1]

Önermede öngörüldüğü gibi A ve B büyüklükleri oranının C ve D sayılarının oranına eşit olduğunu varsayalım: $A/B = C/D$ (*Şekil 6*). Kanıtlamak için ilkin A büyüklüğünü C sayısına bölerek Z birim sayısını belirleyelim ve daha sonra Z sayısının D katını alarak E sayısını elde edelim: $A/Z = C/1$ ve $Z/E = 1/D$. Bu ifadeler çarpılırsa $A/E = C/D = A/B$ yazılabildiğine göre $B = E$ olması gerektiği görülür. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi A ve B büyüklükleri ortak bölenlidir.



Şekil 6- Burada $A/B = C/D = 2/3$, $A = (Z \times C) = (2 \times 3) = 6$, $E = (Z \times D) = (2 \times 2) = 4$, $Z = 2$ ebob.

1 Bir önceki önermenin tersi niteliğindedir. Eğer m ve n birer tamsayı olmak üzere $a/b = m/n$ ise, bu durumda $a = (m \times c)$ şeklinde m kısma ayrılabilir. Ayrıca $d = (n \times c)$ tanımlanarak $a/c = m/1$ ve $c/d = 1/n$ şeklinde yazılabilir. Oranlanırsa $a/d = m/n = a/b$ ve $b = d = (n \times c)$ olduğu görülür. Şu halde a ve b ortak bölenli iki büyüklüktür.

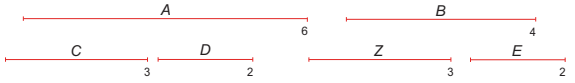
Not: Oranı teşkil eden iki sayı müşterek çarpanları bulunan iki sayının oranından oluştuğu için A/B oranını oluşturan A ve B büyüklükleri de ortak bölenli iki büyüklüktür.

***VII. Önerme*: Ortak bölenli iki hattın (büyüklüğün) kareleri oranı iki sayının kareleri oranına eşittir. Aksine iki hattın kareleri oranı iki sayının kareleri oranına eşitse hatlar ortak bölenlidir. Eğer iki hattın kareleri oranı iki sayının kareleri oranına eşit değilse söz konusu iki hat ortak bölenli değildir.**[1]

Ortak bölenli A ve B büyüklüklerinin verildiğini varsayalım (*Şekil 7*).

Kanıtı: *5. Önerme* gereği ortak bölenli A/B oranı iki sayının oranı şeklinde ifade edilebilir: $A/B = C/D$. Kareleri alınırsa $A^2/B^2 = (C/D)^2$ yazılabilir. Buna göre ortak bölenli iki büyüklük iki sayının kareleri oranına eşittir. Aksine eğer iki sayının kareleri oranı iki büyüklüğün kareleri oranına eşitse $A^2/B^2 = Z^2/E^2$ ya da $(A/B)^2 = (Z/E)^2$ yazılabilir ve neticede $A/B = Z/E$ elde edileceğinden büyüklükler ortak bölenlidir.

İki büyüklüğün kareleri oranı iki sayının oranları karesine eşitlenemezse o iki büyüklük ortak bölünemez. Bir an aksini düşünelim ve eşitliğin gerçekleştiğini düşünürsek A ve B ortak bölenli olacağından bu varsayım yanlıştır. Buna göre önerme olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.



Şekil 7- Burada $A/B = C/D = Z/E = 3/2$; $A^2/B^2 = C^2/D^2 = Z^2/E^2 = 9/4$.

Not: Aşağıdaki hususları açıklığa kavuşturalım:

1- İki hat boyunun ortak bölenli olması karelerinin de ortak bölenli olmasını gerektirir.

2- Herhangi iki hat karelerinin ortak bölensiz olması boylarının da ortak bölensiz olmasını gerektirir.

Ancak bu hususların tersi geçerli değildir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *IX. Önerme* olarak verilir.

***VIII. Önerme*: Uygun orantılı dört büyüklükte birinciyle ikinci ortak bölenliyse üçüncüyle dördüncü de ortak bölenlidir; aksine birinciyle ikincinin ortak bölenli olmaması halinde üçüncü de dördüncüyle ortak bölenli değildir.**[1]

A, *B*, *C* ve *D* büyüklükleri uygun oranlı olduklarından $A/B = C/D$ ilişkisi geçerlidir (*Şekil 8*). *A* ve *B* büyüklüklerinin ortak bölenli olmaları halinde *5. Önerme* gereği bu oran iki sayının oranına eşittir. Ancak bu durumda *C* ve *D* büyüklüklerinin oranı da iki sayının oranına eşit olduğundan ortak bölenli olmak zorundadır.

Eğer *A* ve *B* büyüklükleri ortak bölenli değilse bu durumda *C* ve *D* büyüklükleri de ortak bölenli değildir. Eğer bir an *C* ve *D* büyüklüklerinin ortak bölenli oldukları varsayılırsa *A* ve *B* büyüklüklerinin de ortak bölenli olmaları gerekirdi ki bu varsayım gereği yanlıştır. Böylece önerme hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

Şekil 8- Burada $A/B = C/D = ½$.

Not: Eğer büyüklükler hat olarak verilir, ayrıca *A* ve *B* kuvvetlerinin de ortak bölenli ya da bölensiz oldukları varsayılsa, bu önerme iki hatla uygun orantılı *C* ve *D* hatlarının kuvvetleri için de geçerlidir.

***IX. Önerme*: Verilen herhangi bir hatla biri sadece uzunluk, diğeri hem uzunluk ve hem de karesel ortak bölünemeyen iki hattın belirlenmesi.**[2]

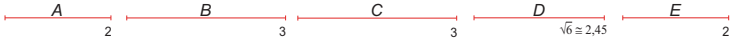
Burada amaç verilen bir *A* hattıyla orantılı, biri uzunluk, diğeri hem uzunluk ve hem de karesel ortak bölünmeyen iki hattın belirlenmesidir (*Şekil 9*).

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XI. Önerme* olarak verilir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *10. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer *a* verilen bir hat ve *m*, *n* karesel olmayan sayılarsa, *x* sayısı $a^2/x^2 = m/n$ olarak seçilir ve bu durumda *a* ve *x* ortak uzunluk yönünden ortak bölünemez. İkinci olarak *y* sayısı *a* ve *x* arasında uygun oranlı seçilir: $a/y = y/x$ ya da $y^2 = (a \times x)$. Bu durumda $a^2/y^2 = a/x$ $[= \sqrt{m}/\sqrt{n}]$ yazılabilir. Bu durumda *x* sayısı *a* sayısıyla sadece uzunluk yönünden bölünemezken, *y* hem karesel ve hem de uzunluk yönden ortak bölünemez.

İlkin kareler oranları ortak bölenli olmayan, diğer değişle benzer düzlemsel sayılar oluşturmayan B ve C sayıları göz önünde bulundurulur ve verilen A hattıyla birlikte $E/B = A/C$ oranı kurulur. Bu durumda A^2/C^2 oranı iki sayının ortak böleni olmayan iki sayının karesine eşit olduğundan A ve C hatları uzunluk yönünden ortak bölenli değildir.

Ancak ortak bölensiz A ve D sayılarında eğer A^2/D^2 oranının ortak bölenli iki sayının oranına karşı düşmesi öngörülürse bu durumda A ve C büyüklükleri arasında uygun oranlı bir D büyüklüğünün $A/D = D/C$ ilişkisini sağlaması gerekir. Bu durumda $A/D^2 = 1/C$ ya da A ile çarpılırsa, $A/C = (A/D)^2$ yazılabilir. Buna göre A ve C hatları uzunluk yönünden ortak bölensiz olmakla birlikte A^2 ve D^2 büyüklükleri ortak bölünebilir. Neticede C büyüklüğü A büyüklüğü ile hem uzunluk ve hem de karesel ortak bölensizdir. Ayrıca karesel ortak bölensiz bir hat uzunluk yönünde de ortak bölensizdir.



Şekil 9- Burada $A/C = E/B = 2/3$, $A^2/C^2 = 4/9$ ortak bölensiz;
$A/C = 2/3$, $A/D = 2/\sqrt{6}$ ortak bölensiz ancak $A^2/D^2 = 4/6 = 2/3$ ortak bölenli.

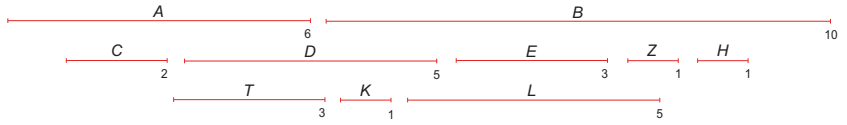
Not: İki sayı oranının oranlar karesine eşit olmaması açıktır. Zira bu durum karesel bir sayının karesel olmayan bir sayı oranına eşit olacağı anlamına da gelir. Aksi halde bu oranın oranlar karesine eşit olması gerekir. Ne var ki bu durumda sayılardan biri kare olduğundan diğerinin de kare olması gerekir ki bu mümkün değildir. Aynı husus karesel bir sayının kendinden bir fazla olan sayıya olan oranı için de geçerlidir. Zira eğer bu sayı kare olsaydı, onunla ve ondan fazla olan kare arasında bir ortak birimin bulunması gerekir. Ancak bir sayıyla önceki arasındaki oran, karesel sayıların oranına eşit değildir. Aksi halde onlar arasında uygun bir ortak değerin ya da onları bölen en küçük bir sayının bulunması gerekir.

Eğer ikiden fazla bir dizi üstel artan ortak bölenli hat elde edilecekse, öncelikle söz konusu hatların sayılar oranında kareleri kurulur. Ne var ki A^2/E^2 oranını, örneğin herhangi başka bir B/C oranına göre kurmak, diğer

bir deyişle *E* sayısını ya da kenarını belirlemek gerekir. Bunun için *A* sayısı uygun olan *B* sayısına bölünür, bulunan sonuç *C* sayısıyla çarpılır. Ne var ki kenarlardan biri elde edilen *E* sayısı, diğeri ise bir paralelkenarın diğer kenarına karşı düşen *A* sayısıdır.

***X. Önerme*: Aynı büyüklüğe bölünen büyüklüklerin kendileri de ortak bölenlidir.**[1]

A ve *B* büyüklüklerinin *C* büyüklüğüyle ortak bölenli olduğunu varsayalım (*Şekil 10*). Bu durumda *A*/*C* = *E*/*H* ve *C*/*B* = *Z*/*D* ilişkileri yazılabilir. Ancak bu sayılarla aynı oranda olan *T*, *K* ve *L* gibi sayılar türetilebilir; *E*/*H* = *T*/*L* ve *Z*/*D* = *L*/*K*. Bu durumda *A*/*C* = *T*/*L* ve *C*/*B* = *L*/*K* elde edilir. Bu sonuncu oranlar oranlanırsa *A*/*B* = *T*/*K* yazılabildiğine göre önermede öngörüldüğü gibi sayılar ortak bölenlidir.



Şekil 10- Burada *A*/*C* = 6/2 =3, *B*/*C* = 10/2 = 5; *A*/*B* = 6/10 = 3/5.

***XI. Önerme*: Ortak bölenli iki büyüklüğün toplamı da her iki büyüklükle ortak bölenlidir.**[2]

Eğer *AB* ve *BC* ortak bölenli iki büyüklük ve *D* bunları ortak bölen bir sayısı olduğundan *D* sayısı (*AB* + *BC*) sayısının da ortak bölenidir (*Şekil 11*).

Şekil 11- Burada *AB*/*BC* = 6/4 = (2 ×3)/ (2 ×2) = 3/2, ortak bölen *D* =2 ;
(*AB* + *BC*)/*D* = 10/2 = 5.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *a* ve *b* aynı miktara bölünebildiğinden *a*/*c* = *m*/*n* ve *c*/*b* = *p*/*q*. Aşağıdaki eşdeğerlikler kurulabilir: *m*/*n* = (*m* × *p*)/(*n* × *p*) ve *p*/*q* = (*n*× *p*)/(*n* × *q*). Oranlar eşitlenirse *a*/*c* = (*m* × *p*)/(*n* × *p*) ve *c*/*b* = (*n*× *p*)/(*n* × *q*). Oranlanırsa *a* ve *b* büyüklüklerinin *a*/*b* = (*m* × *p*)/(*n* × *q*) ortak bölenli oldukları kanıtlanmış olur.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XV. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *a* = (*m* × *c*) ve *b* = (*n* × *c*) şeklinde ortak bölenli iki sayıdır. Bu sayıların toplamı (*a* + *b*) = [*c* × (*m* + *n*)] şeklinse yazılabildiğine göre *a* ve *b* sayılarıyla ortak bölünebilir.

***XII. Önerme*: Eğer uygun oranlı dört hattan birinciyle ikincinin kareler farkı birinciyle boyca ortak bölenli ya da bölensiz başka bir hattın karesine eşitse, bu durumda üçüncüyle dördüncünün kareler farkı bir kareye eşit olduğu sürece, karesel bir sayı olan üçüncüyle ortak bölenli ya da ortak bölensiz olabilir.**[1]

Uygun oranlı A, B, C ve D hatları (ya da $A/B = C/D$) için $A^2 = B^2 + E^2$ ve $C^2 = D^2 + Z^2$ ilişkilerinin geçerli olduğunu varsayalım (*Şekil 12*). Bu durumda $A^2 - B^2 = E^2$ ve $C^2 - D^2 = Z^2$ ayrıca uygun oran nedeniyle $A^2/B^2 = C^2/D^2$ ya da $(E^2 + B^2)/B^2 = (D^2 + Z^2)/D^2$ yazılabilir. Sonuncu ifade $E^2/B^2 = Z^2/D^2$ şeklinde yazılabilir. Karekökü alınır $E/B = Z/D$ ve değiştirilirse $B/D = E/Z$ ve ayrıca varsayılan uygun oran nedeniyle $B = (A \times D)/C$ olduğundan $A/E = C/Z$ elde edilir. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi A ve E ortak bölensiz olup olmamasına göre C ve Z ortak bölenli ya da bölensiz olur.

Şekil 12- Burada $A(= 5)/B(= 3) = C(= 10)/D(= 6) = 5/3$;
$E^2 = (A^2 - B^2) = (25 - 9) = 16$ ve $Z^2 = (C^2 - D^2) = (100 - 36) = 64$; $A/E = C/Z = 10/8$.

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Uygun oranlı hatların AC, CB, DZ ve ZE olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 13*). Bu durumda $AC^2/BC^2 = DZ^2/ZE^2$ ve farklar alınırsa $AC^2/(AC^2 - BC^2) = DZ^2/(DZ^2 - ZE^2)$ yazılabilir. Şu halde $AC/\sqrt{(AC^2 - BC^2)} = DZ/\sqrt{(DZ^2 - ZE^2)}$ geçerlidir. Buna göre AC ile $\sqrt{(AC^2 - BC^2)}$ ortak bölenli olup olmamasına göre DZ ile $\sqrt{(DZ^2 - ZE^2)}$ ortak bölenli ya da ortak bölensizdir.

Şekil 13- Burada $AC = 5$, $CB = 3$, $DZ = 10$ ve $ZE = 6$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XIV. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: a, b, c ve d uygun oranlı hatlar olduğundan $a/b = c/d$, karesi alınırsa $a^2/b^2 = c^2/d^2$ ya da $a^2/(a^2 - b^2) = c^2/(c^2 - d^2)$ yazılabilir. Sonuncu ilişkinin karekökünden $\frac{a}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} = \frac{c}{\sqrt{(c^2 - d^2)}}$ elde edilir. Buna göre, a ve $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ortak bölenli olup olmamasına bağlı olarak, $k = m/n$ için, $\sqrt{(a^2 - b^2)} = ka$ ve $\sqrt{(c^2 - d^2)} = kc$ ilişkileri geçerlidir.

***XIII. Önerme*: Herhangi iki hattın uzunu, eğer üzerinde kısa hat karesinin dörtte birine eşit bir dörtgen kurulabilecek şekilde, birbiriyle *ortak bölenli* iki kısma ayrılırsa, bu durumda uzunla kısa hatların kareleri arasındaki fark uzun hatla *ortak bölenli* olmalıdır.**[1]

Aksine eğer uzun hattın karesiyle kısa hattın karesi arasındaki fark uzun hatla *ortak bölenli*yse bu durumda uzun hattın kısımları da *ortak bölenli*dir.

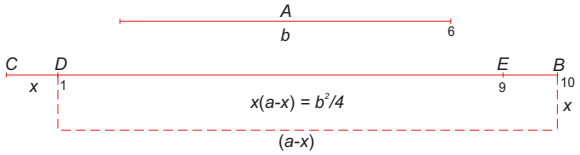
BC > *A* olmak üzere *BC* (= *a*) ve *A* (= *b*) hatlarının verildiğini varsayalım (*Şekil 14*). *BC* hattı üzerinde alanı $A^2/4$'e eşit olan bir dörtgen kurulursa, bu durumda $(A/2)^2 < (BC/2)^2$ olduğundan *BC* hattı *D* noktasıyla eşit olmayan iki kısma ayrılmış olur. Burada *CD* (= *x*) aranan dörtgenin kısa kenarı ve *DB* [= (*a* – *x*)] uzun kenarı olduğuna göre, öneri gereği $(CD \times DB) = A^2/4$ ya da $4.(CD \times DB) = A^2$ olması istenir.

Ancak *2. Makale 5. Önerme* gereği bir hat hem eşit ve hem de eşit olmayan iki kısma bölündüğünde, eşit olmayan kısımların çarpımı ile yarı fark karesinin toplamı, eşit kısmın karesine eşittir. Buna göre $(CD \times DB) + DB^2/4 = BE^2/4$ yazılabilir. Bu ilişki dörtle çarpılır ve alan koşulu uygulanırsa $A^2 + DB^2 = BE^2$ elde edilir. Ancak koşul gereği *BD* ve *DC* ortak bölenli olduğu varsayıldığından *BC* = *BD* + *DC* nedeniyle *BC* ve *DC* ayrıca *DC* ve *CE* de ortak bölenlidir. Neticede *BC* ve *BE* ortak bölenli olduğu kanıtlanmış olur.

Aksine eğer *BC* ve *BE* ortak bölenliyse, *EC* ve *DC* ortak bölenli olduğundan, *BC* ve *DC* ve neticede önermede öngörüldüğü gibi *BD* ve *DC* de ortak bölenli olur.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XVII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: $a > b$ olmak üzere *a* ve *b* hatları verildiğinde uzun hat üzerinde alanı $b^2/4$ olan bir dörtgen oluşturacak şekilde bir *x* noktası belirlenirse bu durumda $x.(a - x) = b^2/4$ ilişkisinin sağlanması gerekir. Buna göre *x* ve (*a* - *x*) hatlarının boyca ortak bölenli olması için $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ve *a* hatlarının da ortak bölenli olması ya da ortak bölensiz olması $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ve *a* hatlarının ortak bölenli olmaması ya da tersine bağlıdır. Bu durumda *2. Makale 5. Önerme* gereği eşit olmayan kısımların çarpımı ile yarı fark karesinin toplamı, eşit kısmın karesine eşittir: $x.(a - x) + (a/2 - x)^2 = a^2/4$. Eğer dörtle çarpılır ve yukarıdaki dörtgen ilişkisinden yararlanılırsa $b^2 + (a - 2x)^2 = a^2$ ya da $\sqrt{(a^2 - b^2)} = (a - 2x)$ yazılabilir. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ ile *a* ortak bölenlidir.

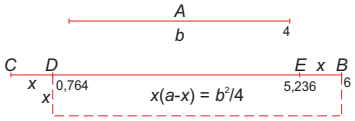


Şekil 14- Burada $BC = a = 10$, $A = b = 6$, $CD = x$, $BD = (a - x)$, $BE = (BC - CD) = x$, $DE = (a - 2x) = \sqrt{(a^2 - b^2)} = 8$; $DE/CB = 8/10$; $x(a - x) = b^2/4 = 36/4 = 9$ ilişkisinden $x^2 - 10x + 9 = 0$ ya da $x = 1$ ve 9.

***XIV. Önerme*: Herhangi iki hattın uzunu, eğer üzerinde kısa hat karesinin dörtte birine eşit bir dörtgen kurulabilecek şekilde, birbiriyle *ortak bölensiz* iki kısma ayrılırsa, bu durumda uzunla kısa hatların kareleri arasındaki fark uzun hatla ortak bölensizdir.**[1]

Aksine eğer uzun hattın karesiyle kısa hattın karesi arasındaki fark uzun hatla ortak bölenli değilse, bu durumda uzun hattın kısımları da ortak bölenli değildir.

Önceki önermede olduğu gibi aynı yol izlenerek burada da $A^2 + DB^2 = BE^2$ sonucuna ulaşılır (*Şekil 15*). Bu durumda *BD ve DC* ortak bölenli olmadığından *BC* ve *DC* ayrıca *DC* ve *CE* de ortak bölenli değildir. Bu husus önermede öngörüldüğü gibi tersi için de geçerlidir.



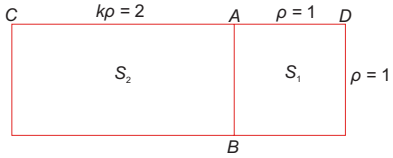
Şekil 15- Burada $BC = a = 6$, $A = b = 4$, $CD = x$, $BD = (a - x)$, $BE = (BC - CD) = x$, $DE = (a - 2x) = \sqrt{(a^2 - b^2)} = 4{,}472$; $DE/CB = (4{,}472)/6$; $x(a - x) = b^2/4 = 4$ ilişkisinden x2 - 6x + 4 = 0 ya da x = 3 ± $\sqrt{5}$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XVIII. Önerme* olarak yer alır ve bir önceki önermenin ortak bölensiz haline karşı düşer.

***XV. Önerme*: Rasyonel ortak bölenli kenarlardan oluşan bir dörtgenin alanı da rasyoneldir.**[1]

Verilen *BC* dörtgenin *AC* ve *AB* kenarlarının ortak bölenli olduğunu varsayalım; bu durumda dörtgenin kenarları ve alanı rasyoneldir (*Şekil 16*).

Kanıtı; Dörtgenin *AB* kenarı üzerine bir *BD* karesi kurulduğunda *BD* karesi rasyoneldir. *AC* ve *AD* kenarlarının kareleri ortak bölenli olduğundan *BC* dörtgeni alanı da *BD* karesiyle kuvvette ortak bölenlidir. Şu halde *BC* alanı rasyoneldir.



Şekil 16- Burada $k = 2$, $\rho = 1$; $S_1/S_2 = \rho^2/k\rho^2 = 1/k = ½$.

***XVI. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine bir dörtgen kurulmuş ise, kurulan dörtgenin diğer kenarı da rasyonel olmak zorundadır.**[2]

Bu önermeyi kanıtlamak için verilen rasyonel *AB* kenarı üzerinde *BD* karesi kurulur (*Şekil 16*). Bu durumda her ikisi rasyonel olduğundan *BD* karesi *BC* dörtgeniyle ortak bölenlidir. *AB* ve *AC* ortak bölenli olduğundan önermede öngörüldüğü gibi *AC* rasyoneldir.

***XVII. Önerme*: Eğer rasyonel doğrulardan oluşan bir dörtgenin sadece kareleri (kuvvette) ortak bölenliyse bu durumda buna eşit kare kenarları irrasyoneldir ve *ortalayan* (*mütevassit*) olarak adlandırılır.**[3]

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XIX. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Bir dörtgenin kenarı ρ olmak üzere $\rho^2/k.\rho^2 = \rho/k.\rho$ ilişkisi geçerlidir, burada ρ^2 ve $k.\rho^2$ ortak bölenli olduğundan ρ ve $k.\rho$ da ortak bölenli ve rasyoneldir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XX. Önerme* olarak verilir. Önceki önermenin tersi niteliğindeki bu önermede rasyonel *AB* hattı ρ ile ifade edilirse diğer ortak bölenli rasyonel bir kenar $\sigma = k.\rho$ ve dörtgen alanı $k.\rho^2$ şeklindedir. Buna göre dörtgenin diğer kenarı $k.\rho^2/\sigma = k.\rho^2.\sigma/\sigma^2 = k.(m/n).\sigma = k'.\sigma$ olarak ifade edilebildiğinden kenarlar ortak bölenlidir (burada $\rho^2/\sigma^2 = m/n$ ile hatların rasyonel oldukları varsayılmıştır).

3 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXI. Önerme* olarak verilir.

Önceki önermelerde kullanılmış bulunan *Şekil 16*'daki *BC* dörtgeninde, rasyonel *AB* ve *AC* hat boylarının ortak bölensiz oldukları varsayılır. Önermeyi kanıtlamak için kenarları *AB* hattına eşit bir kare oluşturulur. Bu kare rasyonel olmakla birlikte, *BC* dörtgeninin *AB* ve *AC* kenarları ortak bölensiz olduğundan, kuvvette *BC* dörtgeniyle ortak bölensizdir. Neticede önermede öngörüldüğü gibi *BD* ile *BC* alanları karesi her ne kadar ortak bölenli olsa da karekökü irrasyonel bir sayıdır.[1]

Not: 1- *Ortalayan* (*Mütevassit*, *Medial*) hatlar uzunluk yönünden ortak bölenli olabilir:

AB hattının uzunluk yönünden rasyonel olduğunu varsayalım ve örnek olarak kenarları *AC* ve *AB*/4 olan bir dörtgen alan göz önünde bulunduralım. *Ortalayan* hatların kareleri bu durumda *BC* alanının ¼ oranında olan kenarlarıyla ortak bölenlidir.

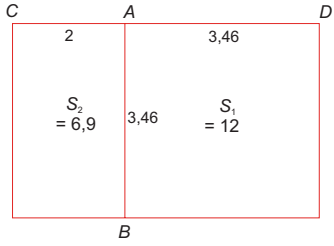
2- Karesi alınan *ortalayan* hatlar ortak bölenli olabilir:

Bir *ortalayan* hat, ancak kenarları *AC* ve *AB*/4 olan bir *BC* alanının karesine eşitse, karesel ortak bölenli olabilir. Bu durumda kenarların karesine ilişkin oran iki kare olmayan sayının oranı gibidir.

3- *Ortalayan* hatların genellikle uzunluk ve kareleri ortak bölünemez:

---

1 Önerme hatların ρ ve $\rho\sqrt{k}$ biçiminde rasyonel olduğu ve sadece kareleri alındığında ortak bölenli oldukları anlamına gelir (*Şekil 16-1*). *Ortalayan* (*Medial*) ismi hatların orta oran özelliğinden gelir: $\rho/x = x/\rho\sqrt{k}$. Bu durumda $x^2 = \rho^2\sqrt{k}$.ya da *8. Önerme* gereği $\rho/\rho\sqrt{k} = \rho^2/\rho^2\sqrt{k}$ yazılabilir. Buna göre bu hatlar uzunluk ve kuvvet yönünden ortak bölenli değildir. Burada ρ ile $\rho\sqrt{k}$ ve ρ^2 ile $\rho^2\sqrt{k}$ ortak bölenli olmadığı gibi ortalayan (*medial*) büyüklük $x = \rho.k^{1/4}$ ve karesi $x^2 = \rho^2\sqrt{k}$ irrasyoneldir.



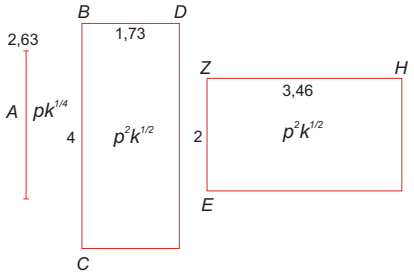
Şekil 16-1 Burada $k = 3$, $\rho = 2$; $AC = \rho = 2$, $AB = AD = \rho\sqrt{k} = 2\sqrt{3} = 3{,}46$;

$S_1 = k\rho^2 = 12$; $S_2 = \sqrt{k}\rho^2 = 6{,}93$; $S_1/S_2 = k\rho^2/\sqrt{k}\rho^2 = \sqrt{k} = \sqrt{3}$.

Genelde *BC* alanın *AB* ve *AC* kenarları uzunluk bakımından ortak bölünemediği gibi, rasyonel olsa dahi *BC* alanının karesine eşit bu hatların kareleri de ortak bölünemez.

***XVIII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hattın üzerine alanı *ortalayan* (*mütevassit*) bir hattın karesine eşit bir dörtgen kurulursa, dörtgen eninin ancak karesi rasyoneldir.**[1]

Burada *ortalayan* hattın A $(= pk^{1/4})$, rasyonel hattın BC $(= \sigma)$ ve alanı A^2 $(= p^2\sqrt{k})$ olan dörtgenin ise CD olduğunu varsayalım (*Şekil 17*). Amaç CD dörtgeninin eni BD hattı karesinin rasyonel olduğunu kanıtlamaktır.



Şekil 17- Burada $p = 2$, $k = 3$, $A = pk^{1/4} \cong 2{,}63$; $BC/ZE = ZH/BD = 2$;
$A^2 = [BC(= 4) \times BD(= \sqrt{3}] = [ZE(= 2) \times ZH(= 2\sqrt{3}] = p^2\sqrt{k} \cong 6{,}93$.

Kanıtı: Şimdi EH dörtgeninde kenarların rasyonel, ortak bölensiz ve ayrıca alanının CD alanına eşit olduğunu varsayalım. Bu eşit alanlı dörtgenlerde $\angle(B) = \angle(Z)$ ve $BC/ZE = ZH/BD$ yazılabilir. Burada BC ile ZE hatlarının kareleri de ortak bölenli olduğundan ZH ile BD hatlarının da kareleri ortak bölenli olur. Şu halde ZH hattının karesi rasyonel olduğuna göre BD hattının karesi de rasyoneldir. Ancak CD ile BD^2 ortak bölensiz olduğundan BC ve BD hatları da uzunluk yönünden ortak bölensizdir. Neticede önermede öngörüldüğü gibi BD hattının karesi rasyoneldir.[2]

---

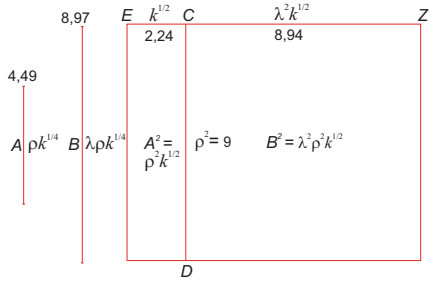
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Medial hattın karesi $\rho^2\sqrt{k}$ ve rasyonel hat σ olduğuna göre aranan dörtgenin eni $\rho^2\sqrt{k}/\sigma = \rho^2\sqrt{k}.\sigma/\sigma^2 = (m/n)\sqrt{k}.\sigma = \sqrt{k}.\sigma$ olarak elde edilir ve bu hattın karesi rasyoneldir. Öklid kanıtını iki aşamada gerçekleştirir. İlk aşamada σ verilen rasyonel hat ve x dörtgenin diğer kenar olmak üzere dörtgenin alanı $\rho^2\sqrt{k} = (\sigma \times x)$ olmalıdır. Bu ifade $\sigma/\rho = \rho\sqrt{k}/x$ şeklinde yazılabilir. Karesi $\sigma^2/\rho^2 = \rho^2.k/x^2$ rasyonel olduğundan σ^2 ile ρ^2 ve $\rho^2.k$ ile x^2 ve ortak bölünebilir. Ayrıca x^2 rasyonel olduğundan x hattı da rasyoneldir. İkinci aşamada $\rho\sqrt{k}$ ile ρ hatlarının ortak bölünebilirliği araştırılır. Ancak $\rho\sqrt{k}/\rho = \rho^2k/\rho^2\sqrt{k}$ yazılabildiğinden ρ^2k ile $\rho^2\sqrt{k}$ ortak bölenlidir. Ancak $\rho^2\sqrt{k} = (\sigma \times x)$ ve $\rho^2.k$ ile x^2 ortak bölenli olduğundan x^2 ile $(\sigma \times x)$ de ortak bölenlidir. Ayrıca $x^2/(\sigma \times x) = x/\sigma$ ve neticede x ile σ ortak bölenlidir.

2 Buna göre bir A $(= a)$ *ortalamalı* hat ve rasyonel BC $(= \sigma)$ hattı verildiğinde $CD = A^2/BC$ $(x = a^2/\sigma)$

***XIX. Önerme*: Bir *ortalayan* hatla ortak bölenli hattın kendisi de *ortalayan* bir hattır.[1]**

A hattının *ortalayan* ve *B* hattının bu hatla ortak bölenli başka bir hat olduğunu varsayalım. Bu durumda *B* hattı da *ortalayan*dır.

Kanıtı: Bunun için rasyonel *CD* hattı üzerine *A* ve *B* hatlarının karelerine eşit olan *DZ* ve *DE* alanlarını kuralım. Bu iki alan ortak bölenli olduğundan *ZC* ve *CE* hatları ortak bölenli olur. Bu durumda *ZE* hattının karesi rasyoneldir. Ancak uzunluk bakımından *CD* hattıyla ortak bölenli değildir. Şu halde *DE* bir *ortalayan* alan olduğundan karesine eşit olduğu *B* hattı da önermede öngörüldüğü gibi bir *ortalayan* hattır.



Şekil 18- Burada $\lambda = 2$, $\rho = 3$, $k = 5$; $A^2 = \rho^2\sqrt{k} \cong 20$; $B^2 = \lambda^2\rho^2\sqrt{k} \cong 80$.

Not: Eğer *B* hattı *A* hattıyla ancak kareleri alındığında ortak bölenli olsalar bile, aynı yol izlenerek yine *B* hattının *ortalayan* olduğu kanıtlanabilir.

***XX. Önerme*: Bir *ortalayan* alanın başka bir *ortalayan* alanla farkı irrasyoneldir.[2]**

---

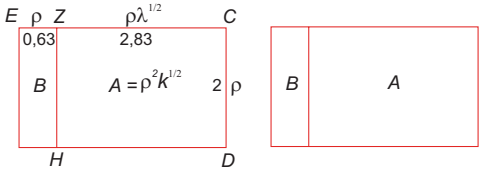
rasyonel hattı *BC* ile ortak bölünmez. Burada *a* bir *ortalamalı* hat olduğundan a^2 irrasyonel buna karşın a^4 rasyoneldir. Şu halde σ^2 rasyonel olduğundan $x^2 = a^4/\sigma^2$ rasyonel bir sayıdır. Ancak bir rasyonel ve irrasyonel sayının çarpımı ya da oranı bir irrasyonel sayı tanımlar.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXIII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer verilen hat $\rho k^{1/4}$ ise $\lambda\rho k^{1/4}$ ilişkisi bununla ortak bölünebilir bir hattır. Buna karşın $\sqrt{\lambda}.\rho k^{1/4}$ ise sadece karesiyle ortak bölünebilir bir hattır. Ancak $\lambda.\rho$ ve $\sqrt{\lambda}.\rho$ rasyonel olduğundan ρ'olarak ifade edilebilir ve $\rho\sqrt{k}^{1/4}$ açıkça *ortalamalı*dır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *26. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer *ortalayan* alanlar aynı rasyonel ρ hattına uygulanırsa ρ, $k^{1/2}\rho$, ρ, $\lambda^{1/2}\rho$ tanımlanabilir. Şu halde fark alan $(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda})\rho^2$ olacağından ve $k' = (\sqrt{k} - \sqrt{\lambda})$ eşitliği yazılamadığından fark alan irrasyoneldir. Öklid kanıtını izleyebilmek için $x = k^{1/2}\rho$ ve $y = \lambda^{1/2}\rho$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\rho(x - y) = (\rho \times z)$ fark alanının bir an rasyonel, z ve ρ büyüklüklerinin ortak bölenli olduğunu varsayalım. Ancak $(\rho \times x)$ ve $(\rho \times y)$ *ortalayan* olduğundan x ve y büyüklükleri rasyonel olmakla birlikte ρ ile ortak bölenli değildir. Şu halde y ve z ortak bölenli değildir. Ayrıca $y/z = y^2/(y \times z)$ yazılabildiğine göre y^2 ve $(y \times z)$ büyüklükleri de ortak bölenli değildir. Ancak $(y^2 + z^2)$ ve y^2 ile $2(y \times z)$ ve $(y \times z)$ ortak bölenli olmakla birlikte $y^2 + z^2$

Eğer *AB* ve *A* alanları *ortalayan*sa, bu alanların *B* farkı da *ortalayan*dır (*Şekil 19*).

Kanıtı: Önermeyi kanıtlamak amacıyla *CD* hattının rasyonel olduğunu varsayalım, üzerine *A* ve *B* alanına eşit alanlar kuralım. Bu durumda *AB* alanının eni *CE* ve *A* alanının eni *CZ* olur. Bu iki alanın kareleri rasyonel olmakla birlikte, kenar uzunlukları *CD* hattıyla ortak bölünmez. İki alanın farkı *HE* irrasyoneldir. Bir an rasyonel olduğu kabul edilirse *ZE* eninin, ayrıca ZE^2 ve CZ^2 karelerinin de rasyonel olması gerekir. *CZ* ve *ZE* büyüklükleri uzunluk yönünden ortak bölensiz olduğundan ($CZ \times ZE$) çarpımı ZE^2 ve CZ^2 kareleriyle ortak bölensizdir. Şu halde ZE^2 ile CZ^2 ve $2(CZ \times ZE)$ ortak bölensiz ve neticede *HE* irrasyonel olması gerekir. Ancak *HE* rasyonel varsayıldığından bu bir çelişkidir. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi *HE* fark alanının irrasyonel olması gerekir.



Şekil 19- Burada, $\rho = 2$, $\lambda = 2$, $k = 3$; $A = \rho^2\sqrt{\lambda} \cong 5{,}66$; $(A + B) = \rho^2\sqrt{k} \cong 6{,}93$; $B = \rho^2(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) \cong 1{,}27$.

Not: İki *ortalayan* hat ortak bölenli ya da bölensiz olabilir:

1- Hatların ortak bölenli olması halinde, hatların farkı da ortak bölenli ve irrasyonel olmalıdır. Bunların ortak bölenli olması *CE* ve *CZ* hatlarının, ayrıca ($CE \times CZ$) ve $2(CE \times CZ)$ çarpımlarının ortak bölenli olması anlamına gelir. Bu durumda bunların irrasyonel kareleri bulunur. Böylece rasyonel olan CE^2 ve CZ^2 ile ZE^2 ortak bölenli olur. Buna göre karesi alınan *EZ* hattı *CE* ile ortak bölensiz olmalıdır. Diğer bir deyişle *HE* alanı irrasyoneldir.

2- Ortak bölensiz olmaları halinde *CE* ve *CZ* hatları da ortak bölensizdir. Rasyonel olan bu iki hattın karesi EZ^2 ile ortak bölenli olur. Neticede

---

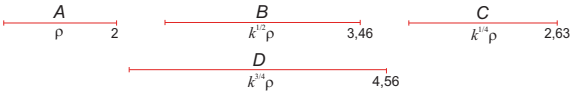
ve $2(y \times z)$ ayrıca $(y + z)^2$ ve $(y^2 + z^2)$ ile x^2 ve $(y^2 + z^2)$ ortak bölenli değildir. Ne var ki $(y^2 + z^2)$ ve bunun sonucunda x^2 ya da x rasyonel kabul edilmişti ki bu imkânsızdır. Şu halde $(\rho \times z)$ fark alanı önermede öngörüldüğü gibi rasyonel değildir.

HE alanı irrasyonel, diğer bir deyişle *ortalayan* olmayan bir irrasyonel alan anlamına gelir.

***XXI. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli olan ve rasyonel bir alanın kenarlarına karşı düşen iki *ortalayan* hattın belirlenmesi.[1]**

Sadece kareleri rasyonel olan *A* ve *B* hatlarına ilişkin *C* ortalayan oranı ve bu üç büyüklükle bir uygun oran oluşturan dördüncü bir *D* hattı hesaplanır (*Şekil 20*). Bu durumda *C* ve *D* önermede aranan rasyonel alanın *ortalayan* hatlı kenarlarına karşı düşer.

Kanıtı: Sadece kareleri ortak bölenli *A* ve *B* hatları bir (*A* × *B*) *ortalayan* alanı tanımlar. Buna göre *C* de *ortalayan* bir hattır. Ayrıca $A/B = C/D$ uygun oranı nedeniyle *C* ve *D* hatlarının da ancak kareleri ortak bölenli ve *D* hattı da *ortalayan* bir hattır. Neticede önermede öngörüldüğü gibi *C* ve *D* hatları *ortalayan* olduğu gibi (*C* × *D*) çarpımı da *ortalayan* bir alanı tanımlar.



Şekil 20- Burada $k = 3$, $\rho = 2$; $A = \rho = 2$, $B = \rho\sqrt{k} \cong 3{,}46$; $A/B = C/D = 1/\sqrt{k} \cong 0{,}707$; $(C \times D) = k\rho^2 = 12$.

***XXII. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli olan ve *ortalayan* bir alanın kenarlarına karşı düşen iki *ortalayan* hattın belirlenmesi.[2]**

Sadece kareleri rasyonel olan *A, B* ve *C* hatları ile *A* ve *B* hatları arasında $(A \times B) = D^2$ orta oranlı bir *D* hattıyla, $A/C = D/E$ düz oranı sağlayan bir dördüncü *D* hattı hesaplanır (*Şekil 21*). Bu durumda *D* ve *E* hatları

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXVII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Amaç ρ ve $\sqrt{k}\rho$ gibi sadece kareleri ortak bölünebilir iki rasyonel hattı belirlemektir. Bunun için ilkin ρ ve $\sqrt{k}\rho$ hatlarının $k^{1/4}\rho$ orta oranına ilişkin değeri bulur. Sonra $\rho/k^{1/2}\rho = k^{1/4}\rho/x$ ilişkisinden $x = k^{3/4}\rho$ türetir. Önermede bulunması istenen hatları $k^{1/4}\rho$ ve $k^{3/4}\rho$ olarak belirler. Şüphesiz $k^{1/4}\rho$ *ortalayan* bir hattır. Ayrıca $\rho/k^{1/2}\rho = k^{1/4}\rho/k^{3/4}\rho$ nedeniyle ρ ve $k^{1/2}\rho$ ile $k^{1/4}\rho$ ve $k^{3/4}\rho$ kareleri ortak bölenli, ayrıca $k^{1/4}\rho$ *ortalayan* olduğundan $k^{3/4}\rho$ hattı da *ortalayan*dır: Çarpımları önermede öngörüldüğü gibi $(k^{1/4}\rho) \times (k^{3/4}\rho) = k\rho^2$ rasyonel bir alana karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXVII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Öklid bunun için ρ, $\sqrt{k}\rho$ ve $\sqrt{\lambda}\rho$ şeklinde sadece kareleri ortak bölünebilir üç hattan hareket eder. İlkin ρ ve $\sqrt{k}\rho$ hatlarının $k^{1/4}\rho$ orta oranına ilişkin değeri bulur. Sonra $\rho/\lambda^{1/2}\rho = k^{1/4}\rho/x$ ilişkisinden $x = \lambda^{1/2}k^{1/4}\rho$ hattını türetir. Önermede bulunması istenen *ortalayan* hatları $k^{1/4}\rho$ ve $\lambda^{1/2}k^{1/4}\rho$ olarak belirler. Şüphesiz $k^{1/4}\rho$ *ortalayan* bir hattır. Ayrıca $\rho/\lambda^{1/2}\rho = k^{1/4}\rho/x$ nedeniyle ρ ve $\lambda^{1/2}\rho$ ile $k^{1/4}\rho$ ve x kareleri ortak bölenli, ayrıca $k^{1/4}\rho$ *ortalayan* olduğundan x hattı da *ortalayan*dır. Aranan *ortalayan* alan $(x \times k^{1/4}\rho) = \sqrt{k\lambda}\rho^2$ olarak elde edilir.

önermede aranan *ortalayan* alanın kenarlarını oluşturan *ortalayan* hatları belirler.

Kanıtı: Burada $(A \times B) = D^2$ nedeniyle D hattı *ortalayan* bir alanı tanımlar. Ayrıca $A/C = D/E$ oranı nedeniyle, A ve C hatlarının sadece kareleri ortak bölenli olduğundan D ve E hatlarının da sadece kareleri ortak bölenlidir. Neticede karesi D hattıyla ortak bölenli olan E hattı da *ortalayan* bir hattır. Yukarıda tanımlanan düz ve orta oranlar düzenlenirse $A/D = C/E = D/B$ ya da $(D \times E) = (B \times C)$ ifadesiyle aranan *ortalayan* alanın E ve D kenarları belirlenmiş olur.

Şekil 21- Burada $k = 3$, $\lambda = 5$, $\rho = 2$; $A = \rho = 2$; $B = \rho\sqrt{k} \cong 3{,}46$; $C = \rho\sqrt{\lambda} \cong 4{,}47$;
$D = \rho k^{1/4} \cong 2{,}63$;
$(D \times E) = (B \times C) = \rho^2\sqrt{k\lambda} \cong 15{,}49$; $E = \rho\, k^{1/4}\sqrt{\lambda} = 5{,}88$.

***XXIII. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli olan ve kenarları iki *ortalayan* hattan oluşan alan ya rasyonel ya da *ortalayan* bir alandır.**[1]

AB ve AC hatlarının *ortalayan* ve bunların oluşturduğu $BC = (AB \times BC)$ alanın ise rasyonel ya da *ortalayan* olabileceğini kanıtlayalım (*Şekil 22*).

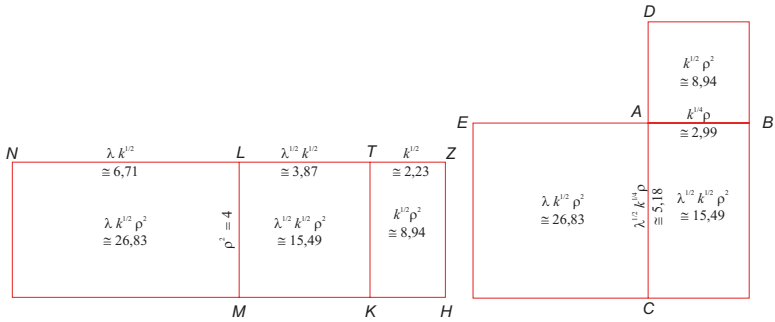
Kanıtı: Önermeyi kanıtlayabilmek amacıyla alanın her iki kenarı üzerine BD ve CE karelerini kuralım. ZH hattının rasyonel olduğunu varsayalım ve hattın üzerine BD, BC ve CE alanlarına eşit olan HT, KL ve MN alanlarını kuralım. Böylece bu alanlara ilişkin ZT, TL ve LN enlerini belirleyelim. Buna göre ZT, TL ve LN enlerinin her birinin karesi rasyonel ve ZH hattıyla ortak bölenlidir.

$BC^2 = (AB^2 \times AC^2) = (BD^2 \times CE^2)$ olduğundan $BD^2/BC = BC/CE^2$ yazılabilir. Buna göre HT, KL, MN alanları ZT, TL ve LN hatlarıyla uygun oranlıdır: $(ZT \times LN) = TL^2$. Şu halde $(ZT \times LN)$ rasyonel olan TL^2 ile ortak bölenlidir ve TL hattının karesi rasyoneldir.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *25. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Sadece kareleri ortak bölenli iki *ortalayan* hattı $k^{1/4}\rho$ ve $\sqrt{\lambda}k^{1/4}\rho$ olarak tanımlayalım. Bunların oluşturduğu alan $\sqrt{k\lambda}$ ρ^2 olarak elde edilir. Bu alan genelde *ortalayan*dır, ancak $\sqrt{\lambda} = k'\sqrt{k}$ olarak tanımlanırsa bu alan $kk'\rho^2$ rasyonel hale gelir.

Neticede *ZT* ve *ZH* hatlarının ortak bölenli olmamaları halinde önermede öngörüldüğü gibi *KL* alanı ya rasyonel ya da *ortalayan* bir alandır.

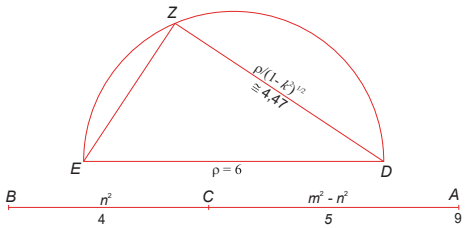


Şekil 22- Burada $k = 5$, $\lambda = 3$, $\rho = 2$; $AB = k^{1/4}\rho \cong 2{,}99$; AC = $\sqrt{\lambda} k^{1/4}\rho \cong 5{,}18$; $\sqrt{\lambda} = k'\sqrt{k}$, $k' = \sqrt{\lambda/k} = \sqrt{5/3} \cong 1{,}29$; $k.k' = \sqrt{125/3} \cong 6{,}45$.

***XXIV. Önerme*: Sadece kareleri rasyonel ve ortak bölenli, biri uzun (*ED* = *ρ*) ve diğeri kısa ($DZ = \rho\sqrt{1-k^2}$) iki hattın karesel oranı, ortak bölensiz biri uzun (*m*) diğeri kısa (*n*) iki hattın, uzun hat karesinin kareler farkı oranına [$m^2/(m^2 - n^2)$] eşit olacak şekilde belirlenmesi istenmektedir.**[1]

Örneğin *AB* (= m^2), *BC* (= n^2) gibi iki sayının karesi ve bunların bir kare olmayan farkı *AC* (= $m^2 - n^2$) oluşturulur (*Şekil 23*). Sonra *DE* (= *ρ*) gibi rasyonel bir hattın üzerinde *EZD* yarı dairesi çizilir. Varsayım gereği $AB/AC = DE^2/DZ^2$ ilişkisi sağlanacak şekilde $DZ = DE\sqrt{AC/AB}$ [$= \rho\sqrt{1-k^2}$ burada $k^2 = (n/m)^2 = BC/AB$] büyüklüğü oluşturulur. Son olarak *DEZ* yarı dairesinde *DZ* ve *ZE* kirişleri çizilir ve neticede *DE* ve *DZ* önermede aranan iki hatta karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *29. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Rasyonel hattın *ρ* ve ($m^2 - n^2$) kare olmamak koşuluyla iki sayının m^2 ve n^2 olduğunu varsayalım. Bu durumda *x* hattının sağlaması istenen ifade $m^2/(m^2 - n^2) = \rho^2/x^2$ ya da $x^2 = \rho^2 m^2/(m^2 - n^2)$ olur. Eğer $k = n/m$ olarak tanımlanırsa $x = \rho\sqrt{1-k^2}$ bulunur. Şu halde aranan hatların *ρ*, $\rho\sqrt{1-k^2}$ olması gerektiği anlaşılır. Oran gereği her ne kadar x^2 ve ρ^2 ortak bölmeli ve *x* rasyonel ise de *x* ve *ρ* ortak bölmeli değildir. Oran farklar şeklinde ifade edilirse $m^2/n^2 = \rho^2/(\rho^2 - x^2)$ ve karekökü alınırsa *ρ* ve $\sqrt{\rho^2 - x^2} = k\rho$ hatlarının ortak bölmeli oldukları görülür.



Şekil 23- Burada $k = n/m = 2/3$, $\rho = 6$; $m^2/(m^2 - n^2) = \rho^2/x^2 = 9/5$, $x = \rho\sqrt{1-k^2} = 2\sqrt{5} \cong 4{,}47$.

Kanıtı: Varsayım gereği DE^2/DZ^2 [$= \rho^2/\rho^2(1-k^2) = m^2/(m^2-n^2)$] oranı iki karenin oranına eşit olmadığından, *DE* ve *DZ* hatlarının ancak kareleri ortak bölenli ve rasyoneldir. Dik *DZE* üçgeninde $DE^2 = DZ^2 + ZE^2$ olduğundan $DE^2/DZ^2 = (DZ^2 + ZE^2)/DZ^2$ yazılabilir. Ancak varsayım gereği $DE^2/DZ^2 = AB/AC$ olması gerektiğinden, *DE* ve *DZ* önermede belirlenmesi öngörülen iki hatta karşı düşer.

Not: Farkları kare olmayan iki karesel sayının belirlenmesi için aşağıda belirtilen yöntem önerilir. *AB* sayısının tek ve tamsayı olduğunu varsayalım (*Şekil 24*). Bu sayıdan *BD* = 1 sayısını çıkaralım. Sonra kalan *AD* sayısını *C* noktasında ikiye bölelim. Bu durumda AC^2 ve CD^2 aranan iki sayıdır. Çünkü $(BC^2 - CD^2) = (BD + CD)^2 - CD^2 = BD^2 + 2(BD \times CD)$ yazılabilir. Ancak *BD* = 1 olduğundan $BD^2 = 1$ ve $2(BD \times CD) = 2(1 \times CD) = 2$. *CD* = *AD* bir çift tamsayı olduğundan, $(BC^2 - CD^2) = (1 + AD)$ bir tek tamsayıdır. Buna göre bu fark bir kare olamaz.

Şekil 24- Burada *AB* = 5, *AC* = 2, BC =3; $(BC^2 - CD^2) = (9 - 4) = 5$ (kare değil!).

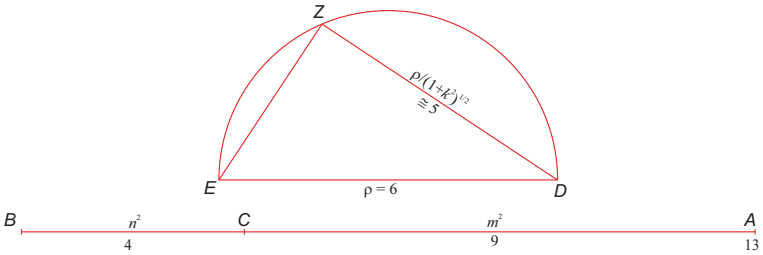
Sonra eğer bu iki hattın oranı, kareleri rasyonel olan başka iki sayının oranına eşitlenmek istenirse, yukarıda olduğu gibi herhangi bir DE^2 ($= \rho^2$) sayısını, aranan bir diğer hattın karesine ($= x^2$) oranlayarak eşitlemek gerekir.

***XXV. Önerme*: *Önerme*: Sadece kareleri rasyonel ve ortak bölenli, biri uzun (*ED* = *ρ*) ve diğeri kısa ($DZ = \rho/\sqrt{1-k^2}$) iki hattın karesel oranı, ortak bölensiz biri uzun (*m*) diğeri kısa (*n*) iki kattın, kareler**

toplamının uzun hat karesi oranına [$(m^2 + n^2)/m^2$] eşit olacak şekilde belirlenmesi istenmektedir.[1]

Örneğin *AC* (= m^2), *BC* (= n^2) gibi iki sayının karesi ve bunların bir kare olmayan toplamı *AB* (= $m^2 + n^2$) oluşturulur (*Şekil 23-1*).[2] Sonra *DE* (= ρ) gibi rasyonel bir hattın üzerinde *EZD* yarı dairesi çizilir. Varsayım gereği $AB/AC = DE^2/DZ^2$ ilişkisi sağlanacak şekilde $DZ = DE\sqrt{AC/AB}$ [= $\rho/\sqrt{1-k^2}$ burada $k^2 = (n/m)^2 = BC/AC$] büyüklüğü oluşturulur. Son olarak *EZD* yarı dairesinde *DZ* ve *ZE* kirişleri çizilir ve neticede *DE* ve *DZ* önermede aranan iki hatta karşı düşer.

Kanıtı: Varsayım gereği DE^2/DZ^2 {= $\rho^2/[\rho^2/(1 + k^2)]$ = $(m^2 + n^2)/m^2$} oranı iki karenin oranına eşit olmadığından, *DE* ve *DZ* hatlarının ancak kareleri ortak bölenli ve rasyoneldir. Dik *DZE* üçgeninde $DE^2 = DZ^2 + ZE^2$ olduğundan $DE^2/DZ^2 = (DZ^2 + ZE^2)/DZ^2$ yazılabilir. Ancak varsayım gereği $DE^2/DZ^2 = AB/AC$ olması gerektiğinden, *DE* ve *DZ* önermede belirlenmesi öngörülen iki hatta karşı düşer.



Şekil 23-1- Burada $k = n/m = 2/3$, $\rho = 6$; $(m^2 + n^2)/m^2 = \rho^2/x^2 = 13/9$, $x = \rho/\sqrt{1-k^2} = 18/\sqrt{13} \cong 5$.

Not: Toplamları kare olmayan iki karesel sayının belirlenmesi için aşağıda belirtilen yöntem önerilir.[3] Herhangi bir karesel sayıya bir birim ilave edelim [$(m/n)^2 + 1$]. Bu toplamda her ne kadar sayılardan biri karesel olsa da toplam karesel değildir. Şimdi bu toplam herhangi bir karesel sayıyla

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *30. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Rasyonel hattın ρ ve $(m^2 + n^2)$ kare olmamak koşuluyla iki sayının m^2 ve n^2 olduğunu varsayalım. Bu durumda x hattının sağlaması istenen ifade $(m^2 + n^2)/m^2 = \rho^2/x^2$ ya da $x^2 = \rho^2 m^2/(m^2 + n^2)$ olur. Eğer $k = n/m$ olarak tanımlanırsa $x = \rho/\sqrt{1-k^2}$ bulunur. Şu halde aranan hatların ρ, $\rho/\sqrt{1-k^2}$ olması gerektiği anlaşılır.

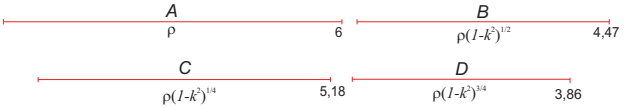
2 Özgün eserde *Şekil 23-1* bulunmamakta ve önermenin anlatımında *Şekil 23*'ten yararlanılmaktadır.

3 Bu not Öklid'in özgün eserinde *28. Önerme*de *2. Yardımcı Önerme* (*Lemma*) olarak verilir ve kanıtlanır.

çarpılırsa, bir karesel olmayan sayıyla karesel sayının çarpımı karesel olmadığından, çarpım karesel değildir [$(m/n)^2 + 1) \times n^2 = (m^2 + n^2)$ = (karesel değil!)].

***XXVI. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli ve rasyonel bir alanın iki kenarını oluşturan iki *ortalayan* hat, uzun ve kısa hat kareleri farkının uzun hatla *ortak bölenli* hattın karesine eşit olacak şekilde belirlenmek istenmektedir.[1]**

Sadece kareleri rasyonel olan A (= ρ) ve B [= $\rho\sqrt{(1-k^2)}$] hatlarında, $(A^2 - B^2)$ (= ρ^2k^2) farkı A ile ortak bölenli bir hattın karesine eşit olsun. Sonra A ve B arasında ortalayan bir C [= $\sqrt{(A \times B)}$ =$\rho(1 - k^2)^{1/4}$] ve onlarla orantılı dördüncü bir D [= $(B \times C)/A = \rho(1 - k^2)^{3/4}$] hattı oluşturalım. Bunlar sadece kareleri ortak bölenli aynı zamanda rasyonel bir alanın tarafına karşı düşen ortalayan hatlardır. Bu durumda önermede öngörüldüğü gibi $A^2/(A^2 - B^2) = C^2/(C^2 - D^2)$ ya da $A^2/B^2 = C^2/D^2$ oranı geçerlidir.



Şekil 25- Burada $\rho = 6$, $k = n/m = 2/3$; $A^2/B^2 = C^2/D^2 = 1/(1 - k^2) = 9/5 =$ 1,8 (ortak bölenli!).

***XXVII. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli ve rasyonel bir alanın iki kenarını oluşturan iki *ortalayan* hat, uzun ve kısa hat kareleri farkının uzun hatla *ortak bölensiz* hattın karesine eşit olacak şekilde belirlenmek istenmektedir.[2]**

---

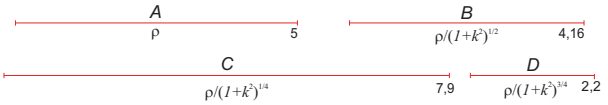
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *31. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *14. Önerme*de ρ ve $\rho\sqrt{1-k^2}$ sadece kareleri ortak bölenli ve rasyonel olan iki hattın orta oranı $\rho(1 - k^2)^{1/4}$ olduğuna göre ortalama oran $\rho(1 - k^2)^{1/4}/\rho\sqrt{1-k^2} = \rho\sqrt{1-k^2}/x$ ilişkisinden belirlenir. Bu durumda aranan hatların $\rho(1 - k^2)^{1/4}$, x ya da $\rho(1 - k^2)^{1/4}$, $\rho(1 - k^2)^{3/4}$ olduğu anlaşılır. Bu hatlar varsayılan koşulları sağlar:

1) $\rho^2\sqrt{1-k^2}$ ortalayan alan olduğundan $\rho(1 - k^2)^{1/4}$ bir ortalayan hattır ve $[x \times \rho(1 - k^2)^{1/4}] = [\rho(1 - k^2)^{3/4} \times \rho(1 - k^2)^{1/4}] = \rho^2(1 - k^2)$ sonucu gereği irrasyonel bir alandır.

2) ρ, $\rho(1 - k^2)^{1/4}$, $\rho\sqrt{1-k^2}$ hatları *12. Önerme* gereği sürekli orantılı hatlardır. Buna göre $\rho/\ \rho\sqrt{1-k^2} = \rho(1 - k^2)^{1/4}/x$ ilişkisinden ortalayan $x = \rho(1 - k^2)^{3/4}$ elde edilir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *31. Önerme*nin sonunda ele alınır. Önerme şu anlama gelir: Burada *15. Önerme*de önerildiği gibi ρ, $\rho/\sqrt{1-k^2}$ hatları göz önünde bulundurulursa aranan hatların bir önceki önermede olduğu gibi $\rho/(1 + k^2)^{1/4}$ ve $\rho/(1 + k^2)^{3/4}$ olması gerektiği anlaşılır.

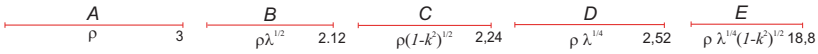
Burada sadece kareleri rasyonel olan A (= ρ) ve B [= $\rho/\sqrt{(1-k^2)}$] hatlarında, $(A^2 - B^2)$ [= $\rho^2k^2/(1 + k^2)$] farkı A ile *ortak bölensiz* bir hattın karesine eşit olması istenir. İşlem yukarda olduğu gibi sürdürülür ve *Şekil 25-1*'de verilen sonuçlar bulunur.



Şekil 25-1 Bu şekil özgün eserde bulunmamaktadır. Burada ρ = 5, $k = n/m$ = 2/3; $A^2/B^2 = C^2/D^2 = (1 + k^2) = 13/9 \cong 1{,}44$ (ortak bölensiz!).

***XXVIII. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli ve *ortalayan* bir alanın iki kenarını oluşturan iki *ortalayan* hat, uzun ve kısa hat kareleri farkının uzun hatla *ortak bölenli* hattın karesine eşit olacak şekilde belirlenmek istenmektedir.**[1]

Burada A (= ρ), B (= $\rho\sqrt{\lambda}$) ve C [= $\rho\sqrt{(1-k^2)}$] sadece kareleri rasyonel olan üç hattır (*Şekil 26*). Ayrıca $(A^2 - B^2)$ [= $\rho^2(1 - \lambda)$] farkı A ile ortak bölenli olan bir hattın karesine eşittir. Sonra A ve B arasında orta oranlı bir D ($\rho\lambda^{1/4}$) hattı oluşturulur. Bununla birlikte $D/E = A/C$ [= $1/\sqrt{(1-k^2)}$] oranı sağlatılır. Neticede D ve E aranan *ortalayan* hatlara karşı düşer. Kanıtı yukarıda olduğu gibidir.



Şekil 26- Burada ρ = 3, $k = n/m$ = 2/3, λ = 0,5; $(A^2 - B^2)/A^2 = (1 - \lambda) = 0{,}5$ (ortak bölenli!).

***XXIX. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli ve *ortalayan* bir alanın iki kenarını oluşturan iki *ortalayan* hat, uzun ve kısa hat kareleri**

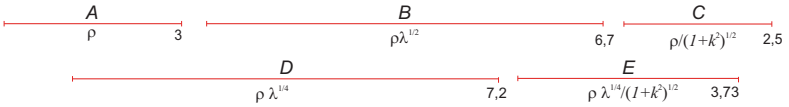
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *32. Önerme* olarak verilir. Bu durumda hatlar ρ, $\rho\lambda^{1/2}$, $\rho\sqrt{1-k^2}$ olarak alınır ve ilk ikisinin orta oranından $\rho\lambda^{1/4}$ elde edilir. Aranan x hattı $\rho\lambda^{1/4}/\rho\lambda^{1/2} = \rho\sqrt{1-k^2}/x$ ilişkisinden $x = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{1-k^2}$ olarak hesaplanır. $\rho\lambda^{1/4}$, $\rho\lambda^{1/4}\sqrt{1-k^2}$ hatları varsayılan koşulları sağlar:

1) $\rho\lambda^{1/4}$ *ortalayan*dır. Ayrıca $\rho/\rho\sqrt{1-k^2} = \rho\lambda^{1/4}/x$ ilişkisi gereği x hattı *ortalayan* ve $\rho\lambda^{1/4}$/ ile karesel ortak bölenli değildir.

2) Buna göre $(x \times \rho\lambda^{1/4}) = (\rho\sqrt{\lambda} \times \rho\sqrt{1-k^2})$ ilişkisi yazılabilir. Sağ taraf *ortalayan* olduğundan x, $\rho\lambda^{1/4}$ya da $\rho\lambda^{1/4}$, $\rho\lambda^{1/4}\sqrt{1-k^2}$ *ortalayan*dır.

farkının uzun hatla *ortak bölensiz* hattın karesine eşit olacak şekilde belirlenmek istenmektedir.[1]

Burada A (= ρ), B (= $\rho\sqrt{\lambda}$) ve C [= $\rho/\sqrt{(1-k^2)}$] sadece kareleri rasyonel olan üç hattır (*Şekil 26-1*). Ayrıca ($A^2 - B^2$) [= ρ^2k^2] farkı A ile ortak bölensiz bir hattın karesine eşittir. Geri kalan işlemler ve önermenin kanıtı yukarıda olduğu gibidir.



Şekil 26-1 Bu şekil özgün eserde bulunmamaktadır. Burada $\rho = 5$, $k = n/m = 2/3$; $A^2/B^2 = C^2/D^2 = (1 + k^2) = 13/9 \cong 1{,}44$ (ortak bölensiz!).

***XXX. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen ancak rasyonel olan biri diğeriyle çarpıldığında *ortalayan* bir alan oluşturan iki hat belirlenmek istenmektedir.**[2]

Burada, $AB > BC$ olmak üzere, AB (= ρ) ve BC (= $\rho/\sqrt{(1-k^2)}$) hatları, kareleri rasyonel, kareler farkı öncekilerle ortak bölensiz olan iki herhangi hattın karesine eşit olsun (*Şekil 27*). Amaca yönelik olarak AB hattı üzerine AZB yarım dairesini çekelim ve AB hattına $BC^2/4$ [= $\rho^2/4(1 + k^2)$] ilave edelim. AB hattını $AE > EB$ olacak şekilde E noktasıyla ikiye bölelim ve E noktasında EZ dikini çekelim. Eğer A, B ve Z noktaları birleştirilirse AZ (= u) ve BZ (= v) hatları aranan hatlara karşı düşer [($u \times v$) = $\rho \times BC/2$].

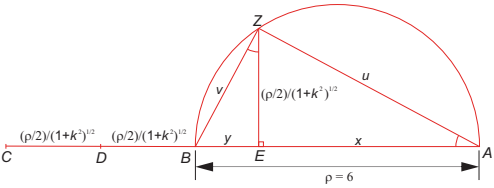
Kanıtı: Benzer AEZ ve ZBE dik üçgenlerden $AZ/BZ = AE/EZ$ ve $AZ/BZ = EZ/BE$ yazılabilir. Eşit oranlar çarpılırsa $(AZ/BZ)^2 = (AE/EZ).(EZ/BE) = AE/BE$ ya da $AE/BE = (AZ/BZ)^2 = AZ^2/BZ^2$ elde edilir. Ancak AE ve BE ortak bölensiz olduğundan AZ ve BZ kareleri de ortak bölensizdir.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *32. Önerme*nin sonunda ele alınır. Önerme şu anlama gelir: Burada ρ, $\rho\sqrt{\lambda}$, $\rho/\sqrt{1-k^2}$ hatları göz önünde bulundurulursa aranan hatların bir önceki önermede olduğu gibi $\rho\lambda^{1/4}$, $\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{1-k^2}$ olması gerektiği anlaşılır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *33. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: hatlar eğer *25. Önerme*de olduğu gibi ρ, $\rho/\sqrt{1-k^2}$ biçiminde seçilirse aranan hatların $x + y = \rho$ ve $(x \times y) = \rho^2/4(1 + k^2)$ denklemlerini sağlaması istenebilir. Eğer x, y değerleri çözülür ve $u^2 = (\rho \times x)$, $v^2 = (\rho \times y)$ olarak tanımlanırsa $x > y$ için $x = \rho/2[1 + k/\sqrt{1-k^2}]$, $y = \rho/2[1 - k/\sqrt{1-k^2}]$ ya da $u = \rho/\rho/\sqrt{2}\sqrt{1 + k/\sqrt{1+k^2}}$, $v = \rho/\rho/\sqrt{2}\sqrt{1 - k/\sqrt{1+k^2}}$ olarak elde edilir. 1) *14. Önerme* koşullarını karşılayan x ve y ortak bölünmez. Ayrıca $x/y = u^2/v^2$ olduğundan u ve v hatlarının kareleri de ortak bölünmez. 2) $u^2 + v^2 = \rho^2$ rasyoneldir. 3) $\sqrt{xy} = \rho/2\sqrt{1+k^2}$ ve $(u \times v) = \rho\sqrt{xy} = \rho^2/2\sqrt{1+k^2}$ bir *ortalayan* alandır.

$(AZ^2 + BZ^2) = AB^2$ ve AB^2 rasyonel olduğuna göre $(AZ^2 + BZ^2)$ ifadesi de rasyoneldir. $ZE^2 = (AE \times BE)$ ve varsayım gereği alanlar eşit olması gerektiğinden $BD^2 = (AE \times BE)$ nedeniyle $ZE = BD$ olmalıdır. Benzer ABZ ve ZEB dik üçgenlerden $AB/AZ = BZ/EZ$ ya da $(AZ \times BZ) = (AB \times BD)$ yazılabilir. Neticede önermede öngörüldüğü gibi $2(AZ \times BZ) = (AB \times BC)$ olduğu görülür. Burada BC hattı da *ortalayan*dır.

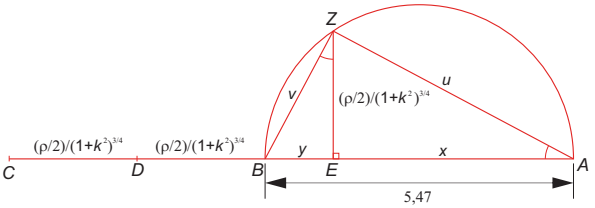


Şekil 27- Burada $AB = \rho = (x + y) = 6$; $k = 2/3$; $BC = \rho/\sqrt{1 + k^2} \cong 4{,}99$;
$x = \rho/2[1 + k/\sqrt{1 + k^2}] = 4{,}66$;
$y = \rho/2[1 + k/\sqrt{1 + k^2}] = 1{,}34$; $u = \sqrt{(\rho \times x)} = 5{,}29$; $v = \sqrt{(\rho \times y)} = 2{,}84$.

***XXXI. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen ancak toplamları *ortalayan* olan biri diğerinin iki katıyla çarpılması sonucu rasyonel bir alan oluşturan iki hat belirlenmek istenmektedir.**[1]

Sadece kareleri ortak bölünen ve rasyonel bir alanın kenarlarını oluşturan, karelerinin farkı diğerleriyle ortak bölünmeyen bir hattın karesine eşit olan iki *ortalayan* hat oluşturulmak istenir. Önceki önermede olduğu gibi AZ ve BZ hatları alınır ancak bunların kareleri ortak bölünmez (*Şekil 27*-1). Zira burada da $AE/BE = AZ^2/BZ^2$ geçerlidir ve AE ile BE ortak bölünmeyen iki hattır. $AZ^2 + BZ^2 = AB^2$ nedeniyle $AZ^2 + BZ^2$ *ortalayan*dır. Ayrıca $(AB \times BC)$ rasyonel olduğundan ve önceki önermeden bilindiği üzere $2(AZ \times BZ) = (AB \times BC)$ olduğundan önermede öngörüldüğü gibi $2(AZ \times BZ)$ rasyoneldir. Şekil önceki önermede olduğu gibidir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *34. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: hatlar eğer *27. Önerme*de olduğu gibi $\rho/(1 + k^2)^{1/4}$ ve $\rho/(1 + k^2)^{3/4}$ biçiminde seçilirse aranan hatların $x + y = \rho/(1 + k^2)^{1/4}$ ve $(x \times y) = \rho^2/4(1 + k^2)^{3/4}$ denklemlerini sağlaması istenir. Eğer x, y, u ve v değerleri çözülürse: $x = \rho\ [\sqrt{1 - k^2} + k]/2(1 + k^2)^{3/4}$; $y = \rho\ [\sqrt{1 - k^2} - k]/2(1 + k^2)^{3/4}$; $u = \rho\sqrt{\sqrt{1 + k^2} + k}/\sqrt{2(1 + k^2)}$; $v = \rho\sqrt{\sqrt{1 + k^2} - k}/\sqrt{2(1 + k^2)}$ bulunur ve bu değerler verilen koşulları sağlar. 1) *14. Önerme* koşullarını karşılayan x ve y ortak bölünmez. Ayrıca $x/y = u^2/v^2$ olduğundan u ve v hatlarının kareleri de ortak bölünmez. 2) $u^2 + v^2 = \rho^2/\sqrt{1 - k^2}$ortalayan bir alandır. 3) $(u \times v) = \rho\sqrt{xy}/(1 + k^2)^{1/4} = \rho^2/2(1 + k^2)$ rasyonel bir alandır.



Şekil 27-1 Özgün eserde bulunmayan bu şekilde $\rho = 6$, $k = 2/3$; $AB = \rho/(1 + k^2)^{1/4} = (x + y) \cong 5{,}47$;

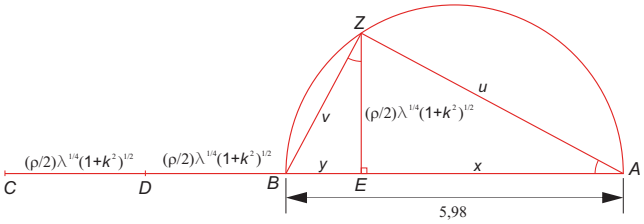
$BC = \rho/2[1/(1+k^2)^{3/4}] \cong 4{,}55$; $x = \rho/2(\sqrt{1 + k^2} + k)\ [1/(1+k^2)^{3/4}] \cong 4{,}26$; $y = \rho/2\ (\sqrt{1 + k^2} - k)\ [1/(1+k^2)^{3/4}] \cong 1{,}22$;

$u = \rho\sqrt{\sqrt{1 + k^2} + k}/\sqrt{2(1 + k^2)} \cong 4{,}83$; $v = \rho\sqrt{\sqrt{1 + k^2} - k}/\sqrt{2(1 + k^2)} = 2{,}58$.

***XXXII. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen ancak toplamları *ortalayan* olan birinin iki katının diğeriyle çarpılması sonucu rasyonel bir alan oluşturan iki hat belirlenmek istenmektedir.**[1]

Sadece kareleri ortak bölünen ve rasyonel bir alanın kenarlarını oluşturan, karelerinin farkı diğerleriyle uzunluğa göre ortak bölünmeyen bir hattın karesine eşit olan iki *ortalayan* hat oluşturulmak istenir. Önceki önermede olduğu gibi *AZ* ve *BZ* karelerinin ortak bölünmez oluşu, ($AZ^2 + BZ^2$) ifadesinin *ortalayan* olmasıyla açıklanır (*Şekil 27*-2). ($AB \times BC$) ortalayan olduğundan $2(AZ \times BZ) = (AB \times BC)$ eşitliği nedeniyle $2(AZ \times BZ)$ ifadesi de bir *ortalayan*dır. Çünkü *AB* ve *BC* uzunluğa göre ortak bölensiz olduğundan önermede öngörüldüğü gibi AB^2 ile ($AB \times BC$) da ortak bölensizdir. Şekil önceki önermelerde olduğu gibidir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *35. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: hatlar eğer *28. Önerme*de olduğu gibi $\rho\lambda^{1/4}$, $\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{1 - k^2}$ biçiminde seçilirse aranan hatların $x + y = \rho\lambda^{1/4}$ ve $(x \times y) = \rho^2\lambda^{1/2}/[4(1 + k^2)]$ denklemlerini sağlaması istenir. Eğer $u^2 = \rho\lambda^{1/4}x$ ve $u^2 = \rho\lambda^{1/4}y$ alınır ilkin *x*, *y* değerleri çözülürse: $x = \rho\lambda^{1/4}[1 + k/\sqrt{1 + k^2}]/2$ ve $y = \rho\lambda^{1/4}[1 - k\sqrt{1 - k^2}]/2$ bulunur. Bu ilişkilerden yararlanarak *u* ve *v* değerleri ise $u = \rho\lambda^{1/4}\left[\sqrt{1 + k/\sqrt{1 + k^2}}\right]/\sqrt{2}$ ve $v = \rho\lambda^{1/4}\left[\sqrt{1 - k/\sqrt{1 + k^2}}\right]/\sqrt{2}$ elde edilir. Bu değerler verilen koşulları sağlar. 1) *14. Önerme* koşullarını karşılayan *x* ve *y* ortak bölünmez. Ayrıca $x/y = u^2/v^2$ olduğundan *u* ve *v* hatlarının kareleri de ortak bölünmez. 2) $u^2 + v^2 = \rho\lambda^{1/4}$ *ortalayan* bir alandır. 3) $(u \times v) = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{xy} = \rho\lambda^{1/4}/(2\sqrt{1 - k^2})$ rasyonel bir alandır. 4) $\rho\lambda^{1/4}$ ve $\rho\lambda^{1/4}/(2\sqrt{1 - k^2})$ ya da ρ^2 ve $\rho^2\lambda^{1/2}/(2\sqrt{1 - k^2})$ ortak bölenlidir. Ayrıca $(u^2 + v^2)$ ve $(u \times v)$ ortak bölenlidir.



Şekil 27-2 Özgün eserde bulunmayan bu şekilde $\rho = 4$, $k = 2/3$, $\lambda = 5$; $AB = \rho\lambda^{1/4} = (x + y) \cong 5{,}98$;

$BC = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{1 + k^2} \cong 4{,}46$; $x = \rho\lambda^{1/4}(1 + k/\sqrt{1 + k^2}/2 \cong 4{,}65$; $y = \rho\lambda^{1/4}(1 + k/\sqrt{1 + k^2}/2 \cong 1{,}33$;

$u = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{1 + k/\sqrt{1 + k^2}}/2 \cong 5{,}27$; $v = \rho\lambda^{1/4}\sqrt{1 + k/\sqrt{1 + k^2}}/2 \cong 2{,}82$.

***XXXIII. Önerme*: Uzunlukları ortak bölensiz ancak rasyonel iki hattan oluşan bir hat rasyoneldir ve *iki adlı* (*binomial*) olarak adlandırılır.[1]**

Burada $AC = AB + BC$ olduğu varsayılır (*Şekil 28*). Varsayım gereği AB ve BC ortak bölensiz olduğundan $(AB \times BC)$ ile $(BC^2 + AC^2)$ de ortak bölenli değildir. Neticede AC^2 ile $(BC^2 + AC^2)$ ortak bölenli olmadığına göre irrasyoneldir.

Şekil 28

***XXXIV. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölensiz ve rasyonel bir hattın kenarlarını oluşturan iki *ortalayan* hattan oluşan bu hat irrasyoneldir ve *birinci iki ortalayan* olarak adlandırılır.[2]**

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *36. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer $y > x$ olmak üzere bu iki hat x ve y olarak adlandırılırsa $x = \rho$ ve $y = \sqrt{k}\rho$ şeklindedir. Buna göre $(x + y)$ ifadesinin irrasyonelliği garantilenmiş olur. Şu halde x ve y kareleri sadece kareleri ortak bölenlidir. Ayrıca $x/y = x^2/(x \times y)$ yazılabildiğine göre x^2 ve $(x \times y)$ ortak bölensizdir. Buna karşın x^2 ile $x^2 + y^2$ ve $(x \times y)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölenli olduğundan $x^2 + y^2$ ile $2(x \times y)$ ve neticede $x^2 + y^2 + 2(x \times y)$ ve $(x^2 + y^2)$ ortak bölenlidir. Ayrıca $(x^2 + y^2)$ ile $(x + y)^2$ rasyonel olmakla birlikte $(x + y)$ ifadesi irrasyoneldir. İrrasyonel $(x + y) = \rho(1 + \sqrt{k})$ doğrusuna *iki adlı doğru* denir. Buna ilişkin *ayrılmış* (*apotome*) ise $(x - y) = \rho(1 - \sqrt{k})$ şeklindedir ve *70. Önerme*de ele alınır. İkisi birlikte dördüncü mertebeden $x^4 - 2(1 + k)\rho^2x^2 + (1 + k)^2\rho^4 = 0$ denkleminin pozitif köklerine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *37. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *21. Önerme*den bilindiği üzere bu iki hat $x = k^{1/4}\rho$ ve $y = k^{3/4}\rho$ şeklindedir. Bir önceki önermede olduğu gibi $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x + y)^2$ ile $2(x \times y)$ ortak bölenlidir. Ancak $(x \times y)$ rasyonel olmakla birlikte $(x + y)^2$ ve $(x + y)$ irrasyoneldir. İrrasyonel $(x + y) = \rho(k^{1/4} + k^{3/4})$ doğrusuna *birinci iki ortalayan* denir. Buna ilişkin *ayrılmış iki ortalayan doğru* (*apotome*) ise $(x - y) = \rho(k^{1/4} - k^{3/4})$ şeklindedir ve *71. Önerme*de ele alınır. İkisi birlikte dördüncü mertebeden $x^4 - 2\sqrt{k}(1 + k)\rho^2x^2 + k(1 - k)^2\rho^4 = 0$ denkleminin pozitif köklerine karşı düşer.

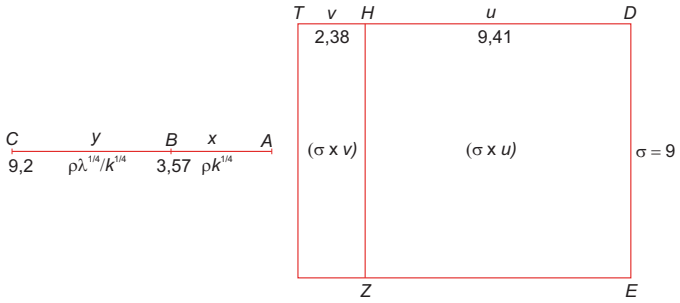
Burada $AC \neq AB \neq BC$ olduğunu varsayalım (*Şekil 29*). *AB* ve *BC* ortak bölensiz olduğundan ($AB \times BC$) ve aynı şekilde $2(AB \times BC)$ ile AB^2 ve BC^2 de ortak bölenli değildir. Neticede AC^2 ile $2(AB \times BC)$ ortak bölensiz olduğuna göre AC^2 irrasyoneldir.

Şekil 29- Burada $\rho = 3$, $k = 2$; $x = \rho k^{1/4} \cong 3{,}57$; $y = \rho k^{3/4} \cong 5{,}045$; $(x + y) = \rho\,(k^{1/4} + k^{3/4}) \cong 8{,}615$;
$AC^2 = (x + y) = \rho\,(k^{1/2} + k^{3/2})$ irrasyonel!

***XXXV. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli ve *ortalayan* bir alanın kenarını oluşturan iki hat irrasyoneldir ve *ikinci iki ortalayan* olarak bilinir.**[1]

Burada $AC = (AB + BC)$ olarak verilmiş olsun (*Şekil 30*). *DE* hattının rasyonel olduğunu varsayalım. Bu hattın üzerine $AC = (AB + BC)$ hattı karesine ve $2(AB \times BC)$ alanına eşit *ZD* ve *ZT* alanlarını kuralım. *AB* ve *BC* hatları ortak bölünemediğinden *ZD* ve *ZT* alanları da ortak bölünemez. Buna göre *DH* ve *HT* kareleri rasyonel ve ortak bölünemez hatlar olduğundan *ZT iki adlı* ve *DE* rasyonel olduğundan *ET* alanı irrasyoneldir. Neticede $ET = AC^2$ olduğundan *AC* hattı da irrasyoneldir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *38. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *21. Önerme*den bilindiği üzere bu iki hat $x = \rho\, k^{1/4}$ ve $y = \rho\, \lambda^{1/2}/k^{1/4}$ şeklindedir. Eğer $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ alanlarına bir rasyonel σ doğrusu uygulanırsa $(x + y)^2 = (\sigma \times u)$ ve $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ yazılabilir. Ancak $(x^2 + y^2)$ bir ortalayan alan bilindiğine göre $2(x \times y)$ için de aynı şey söylenebilir, bu husus $(\sigma \times u)$ ve $(\sigma \times v)$ alanları için de geçerlidir. Buna göre *u* ve *v* hatlarının her biri rasyonel olmakla birlikte σ ile ortak bölenli değildir. Bunun Aynı şekilde *x* ile *y* ve x^2 ile $(x \times y)$ de ortak bölenli değildir. Buna karşın x^2 ile $(x^2 + y^2)$ ve $(x \times y)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölenlidir. Sonuçta $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ya da *u* ile *v* ortak bölenli değildir. Bu tartışmanın neticesinde *u* ve *v* hatlarının rasyonel ve karelerinin ortak bölenli olduğu anlaşılır. *33. Önerme* gereği $(u + v)$ ile $(u + v)\sigma$ ve $(x + y)^2$ ya da $(x + y) = k^{1/4}\rho + \lambda^{1/2}\rho/k^{1/4}$ ifadeleri irrasyoneldir. Sonuncu ilişki *ikinci iki ortalayan* olarak adlandırılır. Buna ilişkin *ayrılmış ikinci iki ortalayan hat* (*apotome*) ise $(x - y) = k^{1/4}\rho - \lambda^{1/2}\rho/k^{1/4}$ şeklindedir ve *71. Önerme*de ele alınır. İkisi birlikte dördüncü mertebeden $x^4 - 2\sqrt{k}(k + \lambda)\rho^2x^2 + (k - \lambda)^2\rho^4 = 0$ denkleminin pozitif köklerine karşı düşer.



Şekil 30- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 5$, $\sigma = 9$; $x = \rho k^{1/4} \cong 3{,}57$; $y = \rho\lambda^{1/4}/k^{1/4} \cong 5{,}64$; $(x + y) = \rho(\lambda^{1/4}/k^{1/2} + k^{1/4}) \cong 9{,}2$; $u = 9{,}42$; $v = 2{,}38$; $(\sigma \times u) = (x^2 + y^2) = 84{,}8$; $(\sigma \times v) = 2x.y = 21{,}4$.

***XXXVI. Önerme*: Kareleri toplamı rasyonel olan ve kareleri ortak bölünmeyen, biri diğerinin iki katı diğeriyle çarpıldığında elde edilen *ortalayan* bir alanı oluşturan hatların toplamı irrasyoneldir ve *daha büyük* (*majör*) olarak bilinir.**[1]

Burada $AC = AB + BC$ olduğu varsayılır (*Şekil 30-1*), önerme *33. Önerme*de olduğu gibi kanıtlanır.

Şekil 30-1- Burada $\rho = 6$, $k = 2$; $x = (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 + k/\sqrt{1+k^2}} \cong 5{,}84$; $y = (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 - k/\sqrt{1+k^2}} \cong 1{,}38$.

***XXXVII. Önerme*: Kareleri toplamı *ortalayan* bir alan olan ve kareleri ortak bölünmeyen, biri diğerinin iki katıyla çarpıldığında elde edilen rasyonel bir alanı oluşturan hatların toplamı irrasyoneldir ve bir rasyonel *ortalayan köke* karşı düşer.**[2]

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *39. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *30. Önerme*den bilindiği üzere bu iki hat $x = (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 + k/\sqrt{1+k^2}}$, $y = (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 - k/\sqrt{1+k^2}}$ şeklindedir. Varsayım gereği $(x \times y)$ ve $2(x \times y)$ dörtgeni *ortalayan* bir alandır. Ayrıca $(x^2 + y^2)$ rasyonel bir alandır, $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x + y)^2$ ile $(x^2 + y^2)$ ortak bölünmez. Şu halde $(x + y)^2$ ve $(x + y)$ irrasyoneldir. Buna göre *en büyük* olarak adlandırılan $(x + y) = (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 + k/\sqrt{1+k^2}}$, $y + (\rho/\sqrt{2})\sqrt{1 - k/\sqrt{1+k^2}}$ bir irrasyonel hattır. Buna ilişkin bir irrasyonel *en küçük* (*minör*) *73. Önerme*de tanımlanmıştır ve her ikisi birlikte dördüncü mertebeden $x^4 - 2\rho^2x^2 + k^2\rho^4/(1 + k^2) = 0$ denkleminin pozitif köklerine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *40. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *31. Önerme*den bilindiği üzere bu iki hat $x = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\sqrt{\sqrt{1+k^2} + k}$ ve $y = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\sqrt{\sqrt{1+k^2} - k}$ şeklindedir. Bu durumda $(x^2 + y^2)$ bir *ortalayan* ve $2(x \times y)$ rasyonel alandır. $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x + y)^2$ ile $2(x \times y)$ ortak bölünmez. Ayrıca $2(x \times y)$ rasyonel olduğundan $(x + y)^2$ ve $(x + y)$ irrasyoneldir. Bu nedenden dolayı irrasyonel $(x + y) = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\left\{\sqrt{\sqrt{1+k^2} + k} + \sqrt{\sqrt{1+k^2} - k}\right\}$ bir *rasyonel ve ortalayan alan kenarı* olarak adlandırılır. *74. Önerme*de verilen negatif işaretli irrasyonel sayı aşağıdaki dördüncü mertebeden denklemin pozitif köklerine karşı düşer $x^4 - 2\rho^2/\sqrt{1+k^2}x^2 + k^2\rho^4/(1 + k^2)^2 = 0$

Burada da $AC = AB + BC$ olduğu varsayılır (*Şekil 30-2*), önerme *34. Önerme*de olduğu gibi kanıtlanır.

Şekil 30-2- Burada $\rho = 6$, $k = 2$; $x = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k} \cong 3{,}9$;
$y = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k} \cong 0{,}92$; $(x+y) = \left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\left\{\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}+\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\right\}$.
$\cong 4{,}82$.

***XXXVIII. Önerme*: Kareleri toplamı *ortalayan* bir alan olan ve kareleri ortak bölünmeyen, biri diğerinin iki katıyla çarpıldığında elde edilen ortalayan bir alanı oluşturan ve aynı zamanda hatların toplamı irrasyoneldir ve bir rasyonel *ortalayan köke* karşı düşer.**[1]

Burada da $AC = AB + BC$ olduğu varsayılır (*Şekil 30-2*), önerme *35. Önerme*de olduğu gibi kanıtlanır.

Şekil 30-3- Burada $\rho = 6$, $k = 2$, $\lambda = 5$; $x = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1+k/\sqrt{1+k^2}} \cong 8{,}73$;
$y = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1-k/\sqrt{1+k^2}} \cong 2{,}06$; $(x+y) = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\left\{\sqrt{1+k/\sqrt{1+k^2}}+\sqrt{1-k/\sqrt{1+k^2}}\right\}$.$\cong 10{,}79$.

***XXXIX. Önerme*: *İki adlı* (*binomial*) sadece bir noktada öz rasyonellerine bölünebilir. Öncekine eşit olmayan başka bir noktada bölünmesi halinde, buna *iki adlı* denemez.**[2]

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *41. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Bu durumda x ve y hatları $x = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1+k/\sqrt{1+k^2}}$ ve $y = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1-k/\sqrt{1+k^2}}$ şeklindedir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ ve $2(x \times y)$ *ortalayan* alanlardır. $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölünmez. Bu alanlar rasyonel σ doğrusuna uygulanırsa $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$ ve $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ eşitlikleri elde edilir. $(\sigma \times u)$ ve $(\sigma \times v)$ ortalamalı alanlar, u ile v rasyonel her biri σ ile ortak bölensizdir. Şu halde $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve u ile v ortak bölensizdir. Neticede u ile v rasyonel ve kareleri ortak bölenli, $(u + v)$ ve $\sigma(x + y)$ ayrıca $(x + y)^2$ ve $(x + y)$ irrasyoneldir. Bu nedenden dolayı irrasyonel $(x + y) = \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1+k/\sqrt{1+k^2}} + \left[\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\right]\sqrt{1-k/\sqrt{1+k^2}}$ hat *iki ortalamalı alanın toplamı kenarı* olarak adlandırılır. *78. Önerme*de verilen negatif işaretli irrasyonel sayı aşağıdaki dördüncü mertebeden denklemin pozitif köklerine karşı düşer $x^4 - 2\rho^2x^2 + \lambda\rho^4k^2/(1 + k^2) = 0$.

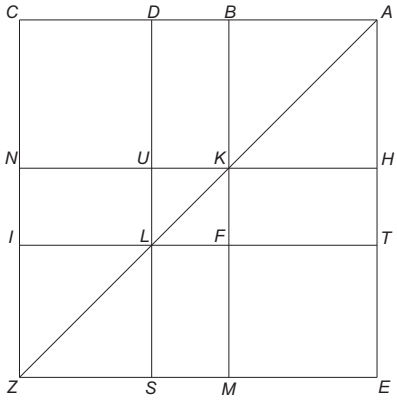
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *42. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$ ise $a = x$ ve $b = y$ olur. Aynı şekilde eğer $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ise $a = x$ ve $b = y$ ya da $a = y$ ve $b = x$ olmalıdır. Önerme bir *iki adlı* hattın iki farklı şekilde ayrışılamayacağı gerçeğini ifade eder. Eğer bu mümkün olsaydı $x + y = x' + y'$ gibi iki farklı çözümün oluşması söz konusu olur. Bu durumda $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2x'y' - 2xy$ yazılabilir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ ve $(x'^2 + y'^2)$ alanları $\rho^2 + k\rho^2$ şeklinde rasyonel alanlardır. Buna karşın $2x'y'$ ve $2xy$ ise $\sqrt{k}.\rho^2$ şeklinde *ortalamalı* alanlardır. Şu halde bu iki *ortalamalı* alanın farkı rasyonel olması gerekir ki bu mümkün değildir. Buna göre x', y' ile x, y ya da y, x birbirinden farklı olamaz.

Bir an *iki adlı*nın başka bir noktada da bölündüğünü ve bölünmenin D noktasında gerçekleştiğini varsayalım (*Şekil 31*). Bu durumda $AB^2 + BC^2$ ile $AD^2 + DC^2$ arasındaki fark $2(AB \times BC)$ ile $2(AD \times DC)$ arasındaki fark gibi ya da iki ortalamalı hat gibi olmalıdır. Bu ise hem rasyonel hem de irrasyonel olması gerektiği anlamına gelir ki bu imkânsızdır. Şu halde bir *iki adlı* önermede öngörüldüğü gibi bir nokta dışında başka rasyonel parçalara bölünemez.

Şekil 31- Burada $\rho = 3$, $k = 2$; $(x + y) = \rho(1 + \sqrt{k}) \cong 7{,}24$.

Not: Bu önerme başka bir yol izlenerek de kanıtlanabilir: $AD^2 + DC^2 \neq AB^2 + BC^2$ aynı şekilde $2(AD \times DC) \neq 2(AB \times BC)$ ve $S(CE) = AC^2$ olduğunu varsayalım (*Şekil 32*). *AZ* köşegeni, sonra *AE* hattına paralel *BM* ve *DS* hatları çekilerek şekil tamamlanır. Bu durumda $S(BH) + S(MN) = AB^2 + BC^2$ ve aynı şekilde $S(DT) + S(IS) = AD^2 + CD^2$ yazılabilir.

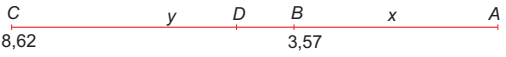
Şimdi eğer $(AB + BC)$ ve $(AD + DC)$ üzerine kurulan karelerde ortak *BH*, *UL* ve *IS* kareleri atılırsa geriye *LM*, *LN*, *KT* ve *KD* tamlayan alanlar kalır. Bu durumda örneğin eğer $LN = KT$ olsa iki miktarın toplamı eşit olur ve neticede $AB = DC$, diğer bir değişle *AC* hattının bölünme noktaları olan *D* ve *B* noktaları eşitlenmiş ya da her iki bölgenin uzun hatları kısa hatlarına eşit bir hale gelmiş olur ($AB = DC$ ve $AD = BC$). $LN \neq KT$ olması halinde aynı farkın iki toplamın ya da kısmın arasında bulunması gerektiğini anlaşılır ($AB = AD$ ve $DC = BC$). Son olarak bu kanıtlama yönteminin yukarıdaki önermelerden bağımsız olarak yürütüldüğünü belirtelim.



Şekil 32

***XL. Önerme*: *Birinci iki ortalayan*dan oluşan bir hat sadece bir noktada öz *ortalayan*lara bölünebilir.[1]**

Aksi halde *birinci iki ortalayan* hattının başka bir *D* noktasında da bölünmesi gerekirdi (*Şekil 33*). Bu durumda $AB^2 + BC^2$ ile $AD^2 + DC^2$ arasındaki fark $2(AB \times BC)$ ile $2(AD \times DC)$ arasındaki farka dönüşür. Bu yanlış olduğundan önermede öngörüldüğü gibi, *ortalayan* hat hattın üzerindeki başka bir noktada öz ortalayanlara bölünemez.



Şekil 33- Burada $\rho = 3$, $k = 2$; $(x + y) = \rho(k^{1/4} + k^{3/4}) \cong 8{,}62$.

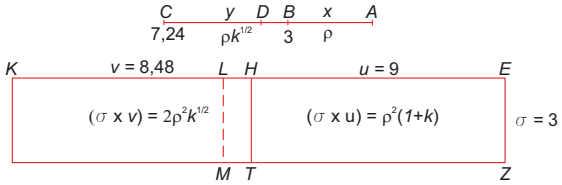
***XLI. Önerme*: *İkinci iki ortalayan*dan oluşan bir hat sadece bir noktada öz *ortalayan*lara bölünebilir.[2]**

Bir an bunun böyle olmadığını ve hattın *D* noktasında da öz ortalayanlarına ayrıldığını varsayalım (*Şekil 34*). Eğer *EZ* hattının rasyonel olduğu varsayılırsa, *HE* üzerinde $AB^2 + BC^2$ alanına eşit *ED* alanını ve aynı şekilde $2(AB \times BC)$ alanına eşit *KT* alanlarını kuralım. *HK* hattı *D* noktasıyla iki adet *iki adlı*ya bölünür. Sonra *HE* üzerinde $AF^2 + FC^2$ alanına eşit olan *EL* alanı kurulur. Geriye kalan *MK* alanı $2(AF \times FC)$ alanına eşit olur. Şu halde *HK* hattı *L* noktasıyla iki adet *iki adlı*ya bölünmüş olur. Bu durumda *HK* hattı hem *L* ve hem de *D* noktasında öz *ortalayan*ına bölünmüş olur ki bu yanlıştır ve *AC* sadece *B* noktasında öz *iki adlı*ya bölünür.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *43. Önerme* olarak verilir. Bu durumda bir önceki önermede söz konusu olan mantık yürütülürse, eğer bu mümkün olsa $x + y = x' + y'$ gibi iki farklı çözümün oluşması söz konusu olur. Bu durumda $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2x'y' - 2xy$ yazılabilir. Varsayım gereği $2x'y'$ ve $2xy$ rasyonel buna karşın $(x^2 + y^2)$ ve $(x'^2 + y'^2)$ ise *ortalamalı* alanlardır. Şu halde bu iki *ortalamalı* alanın farkı rasyonel olması gerekir ki bu mümkün değildir. Buna göre x', y' ile x, y ya da y, x birbirinden farklı olamaz.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *44. Önerme* olarak verilir. *İkinci iki ortalayan* hattın irrasyonelliği *iki adlı* hattın irrasyonelliği üzerine inşa edildiği gibi bu önerme de *39. Önerme*ye dayandırılır. Bir önceki önermede olduğu gibi bir an $(x + y) = (x' + y')$ gibi iki farklı çözümün varlığı varsayılır. $(x^2 + y^2)$ ve $2xy$ bir rasyonel σ doğrusuna $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$ ve $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ şeklinde uygulanır. *35. Önerme*de olduğu gibi $(x^2 + y^2)$ ve $2(x \times y)$ ve buna bağlı olarak $(\sigma \times u)$ ve $(\sigma \times v)$ ortalamalı alanlara karşı düşer. Buna göre u ve v rasyonel olup σ ile ortak bölenli hatlardır. Burada da varsayım gereği x, y hatları ortalamalı ve kareleri ortak bölmeli olduğundan x ile y ile x^2 ile $(x \times y)$ ortak bölenli değildir. Buna karşın$(x^2 + y^2)$ ile ortak bölenli olmakla birlikte, x^2 ile $2(x \times y)$, $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve u ile v ortak bölenli değildir. Şu halde u ve v kareleri ortak bölenli rasyonel hatlardır. $(x + y)^2 = (x' + y')^2$ ya da $(u \times v) = (u' + v')$ nedeniyle bir *iki adlı* hat iki farklı biçimde ayrılmış gibi görülse de bu imkânsızdır. Buna göre verilen bir *ikinci iki ortalayan* hat önermede öngörüldüğü gibi sadece bir şekilde iki kısma ayrılabilir.



Şekil 34- Burada $\rho = 3$; $k = 2$, $\sigma = 3$; $(x + y) = \rho(1 + \sqrt{k}) = 7{,}24$; $(\sigma \times u) = (x^2 + y^2) = \rho^2(1 + k) = 27$; $(\sigma \times v) = 2(x \times y) = 2\rho^2\sqrt{k} \cong 25{,}45$.

***XLII. Önerme*: *Daha büyük* (*majör*) bir hat sadece bir noktada iki kısma ayrılabilir.**[1]

Böyle olmadığını ve bir an hattın *D* noktasında da ikiye ayrılabileceğini varsayalım (*Şekil 34-1*). Bunun mümkün olamayacağı *iki adlıya* ilişkin *39. Öneri*de olduğu gibi kanıtlanabilir.

Şekil 34-1- Burada $\rho = 3$; $k = 2$; $(x + y) = (\rho/\sqrt{2}).\left[\sqrt{1 + k/(1 + k^2)} + \sqrt{1 - k/(1 + k^2)}\right] = 7{,}22$.

***XLIII. Önerme*: Rasyonel *ortalayan* bir alanın kenarı sadece bir noktada iki kısma ayrılabilir.**[2]

Bir an hattın *D* noktasında da ikiye bölünebileceğini varsayalım (*Şekil 34-2*). Bunun mümkün olamayacağı *birinci iki ortalayana* ilişkin *40. Öneri*de olduğu gibi kanıtlanabilir.

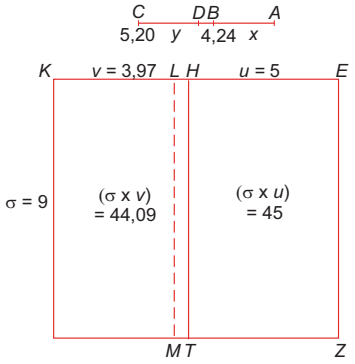
Şekil 34-2- Burada $\rho = 3$; $k = 2$; $(x + y) = \rho.(k^{1/4} + k^{3/4}) = 8{,}68$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *45. Önerme* olarak verilir. Önceki *38* ve *39. Önerme*lerde olduğu gibi $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2x'y' - 2xy$ yazılabilir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ ve $(x'^2 + y'^2)$ alanları rasyonel olduğundan farkları da rasyoneldir. Aynı şekilde varsayım gereği $2x'y'$ ve $2xy$ ile bunların farkları *ortalamalı* alanlardır. Şu halde bu iki *ortalamalı* alanın farkı rasyonel olması gerekir ki bu mümkün değildir. Şu halde göre x', y' ile x, y ya da y, x birbirinden farklı olamaz.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *46. Önerme* olarak verilir. Burada da daha önce olduğu gibi $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2x'y' - 2xy$ yazılabilir. Varsayım gereği sol taraftaki alanlar *ortalamalı*, sağ taraftakiler ise rasyoneldir. Şu halde burada da *20. Önerme*ye ters düşüldüğünden x, y çözümleri x', y' çözümlerinden farklı olamaz.

***XLIV. Önerme*: *İki ortalayan* alan toplamına ilişkin kenar sadece bir noktada ikiye ayrılabilir.**[1]

Bir an bu kenarın *D* noktasında da ikiye bölünebileceğini varsayalım (*Şekil 34-3*). Bu varsayımın imkânsız olduğu ikinci iki ortalayan hatta ilişkin *41. Önerme*ye göz önünde bulundurularak önermenin doğruluğu kanıtlanabilir.



Şekil 34-3- Burada $\rho = 3$; $k = 2$, $\lambda = 3$;$\sigma = 9$; $x = \rho\sqrt{k} \cong 4{,}24$; $y = \rho\sqrt{\lambda} \cong 5{,}20$; $(x + y) \cong 9{,}44$ $(\sigma \times u) = (x^2 + y^2) = \rho^2(k + \lambda) = 45$; $(\sigma \times v) = 2(x \times y) = 2\rho^2\sqrt{k\lambda} \cong 44{,}09$; $u = 5$; $v \cong 4{,}9$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *47. Önerme* olarak verilir. Eğer *41. Önerme*de verilen tanımlardan yararlanılırsa $(x + y) = (x' + y')$ gibi iki farklı çözümün varlığı varsayılırsa, $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$ ile $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ ve $(x'^2 + y'^2) = (\sigma \times u')$ ile $2(x' \times y') = (\sigma \times v')$ yazılabilir. Bu durumda $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ *ortalamalı* alanlar ve σ rasyonel olduğundan, u ile v rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve u ile v ortak bölenli değildir. Buna göre u ile v rasyonel ve kareleri ortak bölenlidir. Şu halde $(u + v)$ bir *iki adlı* hattır. Benzer şekilde $(u' + v')$ de bir *iki adlı* hattır. Neticede $(u + v) = (u' + v')$ olması gerekir ki bir *iki adlı* hattın iki farklı şekilde bölünmesi anlamına gelir. Bu imkânsız olduğundan önermenin öngördüğü gibi iki ortalamalı alan tek bir şekilde ikiye bölünebilir.

GİRİŞ (TANIMLAR)[1]

Birinci iki adlı: Eğer bir *iki adlı*da (*binomial*), büyük ve küçük kısımların kareleri farkı, büyük kısmın uzunluğa göre ortak bölenli hattın karesine eşit ve aynı anda verilen bir rasyonel büyüklükle ortak bölenliyse bu hatta *birinci iki adlı* adı verilir.

İkinci iki adlı: Eğer aynı özellik hattın küçük kısmı için geçerliye bu hatta *ikinci iki adlı* adı verilir.

Üçüncü iki adlı: Eğer her ikisinin sadece kareleri rasyonelse bu hatta *üçüncü iki adlı* adı verilir.

Dördüncü iki adlı: Eğer büyük ve küçük kısımların kareleri farkı, büyük kısmın uzunluğa göre ortak bölenli hattın karesine eşit ve aynı anda uzun kısım uzunluk itibariyle rasyonelse bu hatta *dördüncü iki adlı* adı verilir.

Beşinci iki adlı: Eğer aynı özellik hattın küçük kısmı için geçerliye bu hatta *beşinci iki adlı* adı verilir.

Altıncı iki adlı: Eğer her ikisinin sadece kareleri rasyonelse bu hatta *altıncı iki adlı* adı verilir.

ÖNERMELER

XLV. Önerme: *Birinci iki adlı*nın belirlenmesi.[2]

Verilen rasyonel büyüklüğün A [= $(\rho \times k)$] olduğunu varsayalım (*Şekil 35*). BC [=$(\rho \times k)$] ona eşit olan bir hattır. DE (= m^2) ve DZ (= n^2) iki karesel sayıdır. Onların farkı EZ [= $(m^2 - n^2)$] karesel değildir. Eğer DE/EZ [= $1/(1-\lambda^2)$]

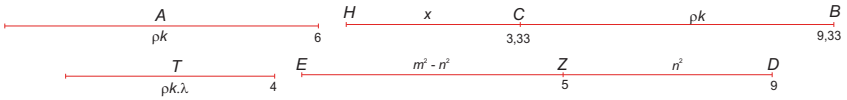
---

1 Öklid'in özgün eserinde bu ara bölüm *Tanımlar II* şeklinde 6 alt başlıkla verilir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XLVIII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer $(k \times \rho)$ verilen rasyonel ve uzunluğu ρ ile ortak bölenli bir hat ise, $(m^2 - n^2)$ bir kare olmamak üzere, $p(m^2 - n^2)$, pm^2 sayıları oluşturulur. Bu durumda x sayısı (1) $pm^2/[p(m^2 - n^2)] = (k^2\rho^2)/(x^2)$ ilişkisinden $x = (k \times \rho)\sqrt{m^2 - n^2}/m$ olarak hesaplanır. Şu halde *birinci iki adlı* hat $(k \times \rho) + x$ ya da (2) $(k \times \rho) + (k \times \rho)\sqrt{m^2 - n^2}/m$ olarak elde edilir. Kanıtlamak istenirse (1) ilişkisinden x rasyonel ve x^2 ile $(k^2 \times \rho^2)$ ortak bölenli, ancak x ile $(k \times \rho)$ ortak bölünmeyen, sadece rasyonel x ile $(k \times \rho)$ kareleri ortak bölünen ve bu nedenden $(k \times \rho) + x$ ilişkisinin bir *iki adlı* hat olduğu belirlenir. Ayrıca $(k^2\rho^2) > x^2$ için $(k^2\rho^2) - x^2 = y^2$ tanımlanırsa (1) ilişkisinden fark alınarak $(pm^2)/(pn^2) = (k^2\rho^2)/(y^2)$ bulunur. Buna göre rasyonel y ile $(k \times \rho)$ ortak bölenlidir. Şu halde $(k \times \rho) + x$ *birinci iki adlı* hattır. Buradan *iki adlı* hat, $\lambda = n/m$ olmak üzere, $(k \times \rho) + (k \times \rho)\sqrt{m^2 - n^2}/m = (k \times \rho)\,[1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$ olarak elde edilir. *82. Önerme*de bunun negatif işaretlisi $(k \times \rho)\,[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$ *birinci ayrılmış* (*apotome*) olarak tanımlanır. Bu ifadeler birlikte $x^2 - 2(k \times \rho)x + \lambda^2(k \times \rho)^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer. Diğer bir deyişle eğer $a = (k \times \rho)$ olarak tanımlanırsa *iki adlı* ve *birinci ayrılmış* $x^2 - 2ax + \lambda^2a^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

oranında olan BC^2/CH^2 $[(k \times \rho)^2/x^2 = 1/(1 - \lambda^2)]$ oranı kurulursa BH $[= x + (\rho \times k)]$ *birinci iki adlı*ya karşı düşer.

Kanıtı: BH hattının uzun kısmı BC uzunluk yönünden rasyoneldir. Ayrıca CH ile BC hatlarının sadece kareleri ortak bölenlidir. Eğer $T^2 = (BC^2 - CH^2)$ olarak tanımlanırsa fark ilişkisinden $BC^2/T^2 = DE/EZ$ yazılabilir. Buna göre $(BC^2 - CH^2) = T^2$ olmak üzere T ve BC hatları ortak bölenlidir.

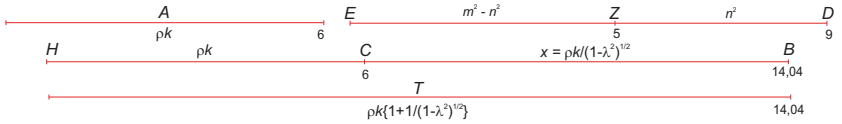


Şekil 35- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = n/m = 2/3$, $x = \rho k\sqrt{1-\lambda^2} \cong 3{,}33$;
$T = \sqrt{(BC^2 - CH^2)} = (\rho k \times \lambda) = 4$.

XLVI. Önerme: *İkinci iki adlı*nın belirlenmesi.[1]

Burada A $(= \rho)$ hattının rasyonel ve CH $[=(\rho \times k)]$ onunla ortak bölenli bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 35-1*). DE $(= m^2)$ ve DZ $(= n^2)$ iki karesel sayıdır. EZ/DE $[(m^2 - n^2)/m^2 = (1 - \lambda^2)]$ oranında olan CH^2/BC^2 $[x^2/(\rho \times k)^2]$ oranı kurulursa BH $[= x + (\rho \times k)]$ *ikinci iki adlı*ya karşı düşer.

Kanıtı: CH hattı uzunluğa göre rasyoneldir, BC hattının ise sadece karesi rasyoneldir. Eğer $T^2 = BC^2 - CH^2$ olarak tanımlanırsa fark ilişkisinden $CH^2/T^2 = EZ/DE$ yazılabilir. Buna göre $BC^2 - CH^2 = T^2$ olmak üzere T ve BC hatları ortak bölenlidir.



Şekil 35-1- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = n/m = 2/3$;
$x = \rho k/\sqrt{1-\lambda^2} \cong 8{,}05$; $T = \sqrt{(BC^2 - CH^2)} = \rho k[1 + (1/\sqrt{1-\lambda^2}] \cong 14{,}04$.

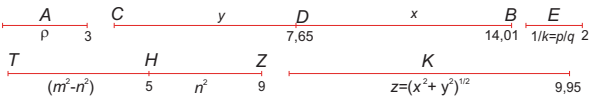
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XLIX. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: eğer ρ ile ortak bölenli rasyonel $(k \times \rho)$ doğrusu göz önünde bulundurulur ve bir önceki önermede olduğu gibi $p(m^2 - n^2)$, pm^2 sayıları göz önünde bulundurulursa (1) $[p(m^2 - n^2)]/pm^2 = (k^2\rho^2)/(x^2)$ ilişkisi yazılabilir. Bu ilişkiden $\lambda = n/m$ olmak üzere, $x = (k \times \rho)m/\sqrt{m^2 - n^2} = (k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2}$ elde edilir. Şu halde x rasyonel $(k \times \rho)$ ile karesi alınırsa ortak bölünebilir. Buna göre $(k \times \rho) + x$ bir iki adlı hattır. Ayrıca (1)'den $x^2 > k^2\rho^2$ olduğu görülür. Eğer $x^2 - k^2\rho^2 = y^2$ olarak tanımlanırsa (1) gereği $pm^2/pn^2 = (x^2)/(y^2)$ yazılabilir. Burada y rasyonel olup x ile ortak bölünebilir. Büyük kısım x küçük kısım $(k \times \rho)$ olmak üzere $(k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2} + (k \times \rho)$ ikinci iki adlı olarak adlandırılır. *83. Önerme*de bunun negatif işaretlisi $(k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2} - (k \times \rho)$ ile birlikte *iki adlı* ve *ikinci ayrılmış* $x^2 - 2(k \times \rho)x/[\sqrt{1-\lambda^2}] + \lambda^2(k \times \rho)^2/[\sqrt{1-\lambda^2}] = 0$ ya da $a = (k \times \rho)/[\sqrt{1-\lambda^2}]$ tanımıyla $x^2 - 2ax + \lambda^2a^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

XLVII. Önerme: *Üçüncü iki adlı*nın belirlenmesi.[1]

Burada A (= ρ) hattının rasyonel ve ZH (= m^2) ile ZT (= m^2) sayılarının karesel olduklarını varsayalım (*Şekil 36*). Bu sayıların farkı TH karesel bir sayı değildir. Ayrıca E (= p/q) karesel olmayan başka bir sayıdır. Buna göre E/HT {= $p/[q(m^2 - n^2)]$} oranı bir kareler oranı oluşturmaz. Eğer $E/HT = A^2/BD^2$ {ya da $p/[q(m^2 - n^2)] = \rho^2/x^2$} ve aynı şekilde $ZT/HT = BD^2/DC^2$ {ya da $(m^2)/[(m^2 - n^2)] = x^2/y^2$} oranları oluşturulursa BC [= $(x + y)$] hattı aranan *üçüncü iki adlı*yı belirler.

Kanıtı: BC hattının her iki kısmının karesi rasyonel ve aynı zamanda A ile ortak bölenlidir. Ayrıca $K^2 = BD^2 - DC^2$ olduğundan K ile BD ortak bölenli ve karelerinin oranı ZT^2/ZH^2 oranındadır (ya da $z^2/x^2 = m^2/n^2$).



Şekil 36- Burada $\rho = 3$, $k = q/p = 1/2$, $\lambda = n/m = 2/3$;
$x = \rho.m\sqrt{q/p} \cong 6{,}36$; $y = \rho\sqrt{(q/p)(m^2 + n^2)} \cong 7{,}65$; $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cong 9{,}95$.

XLVIII. Önerme: *Dördüncü iki adlı*nın belirlenmesi.[2]

*Birinci iki adlı*nın belirlenmesinde olduğu gibi A [=$(k \times \rho)$] = BC olarak seçilir (*Şekil 36-1*). Ancak şimdi $(EZ + DZ)$ [= $(m + n)$] sayısı karesel

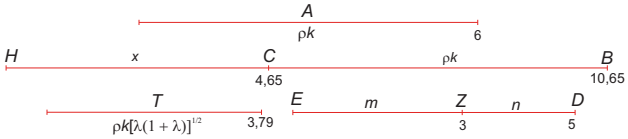
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *L. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Eğer ρ rasyonel bir hat, $q(m^2 - n^2)$, qm^2 sayıları ve p diğer sayılarla karesel bir ilişkisi bulunmayan bir üçüncü sayı olarak verildiğini varsayalım. Bu durumda aşağıdaki özelliklere sahip bir x sayısını göz önünde bulunduralım: (1) $p/(qm^2) = \rho^2/x^2$. (2) x rasyonel olmakla birlikte ρ ile ortak bölünemez. (3) Ayrıca $(qm^2)/[q(m^2 - n^2)] = x^2/y^2$ özellikli olduğunu varsayalım. (4) Buna göre y rasyonel ve x ile karesel ortak bölünebilir olduğundan bir *iki adlı* hattır. Eğer (1) ve (3) birlikte değerlendirilirse (5) $p/[q(m^2 - n^2)] = \rho^2/x^2$ ve neticede (6) y ile ρ ortak bölünemediği görülür. Eğer $z^2 = x^2 - y^2$ olarak tanımlanırsa (3) ilişkisinden $(qm^2)/(qn^2) = (x^2)/(z^2)$ yazılabilir, bu ise z ile x ya da $\sqrt{x^2 - y^2}$ ile x ifadelerinin ortak bölünebildiği anlamına gelir. Şu halde x, y ile ρ ortak bölünebilir. $(x + y)$ *üçüncü iki adlı* olarak adlandırılır. Burada (1) ilişkisinden $x = (\rho \times m).(\sqrt{q})/(\sqrt{p})$ ve (5) ilişkisinden $y = [\rho\sqrt{m^2 + n^2}.\sqrt{q}]/(\sqrt{p})$ olduğu görülür. Eğer $k = q/p$ ve $\lambda = n/m$ olarak tanımlanırsa *üçüncü iki adlı* kısaca $(x + y) = (\rho \times m).(\sqrt{k})\ [1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$ yazılabilir. *83. Önerme*de bunun negatif işaretlisi *üçüncü ayrılmış* $(\rho \times m).(\sqrt{k})\ [1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$ ile birlikte $x^2 - 2(m \times \rho)\sqrt{k}x + k\lambda^2(m \times \rho)^2 = 0$ ya da $a = (m \times \rho)\sqrt{k}$ tanımıyla $x^2 - 2ax + \lambda^2a^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LI. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: m, n sayılarının kareleri $(m + n)$ ile karesel bir oran oluşturmadığı varsayılır. Sonra $(m + n)/m = k^2\rho^2/x^2$ ilişkisini sağlayan x sayısı hesaplanır: $x = (k \times \rho)\sqrt{m/(m + n)} = (k \times \rho)/\sqrt{1 + \lambda}$. Bu durumda $(k \times \rho) + x = (k \times \rho)\ [1 + 1/\sqrt{1 + \lambda}]$ *dördüncü iki adlı* olarak adlandırılan bir hattır. $(k \times \rho)$ ile $\sqrt{(k \times \rho)^2 - x^2}$ ve $(k \times \rho)$ ile ρ ortak bölenli değildir. *84. Önerme*de bunun negatif işaretlisi *dördüncü ayrılmış* $(k \times \rho)[1 - 1/\sqrt{1 + \lambda}]$ ile birlikte bu iki ifade $x^2 - 2(k \times \rho)\,x + (k \times \rho)^2\,\lambda/(1 + \lambda) = 0$ ya da $a = (k \times \rho)$ tanımıyla $x^2 - 2ax + a^2\,\lambda/(1 + \lambda) = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

olmamak koşuluyla *DZ* ve *EZ* hatlarının karesi oluşturulur. Bu durumda $BC^2/T^2 = ED/DZ$ ifadesini sağlayan T [$= BC\sqrt{DZ/ED} = (k \times \rho)\sqrt{n/(m+n)}$] aranan *dördüncü iki adlı*dır [burada $CH^2/CB^2 = DZ/ED$ koşulunu ya da karekökü alınırsa $CH = x = (k \times \rho)/\sqrt{1+\lambda}$ ilişkisini sağlar].

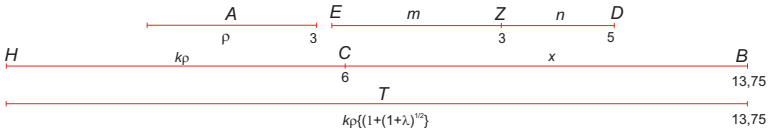
Kanıtı: $BC^2/T^2 = ED/DZ$ olduğundan varsayım gereği T ile BC ortak bölensizdir, ancak $T^2 = (BC^2 - CH^2)$ ifadesi geçerlidir {$T^2 = (\rho \times k)^2[\lambda/(1+\lambda)]$}.



Şekil 36-1- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = n/m = 2/3$; $x = \rho.k/\sqrt{1+\lambda} \cong 4{,}65$; $T = \rho.k\sqrt{\lambda/(1+\lambda)} \cong 3{,}79$.

XLIX. Önerme: *Beşinci iki adlı*nın belirlenmesi.[1]

Bu önermede *ikinci iki adlı*nın belirlenmesinde olduğu gibi davranılır. Ancak burada *DZ* ve *EZ* sayıları *dördüncü iki adlı*da olduğu gibi seçilir (*Şekil 36-2*).



Şekil 36-2- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = n/m = 2/3$;

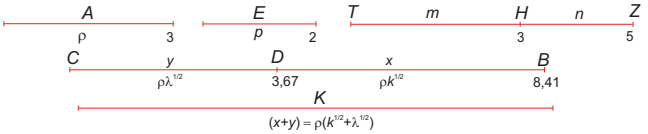
$x = \rho.k\sqrt{1+\lambda} \cong 4{,}65$; $T = \rho.k[1 + \sqrt{1+\lambda}] \cong 13{,}75$.

L. Önerme: *Altıncı iki adlı*nın belirlenmesi.[2]

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: İlkin *m, n* sayılarının son önermede öngörülen özellikleri taşıdıkları varsayılır. Sonra $m/(m+n) = k^2\rho^2/x^2$ ilişkisini sağlayan x sayısı hesaplanır: $x = (k \times \rho)\sqrt{(m+n)/m} = (k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$. Buna göre $x > (k \times \rho)$ olmak üzere $(k \times \rho) + x = (k \times \rho)[1 + \sqrt{1+\lambda}]$ *beşinci iki adlı* olarak adlandırılır. Bu durumda $\sqrt{x^2 - (k \times \rho)^2}$ ya da $(k \times \rho)\sqrt{\lambda}$ ile $(k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$ ya da x ile ortak bölenli değildir. Ayrıca $(k \times \rho)$ ile ρ ortak bölenli olmakla birlikte bu $(k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$ için geçerli değildir. *85. Önerme*de bunun negatif işaretlisi *beşinci ayrılmış* $(k \times \rho)[\sqrt{1+\lambda}\text{-}1]$ ile birlikte bu iki ifade $x^2 - 2(k \times \rho)\,x + \lambda.(k \times \rho)^2 = 0$ ya da $a = (k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$ tanımıyla $x^2 - 2ax + a^2\,\lambda/(1+\lambda) = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LIII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *m, n* sayılarının kareleri $(m+n)$ ile karesel bir oran oluşturmadığı varsayılır, karesel olmayan bir üçüncü p sayısının da m ve $(m+n)$ ile karesel bir ilişki oluşturmadığı varsayılır. Sonra (1) $p/(m+n) = \rho^2/x^2$ ya da x rasyonel olmakla birlikte ρ ile ortak bölünemez ve (2) $(m+n)/m = x^2/y^2$ ya da y rasyonel olmakla birlikte x ile ortak bölünemez. Bu ilişkileri sağlayan x ve y sayıları belirlenir. Bu durumda $(x+y)$ aranan *altıncı iki*

Bu önermede *üçüncü iki adlı*nın belirlenmesinde olduğu gibi davranılır ve bu önermede kullanılan şekle benzer bir şekilden yararlanılır (*Şekil 36-3*).



Şekil 36-3- Burada $\rho = 3$, $n = 2$, $m = 3$, $p = 2$, $k = (m + n)/p = 5/2$, $\lambda = m/p = 3/2$; $x = \rho\sqrt{k} \cong 4{,}74$; $y = \rho\sqrt{\lambda} \cong 3{,}67$; $T = (x + y) = \rho\,[\sqrt{k} + \sqrt{\lambda}] \cong 8{,}41$.

***LI. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *birinci iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat da bir *iki adlı*dır.**[1]

Verilen bir *BC* alanında *AB* (= ρ) kenarının rasyonel ve *AC* {= $(\rho \times k)$ $[1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$} kenarının bir *birinci iki adlı* olduğunu varsayalım (*Şekil 37*). *AC* kenarı *D* noktasında *DC* {= $(\rho \times k)\sqrt{1 - \lambda^2}$} < *DA* {= $(\rho \times k)$} olacak şekilde birinci iki adlının iki kısmına bölünür. *DC* hattı *E* noktasında yarıya

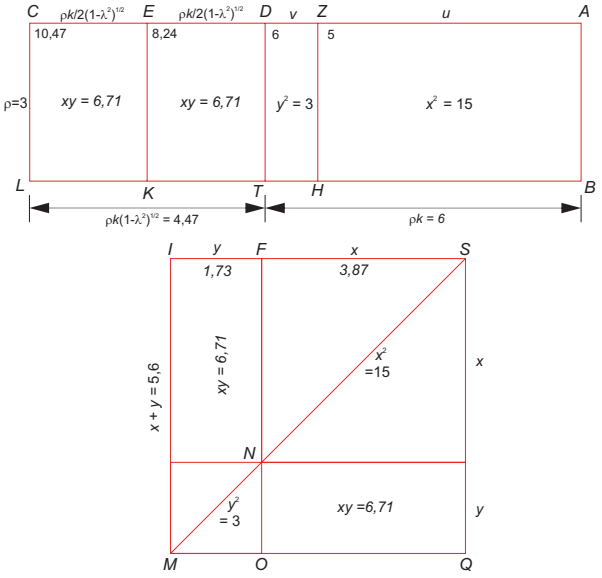
---

*adlı*yı belirler. Buna göre x ve y ifadelerinin sadece kareleri ortak bölünebilir ve $(x + y)$ bir iki adlı hatta karşı düşer. (1) ve (2) ifadeleri eşitlenirse (3) $p/m = \rho^2/x^2$ ya da y ile ρ ortak bölünemediği sonucuna ulaşılır. Şu halde x ve y ile ρ ortak bölünemez. Son olarak (2) ye fark ifadesi uygulanırsa $(m + n)/n = x^2/(x^2 - y^2)$ ya da $\sqrt{x^2 - y^2}$ ile x ortak bölünemez. Neticede $x = \rho\sqrt{(m + n)/p} = \rho\sqrt{k}$ ve $y = \rho\sqrt{m/p} = \rho\sqrt{\lambda}$ ile bunlara ilişkin *altıncı iki adlı* hat $(x + y) = \rho(\sqrt{k} + \sqrt{\lambda})$ ve ilişkin *86. Önerme* gereği *altıncı ayrılmış* $(x - y) = \rho(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda})$ olarak elde edilir. Her ikisi $x^2 - 2(\sqrt{k} \times \rho)\,x + (k - \lambda)\rho^2 = 0$ ya da $a = (\sqrt{k} \times \rho)$ tanımıyla $x^2 - 2ax + a^2[(k - \lambda)/k] = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LIV. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *45. Önerme*den bilindiği kadarıyla *birinci iki adlı* $(k \times \rho)[1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$ şeklinde bir ifadedir. Bu önermede aranan çözüm ρ rasyoneliyle çarpılan $\rho(k \times \rho)[1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$ ifadesinin karekökünü bulmak ve bu söz konusu kökün *33. Önerme*de tanımlanan bir *iki adlı doğru*ya karşı düştüğünü göstermek anlamına gelir. Geometrik çözüm cebirsel çözümü izler. İlkin (1) $(u + v) = (k \times \rho)$ ve $(u \times v) = k^2\rho^2(1 - \lambda^2)/4$ denklemleri çözülür, bu çözüm (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ karelerini bulur. Aranan karekök $(x + y)$ ifadesine karşı düşer. (1) denklemleri çözülürse $(u + v) = \lambda\,(k \times \rho)$, $u = (k \times \rho).(1 + \lambda)/2$ ve $v = (k \times \rho).(1 - \lambda)/2$ elde edilir. Şu halde (2) ilişkilerinden $x = \rho\sqrt{(k/2)(1 + \lambda)}$ ve $y = \rho\sqrt{(k/2)(1 - \lambda)}$ ya da $(x + y) = \rho\sqrt{k/2}\left[\sqrt{(1 + \lambda)} + \sqrt{(1 - \lambda)}\right]$ bulunur ki bu ifade *XXIII. Önerme*'de açıkça belirtildiği gibi bir *iki adlı hat*tır. Öklid şekillerinde sayıları doğrularla ifade ettiğinden $(x + y)$ ifadesinin $(k \times \rho^2)[1 + \sqrt{1 - \lambda^2}]$ ilişkisinin karekökü olduğunu göstermesi gerekir. Bunun için $(x \times y) = (k/2)\rho^2\sqrt{1 - \lambda^2}$ olduğunu gösterdikten sonra $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2(x \times y) = \rho(u + v) + 2(x \times y) = (k \times \rho^2) + (k \times \rho^2)\sqrt{1 - \lambda^2}$ ya da $(x + y) = \left[(k \times \rho^2)(1 + \sqrt{1 + \lambda^2}\right]^{1/2}$ olduğu görülür. Ayrıca u ile v ve u, v ile $(u + v)$ ve ρ ortak bölenlidir. Şu halde u, v rasyoneldir. Aynı şekilde $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$ rasyonel ve ortak bölenlidir. Neticede x^2 ve y^2 rasyonel ve ortak bölenlidir. Buna karşın $(k \times \rho)$ ile $(k \times \rho)\sqrt{1 - \lambda^2}$ ortak bölenli olmamakla birlikte $(k \times \rho)$ ile u ve $(k \times \rho)\sqrt{1 - \lambda^2}$ ile $[(k \times \rho)/2]\sqrt{1 - \lambda^2}$ ortak bölenlidir. Bunun sonucunda u ile $[(k \times \rho)/2]\sqrt{1 - \lambda^2}$ ve $(u \times \rho)$ ile $[(k \times \rho)/2]\sqrt{1 - \lambda^2}$ ya da x^2 ile $(x \times y)$ ve x ile y ortak bölenli değildir. Nihayet x ile y rasyonel kareleri ortak bölenli *iki adlı* hatlar olup $(x - y)$ bir *iki adlı hat*tır. Buna ilişkin negatif işaretli *ayrılmış* $(x - y) = \rho\sqrt{k/2}\left[\sqrt{(1 + \lambda)} - \sqrt{(1 - \lambda)}\right] = \left[(k \times \rho^2)(1 - \sqrt{1 + \lambda^2}\right]^{1/2}$ olduğundan *birinci iki adlı* ve *birinci ayrılmış* $x^2 - 2k\rho^2x + \lambda^2k^2\rho^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer. Bu önermeye ve *LXXXVIII. Önerme*ye ilişkin çözümlerin tümü $x^4 - 2k\rho^2x^2 + \lambda^2k^2\rho^4 = 0$ çift karesel denkleminin köklerine karşı düşer.

bölünür $\{DE = EC = [(\rho \times k)/2]\sqrt{1-\lambda^2}\}$. *AD* hattı ise *Z* noktasıyla *DE* hattı karesinin kenarlarına eşit olacak şekilde ikiye bölünür $\{DE^2 = [(\rho \times k)/2]^2 (1-\lambda^2) = (AZ \times DZ) = [(\rho \times k)/2](1+\lambda) \times [(\rho \times k)/2](1-\lambda)\}$. Bu durumda *AD* hattı *Z* noktasında *AZ* ile *ZD* kısımları birbirleriyle ortak bölenli olacak şekilde ayrılmış olur. Sonra *AB* hattına paralel *ZH*, *DT* ve *EK* hatları çekilir.

Daha sonra *AH* alanına eşit *SN* karesi, aynı şekilde *SN* köşegeni üzerinde *DH* alanına eşit *MN* karesi oluşturulur. *IQ* alanını tamamlayan tüm hatlar çekilir. Bu durumda yukarıda gösterildiği gibi *AZ*/*DE* = *EC*/*DZ* olduğundan ρ ile çarpılırsa ve bölünürse S(*SN*)/S(*NI*) = S(*NI*)/S(*MN*) yazılabilir. Şu halde S(*NI*) alanı ortak bölendir. S(*NI*) = *TE* ve S(*IQ*) = *BC* olduğu görülür. *BC* alanının kenarı ya da karekökü *iki adlı* ya da ortak bölenli olduğundan kendileri de rasyoneldir. Sonuçta *CD* ve *AD* hatlarının kareleri rasyoneldir. Rasyonel *AH* ve *HD* alanlarının her biri orantılı oldukları *TE* ve *EL* alanlarıyla ortak bölensiz olduklarından *SF*' ve *FI* hatları da ortak bölensiz dir. Şu halde *BC* kökü *AC* hattı bir *iki adlı*dır.

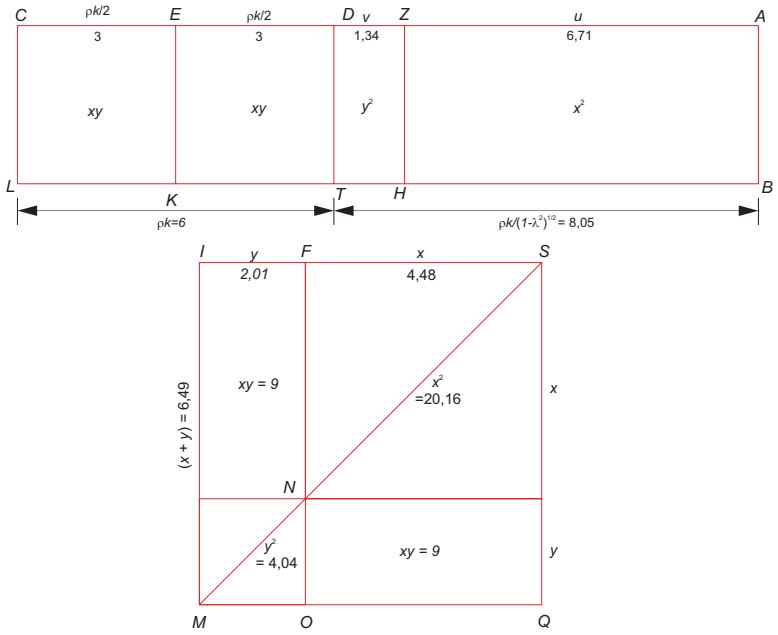


Şekil 37- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho k = 6$; $\rho k\sqrt{1-\lambda^2} \cong 4{,}47$; $u = (\rho k/2)(1+\lambda) = 5$; $v = (\rho k/2)(1-\lambda) = 1$; $x^2 = (\rho \times u) = 15$; $x \cong 3{,}87$; $y^2 = (\rho \times v) = 3$; $y \cong 1{,}73$; $(x \times y) = \sqrt{45} \cong 6{,}71$; $(x + y) = 5{,}6$; $(x + y)^2 = \rho^2 k(1 + \sqrt{1-\lambda^2}) \cong 31{,}42$.

***LII. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *ikinci iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat da bir *birinci iki ortalayan*dır (*bimedial*).**[1]

Verilen *BC* alanında *AB* (= ρ) kenarının rasyonel ve *AC* {= ($k \times \rho$) $[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}]$} kenarının ise bir *birinci iki ortalayan* olduğunu varsayalım (*Şekil 37-1*). Önceki önermede izlenen yol burada da geçerli olmakla birlikte burada *AH* ve *HD* alanları ortak bölenli, ayrıca *AT* alanı da bunlarla ortak bölenli ve *ortalayan* bir alandır. *DK* ve *KC* alanları rasyoneldir. Buna göre *SN* ve *NM* kareleri ortak bölenli ve *ortalayan*dır. *NI* ve *NQ* tamlayan alanlar da rasyoneldir. *SF* (= x) ve *FI* (= y) hatları rasyonel, ancak kareleri ortak bölenlidir. Bu hatlar rasyonel *IN* alanının kenarlarını oluşturur. Neticede *AC* hattı bir *birinci iki adlı*dır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LV. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *46. Önerme*den bilindiği kadarıyla *ikinci iki adlı* $(k \times \rho)[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}]$ şeklinde bir ifadedir. Bu önermede aranan çözüm ρ rasyoneliyle çarpılan $\rho(k \times \rho)[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}]$ ifadenin karekökünü bulmak ve bu söz konusu kökün *XXIV. Önerme*de tanımlanan bir *birinci iki ortalayan*a karşı düştüğünü göstermek anlamına gelir. Bunun için Öklid ilkin u ve v ifadelerini bulmak için (1) $(u + v) = (k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2}$ ve $(u \times v) = k^2\rho^2/4$ denklemlerini çözer, buradan (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ karelerini hesaplar. Aranan karekökün $(x + y) = \{\rho(k \times \rho)[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}]\}^{1/2}$ ifadesine karşı düştüğünü gösterir. Bu amaca yönelik olarak önceki önermede önerilen yöntem izlenir. (1) ve *13. Önerme* nedeniyle u ile v ortak bölenli ve rasyonel olduğu gibi $(u + v)$ ile ve ρ ile ortak bölenlidir. Şu halde $(\rho \times u)$, $(\rho \times v)$ x^2, y^2 ya da x, y *ortalayan* sayılardır. Ayrıca u ile v ortak bölenli olduğundan x^2 ile y^2 alanları da ortak bölenlidir. Burada $(u + v)$ ya da $(k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2}$ ile $(k \times \rho)$, u ile $(k \times \rho)/2$, $(\rho \times u)$ ile $(k \times \rho^2)/2$, x^2 ile $(x \times y)$, x ile y ortak bölenli değildir. Neticede x, y *ortalayan* ve kareleri ortak bölenlidir. Neticede $(x \times y) = (k \times \rho^2)/2$ rasyonel olduğundan $(x + y)$ bir birinci iki ortalayan hattır. (1) ilişkilerinden $u = (k \times \rho).(1 + \lambda)/2\sqrt{1-\lambda^2}$ ile $v = (k \times \rho).(1 - \lambda)/2\sqrt{1-\lambda^2}$ ve $(x + y) = \rho\left\{\sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{1/2}} + \sqrt{\frac{k}{2}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{1/2}}\right\}$ elde edilir. *Ortalayan*a ilişkin negatif işaretli *ayrılmış*la birlikte her iki ilişki *46. Önerme*deki eşdeğer $x^4 - 2(k \times \rho^2)x^2/[\sqrt{1-\lambda^2}] + \lambda^2(k^2 \times \rho^4)/[1 - \lambda^2] = 0$ *çift karesel* denklemin köklerine karşı düşer.



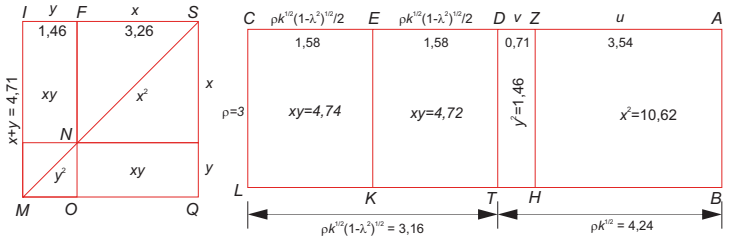
Şekil 37-1- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho k = 6$; $\rho k/\sqrt{1-\lambda^2} \cong 8{,}05$;
$u = (\rho k/2)(1+\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2} \cong 6{,}71$; $v = (\rho k/2)(1-\lambda)/\sqrt{1-\lambda^2} \cong 1{,}34$;
$x = \sqrt{(\rho \times u)} = \rho\sqrt{k/2}\sqrt{\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)}} \cong 4{,}49$; $y = \sqrt{(\rho \times v)} = \rho\sqrt{k/2}\sqrt{\sqrt{(1-\lambda)/(1+\lambda)}} \cong 2{,}01$;
$(x \times y) = \rho^2 k/2 = 9$; $(x+y) = \sqrt{\rho}\,(\sqrt{u}+\sqrt{v}) \cong 6{,}49$; $(x+y)^2 = \rho^2 k[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}] \cong 42{,}15$.

***LIII. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *üçüncü iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat da bir *ikinci iki ortalayan*dır.**[1]

Verilen alan ve iki hattın önceki önermede olduğu gibi tanımlandığını varsayalım (*Şekil 37-2*). Ancak burada *AH* ve *HD* alanları ortalayan ve ortak bölenli alanlardır. Aynı şekilde *DK* ve *KC* alanları ortalayan alanlardır. *AT* ve *TC* alanları ortak bölensizdir. Bunun sonucu *SN* ve *NM* kareleri ortalayan ve ortak bölenlidir. Buna karşın *NI* ve *NQ* alanları ortak bölensiz

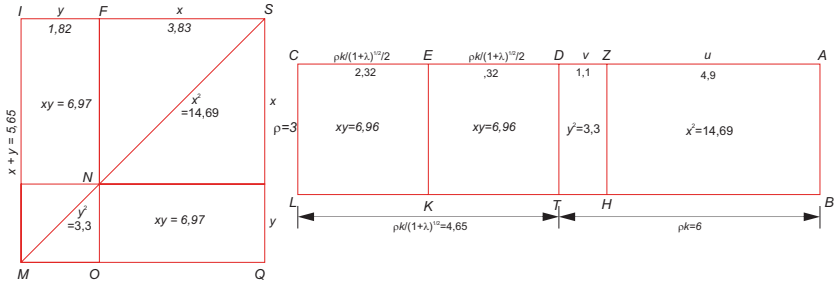
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LVI. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *47. Önerme*den bilindiği kadarıyla *üçüncü iki adlı* $\rho(\sqrt{k} \times \rho)[1 + \sqrt{1-\lambda^2}]$ şeklinde bir ifadedir. Daha önce olduğu gibi (1) $(u+v) = \rho\sqrt{k}$ ve $(u \times v) = k\rho^2(1 - \lambda^2)/4$ denklemleri çözülür ve buradan (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ kareleri hesaplar. Aranan $(x+y)$ karekökü *35. Önerme*de tanımlanan *ikinci iki ortalayan* hattır. Son önermede olduğu gibi x ve y *ortalayan* hatların kareleri ortak bölenlidir. Şu halde $(x \times y) = \sqrt{k}\rho^2\sqrt{1-\lambda^2}/2$ *ortalayan* alan ve $(x+y)$ bir ikinci iki ortalayandır. (1) ve (2) ilişkileri çözülürse $u = \sqrt{k}\rho(1+\lambda)/2$, $v = \sqrt{k}\rho(1-\lambda)/2$ ve $(x+y) = \rho(k)^{1/4}\sqrt{(1+\lambda)/2} + \rho(k)^{1/4}\sqrt{(1-\lambda)/2}$ bulunur. Buna ilişkin negatif işaretli *ayrılmış*la birlikte her iki ilişki *XLVII. Önerme*de olduğu gibi $x^4 - 2\sqrt{k}\rho^2x^2 + \lambda^2k\rho^4 = 0$ *çift karesel* denklemin köklerine karşı düşer.

olmakla birlikte ortalayandır. Neticede *SF* ve *FI* ancak karesel ortak bölenli ve ortalayan hatlar olduğundan ortalayan *NI* alanının kenarlarını oluşturur ve *SI* bir *ikinci iki ortalayan hat*tır.



Şekil 37-2- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho\sqrt{k} \cong 4{,}24$; $\rho\sqrt{k}\sqrt{1-\lambda^2} \cong 3{,}16$; $u = (\rho\sqrt{k}/2)(1+\lambda) \cong 3{,}54$; $v = (\rho\sqrt{k}/2)(1-\lambda) \cong 0{,}71$; $x = [\rho(k)^{1/4}\sqrt{1+\lambda}]/\sqrt{2} \cong 3{,}26$; $y = [\rho(k)^{1/4}\sqrt{1-\lambda}]/\sqrt{2} \cong 1{,}46$; $(x+y) = \rho(k)^{1/4}[\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{1-\lambda}]/\sqrt{2} \cong 4{,}71$; $(x \times y) = [\rho^2(k)^{1/2}\sqrt{1-\lambda^2}]/2 \cong 4{,}74$.

***LIV. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *dördüncü iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat *büyük*tür (*majör*).[1]**



Şekil 37-3- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho k = 6$; $\rho k/\sqrt{1+\lambda} \cong 4{,}65$; $u = (\rho k/2)(1+\sqrt{\lambda/(1+\lambda)} \cong 4{,}9$; $v = (\rho k/2)(1-\sqrt{\lambda/(1+\lambda)} \cong 1{,}1$; $x = \sqrt{(\rho \times u)} \cong 3{,}83$; $y = \sqrt{(\rho \times v)} \cong 1{,}82$; $(x \times y) = 6{,}97$; $(x+y) \cong 5{,}65$; $(x+y)^2 \cong 31{,}92$.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LVII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *XLVIII. Önerme*den bilindiği kadarıyla *dördüncü iki adlı* $\rho(k \times \rho)[1 + 1/\sqrt{1-\lambda^2}]$ şeklinde bir ifadedir. Daha önce olduğu gibi (1) $(u+v) = (\rho \times k)$ ve $(u \times v) = k^2\rho^2/4(1-\lambda)$ denklemleri çözülür ve buradan (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ kareleri hesaplar. Aranan $(x+y)$ karekökü *XXXVI. Önerme*de tanımlanan *büyük* hattır.

Öklid bunu şu şekilde kanıtlar: u ile v, $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$, x^2 ile y^2 ortak bölünemediğinden x ile y karesi ortak bölünemez. Ancak $(u+v)$ ile ρ ortak bölünebildiğinden, $\rho(u+v)$ ya da (x^2+y^2) bir rasyonel buna karşın $(x \times y) = (\rho^2 \times k)/4(1+\lambda)$ bir *ortalayan* alan olduğundan $(x+y)$ bir enbüyük irrasyonel hattır. (1) ve (2) ilişkileri çözülürse $u = \frac{1}{2}(\rho \times k)[1+\sqrt{\lambda/(1+\lambda)}$, $v = \frac{1}{2}(\rho \times k)1+\sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]$ ve $(x+y) = \rho\{(k/2)[1+\sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2} + \rho\{(k/2)[1-\sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2}$ bulunur. Buna ilişkin negatif işaretli *ayrılmış*la birlikte her iki ilişki *XLVIII. Önerme*de olduğu gibi $x^4 - 2k\rho^2.x^2 + k^2\rho^4[\lambda/(1+\lambda)] = 0$ *çift karesel* denklemin köklerine karşı düşer.

Bu önermede *AZ* ve *ZD* hatları ortak bölensiz, *AT* alanı rasyonel ve *TC* alanı *ortalayan*dır (*Şekil 37-3*). Neticede *SF* ile *FI* hatlarının kareleri ortak bölensiz, ancak (*SF* + *FI*) rasyonel ve 2(*SF* × *FI*) ise ortalayan olduğundan *IQ* alanının kökü bir *büyük*tür.

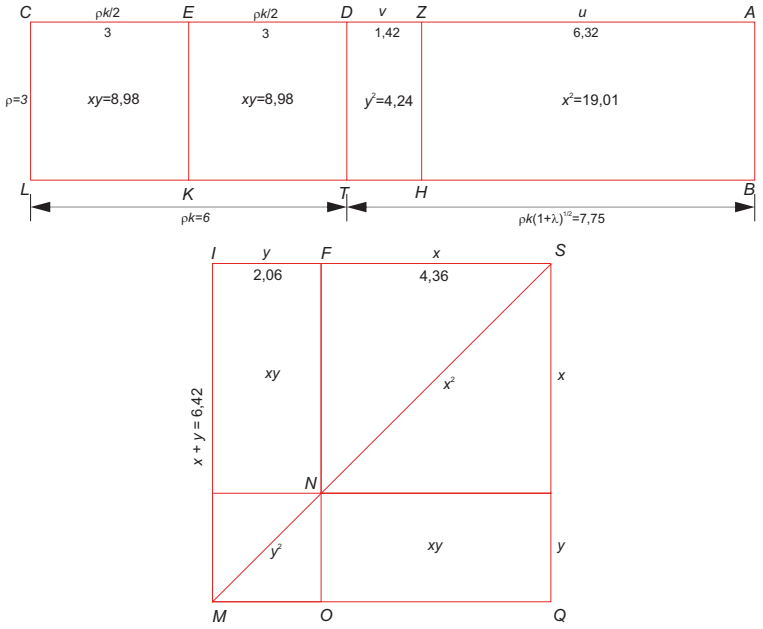
***LV. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *beşinci iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat bir *rasyonel artı ortalayan*ın köküdür.**[1]

Burada *AZ* ve *ZD* hatları ortak bölensiz, *TC* alanı rasyonel ve *AT* alanı *otalayan*dır (*Şekil 37-4*). Neticede *SF* ile *FI* hatlarının kareleri ortak bölensiz, ancak (*SF* + *FI*) *ortalayan* ve 2(*SF* × *FI*) ise rasyonel olduğundan *IQ* alanı kökü bir rasyonel *ortalayan*dır.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LVIII. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *XLIX. Önerme*den bilindiği kadarıyla *beşinci iki adlı* $\rho(k\times \rho)[\sqrt{1+\lambda}\ +\ 1]$ şeklinde bir ifadedir. Daha önce olduğu gibi (1) $(u + v) = (\rho \times k)\sqrt{1+\lambda}$ ve $(u \times v) = k^2\rho^2/4$ denklemleri çözülür ve buradan (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ kareleri hesaplar. Aranan $(x + y)$ karekökü *XXXVII. Önerme*de tanımlanan *bir rasyonel artı ortalayan*ın köküdür.

Öklid bunu şu şekilde kanıtlar: *u* ile v, $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$, x^2 ile y^2 ortak bölünemediğinden *x* ile *y* karesi ortak bölünemez. Ayrıca $(u + v)$ ile $(\rho \times k)$ ya da ρ da ortak bölenli değildir. Buna göre $\rho(u + v)$ ya da $(x^2 + y^2)$ bir *ortalayan* alan ve $(x \times y) = (\rho^2 \times k)/2$ bir *rasyonel* alandır. Buna göre *37. Önerme* gereği $(x + y)$ bir rasyonel artı ortalayan alandır. (1) ve (2) ilişkileri çözülürse $u = ½(\rho \times k)\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}$, $v = ½(\rho \times k)\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}$ ve $(x + y) = \rho\{(k/2)[\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}]\}^{1/2} + \rho\{(k/2)[\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}]\}^{1/2}$ bulunur. Buna ilişkin negatif işaretli *ayrılmış*la birlikte her iki ilişki *XLIX. Önerme*de olduğu gibi $x^4 - 2k\rho^2\sqrt{1+\lambda}.x^2 + \lambda k^2\rho^4 = 0$ *çift karesel* denklemin köklerine karşı düşer.



Şekil 37-4- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho k = 6$; $\rho k\sqrt{1+\lambda} \cong 7{,}75$;

$u = ½(\rho \times k)[\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}] \cong 6{,}32$; $v = ½(\rho \times k)[\sqrt{1} + \lambda - \sqrt{\lambda}] \cong 1{,}42$;

$x = \sqrt{(\rho \times u)} \cong 4{,}36$; $y = \sqrt{(\rho \times v)} \cong 2{,}06$; $(x \times y) = (\rho^2 \times k)/2 \cong 8{,}98$;

$(x + y) = \rho\sqrt{k/2}\ \{[\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}]^{1/2} + [\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}]^{1/2}\} \cong 6{,}42$; $(x + y)^2 \cong 41{,}22$.

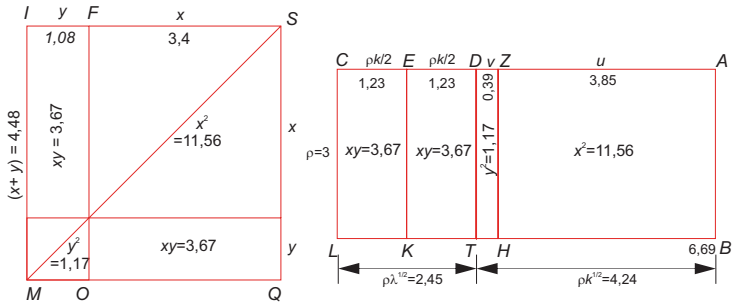
***LVI. Önerme*: Eğer bir alanın iki kenarından biri rasyonel, diğeri *altıncı iki adlı*ysa, bu durumda alanın kökü olan irrasyonel hat *iki ortalayan*ın köküdür.**[1]

Burada *AE* ve *EF* hatları ortak bölensiz, *AT* alanı *otalayıcı* ve TC ile ortak bölensizdir (*Şekil 37-5*). Neticede *C'F'* ile *F'A'* hatlarının kareleri ortak

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LIX. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: *L. Önerme*den bilindiği kadarıyla *altıncı iki adlı* $\rho[(\sqrt{k} \times \rho) + \sqrt{\lambda} \times \rho)]$ şeklinde bir ifadedir. Daha önce olduğu gibi (1) $(u + v) = (\sqrt{k} \times \rho)$ ve $(u \times v) = \lambda\rho^2/4$ denklemleri çözülür ve buradan (2) $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ kareleri hesaplar. Aranan $(x + y)$ karekökü *iki ortalayan* alan kenarları toplamına eşittir.

Öklid bunu şu şekilde kanıtlar: x ile y karesel ortak bölünemez. Buna karşın $(\sqrt{k} \times \rho)$ ile ρ ifadelerinin sadece kareleri ortak bölünebilir. Bu nedenden $\rho(u + v)$ ya da $(x^2 + y^2)$ alanları otalayandır. Aynı şekilde $(x \times y) = (\rho^2 \times \sqrt{k})/2$ alanı da ortalayan olduğundan $(\rho \times \sqrt{k})$ ile $(\rho \times \sqrt{k})/2$, $(\rho^2 \times \sqrt{k})$ ile $(\rho^2 \times \sqrt{k})/2$ ve neticede $(x^2 + y^2)$ ile $(x \times y)$ ortak bölünmez. Şu halde $(x + y)$ bir *ortalayan alanın iki kenar toplamı*ndan oluşur. (1) ve (2) ilişkileri çözülürse $u = (\rho/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}]$, $v = (\rho/2)[\sqrt{k} - \sqrt{k - \lambda}]$ ve $(x + y) = \rho\{(1/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}]\}^{1/2} + \rho\{(1/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}]\}^{1/2}$ bulunur. Buna ilişkin negatif işaretli *ayrılmış*la birlikte her iki ilişki *50. Önerme*de olduğu gibi $x^4 - 2\sqrt{k}\rho^2.x^2 + (k - \lambda)\rho^4 = 0$ *çift karesel* denklemin köklerine karşı düşer.

bölensiz, ancak ($C'F' + F'A'$) ve $2(C'F' \times F'A')$ *ortalayan* ve diğerleriyle ortak bölensiz değildir. $A'C'$ hattı ise öneride öngörüldüğü gibi bir *ortalayan köku*dür.



Şekil 37-5- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\rho\sqrt{k} = 4{,}24$; $\rho\sqrt{\lambda} \cong 2{,}45$;

$u = (\rho/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}] \cong 3{,}85$; $v = (\rho/2)[\sqrt{k} - \sqrt{k - \lambda}] \cong 0{,}39$;

$x = \sqrt{(\rho \times u)} \cong 3{,}4$; $x^2 \cong 11{,}56$; $y = \sqrt{(\rho \times v)} \cong 1{,}08$; $y^2 \cong 1{,}17$; $(x \times y) = (\rho^2 \times \sqrt{\lambda})/2 \cong 3{,}67$;

$(x + y) = (\rho/\sqrt{2})\ \{[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}\,]^{1/2} + [\sqrt{k} - \sqrt{k - \lambda}\,]^{1/2}\}^{1/2}\} \cong 4{,}48$; $(x + y)^2 \cong 20{,}07$.

***LVII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *iki adlı* karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *birinci iki adlı*ya eşittir.**[1]

Verilen *iki adlı*nın AB [$= \rho\ (1 + \sqrt{k})$] hattına eşit olduğunu ve C noktasında bu hattın iki kısma ayrıldığını varsayalım (*Şekil 38*). Burada DE ($= \sigma$) verilen rasyonel hattır. DE üzerinde AB^2'ye eşit olan EZ alanı kurulur.

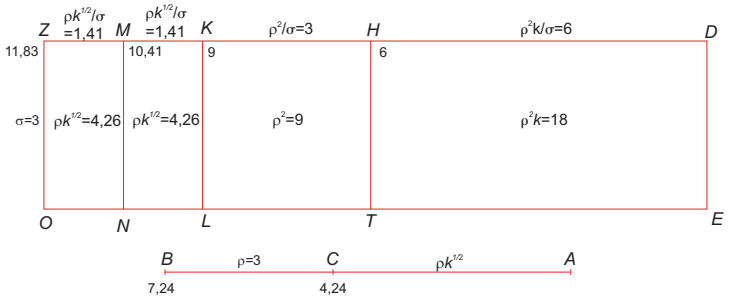
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LX. Önerme* olarak verilir. Önerme şu anlama gelir: Bu ve bundan sonra gelen beş önerme, önceki *54-59. Önerme*lerde ele alınan onunun tersi niteliğindedir. Amaç *XXXIII. Önerme* gereği $\rho(1 + \sqrt{k})$ bir *iki adlı* olduğuna göre $[\rho + (\sqrt{k}.\times\rho)]^2/\sigma$ ifadesinin *birinci iki adlı* hat olduğunu kanıtlamaktır. Bunun için ρ^2, $(k \times \rho^2)$ özgün iki adlı ve $2\sqrt{k}\rho^2$ bunların oluşturduğu dörtgenin iki katı olmak üzere x, y ve z büyüklükleri $(\sigma \times x) = \rho^2$, $(\sigma \times y) = (k \times \rho^2)$ ve $(\sigma \times 2z) = (2\sqrt{k} \times \rho^2)$ ilişkileri sağlanacak şekilde belirlenir. Bu durumda $(x + y) + 2z = [\rho + (\sqrt{k}.\times\rho)]^2/\sigma$ ifadesine karşı düşer. Büyüğü $(x + y)$ olmak üzere geriye $2z$ ile birlikte bu iki ifadenin $(x + y) + 2z$ *birinci iki adlı* hattın terimleri ya da *birinci iki adlı* olduğunu kanıtlamak kalır.

(α) İlkin ρ ile $(\sqrt{k}.\times\rho)$ karesel ortak bölündüğünden ρ^2, $(k \times \rho^2)$ rasyonel ve ortak bölünebilir, buna göre $\rho^2 + (k \times \rho^2)$ ya da $\sigma(x + y)$ bir rasyonel alandır. (1) Şu halde $(x + y)$ rasyoneldir ve σ ile ortak bölünebilir. (2) Ayrıca $(2\sqrt{k} \times \rho^2)$ bir *ortalayan* alan olduğundan bu husus $(\sigma \times 2z)$ için de geçerli ve $2z$ rasyonel olmakla birlikte σ ile ortak bölünemez. (3) Buna göre (1) ve (2) nedeniyle $(x + y)$ ile ve sadece kareleri ortak bölünebilir olduğundan $(x + y) + 2z$ ifadesi iki adlı bir hattır.

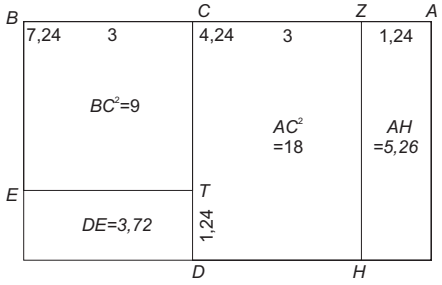
(b) İkinci olarak $\rho^2/(\sqrt{k}.\times\rho^2) = (\sqrt{k}.\times\rho^2)/(k \times \rho^2)$ ya da $(\sigma \times x)/(\sigma \times z) = (\sigma \times z)/(\sigma \times y)$ veya $x/z = z/y$ neticede (4) $(x \times y) = z^2 = (2z)^2/4$ yazılabilir. (5) Şimdi ρ^2 ile $(k \times \rho^2)$ ortak bölünebilir olduğundan $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ve x ile y ortak bölünebilir. (6) Ayrıca $(x^2 + y^2) > 2(x \times y)$ nedeniyle $\rho^2 + (k \times \rho^2) > (2\sqrt{k} \times \rho^2)$ ya da $(x + y) = [\rho^2 + (k \times \rho^2)]/\sigma > 2z$ yazılabilir. Neticede $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölünebilir, $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve kareleri ortak bölünebilir, $(x + y)$ ile σ ortak bölünebilir olduğundan $(x + y) + 2z$ bir *birinci iki adlı* ve değeri $[\rho + (\sqrt{k}.\times\rho)]^2/\sigma = [1 + k + 2\sqrt{k}]\rho^2/\sigma$ olarak hesaplanır.

Bu alanın eni *DZ* olur ve *birinci iki adlı*ya eşittir. Şu halde $AC^2 = EH$, $CB^2 = TK$ ve geriye kalan $2(AC \times BC)$ ise *LZ* alanına karşı düşer. *KZ* hattını *M* noktasında yarıya bölüp *DE* hattına paralel *MN* hattı çekilir. Burada AC^2 ve BC^2 rasyonel olduğundan *EK* alanı da rasyoneldir. *DK* da uzunluk yönünden rasyonel olduğundan *DH* ile *HK* ortak bölenlidir. Karesi rasyonel olan *KZ* uzunluk yönünden *DE* ile ortak bölensizdir. Ayrıca $(AC^2 + BC^2) > 2(AC \times BC)$ olduğuna göre $DK > KZ$ ilişkisi geçerlidir. Ayrıca $(AC \times BC)$ çarpımı AC^2 ile BC^2 arasında ortalayıcıdır. Bunun sonucunda *KM* hattı da *DH* ile *HK* hatlarıyla ortalayıcı orandadır. *DK* hattı *H* noktasıyla iki ortak bölen kısma ayrılır. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi $(KD^2 - KZ^2)$, uzunluk yönünden *KD* ile ortak bölenli olduğu hattın karesine eşittir.



Şekil 38- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\sigma = 3$; $\rho\sqrt{k} = 4{,}24$; $\rho^2 k = 18$; $\rho^2 = 9$; $2\rho\sqrt{k} \cong 8{,}49$.

Not: 1- ***$(AC^2 + BC^2) > 2(AC \times BC)$ olduğu kanıtlanabilir***. $AC^2/(AC \times BC) = (AC \times BC)/BC^2$ eşdeğerliği gereği, uygun oranlı bu orantıda ilk terim en büyük ve sonuncusu en küçükse $(AC^2 > (AC \times BC) > BC^2)$, birinciyle sonuncunun toplamı geriye kalan ikisinin toplamından büyük olmalıdır: $(AC^2 + BC^2) > [(AC \times BC) + (AC \times BC)] = 2(AC \times BC)$.

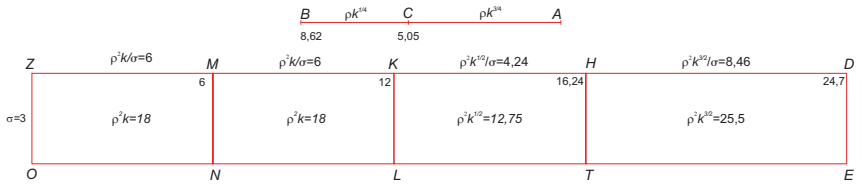


Şekil 39- Burada $\rho = 3$, $k = 2$; $AC = \rho\sqrt{k} = 4{,}24$; $BC = CZ = \rho = 3$; $AC = CD = 4{,}24$.

2- ***Önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanması:*** $AD = AC^2$ ve $CE = BC^2$ olduğunu varsayalım, $BC = CZ$ alarak CD hattına paralel ZH hattını çekelim ve DE alanını tamamlayalım (*Şekil 39*). Bu durumda $BH = (ZH \times BZ) = (AC \times 2BC) = 2(AC \times BC)$ olarak elde edilir. Ancak $DT = AZ$ ve $ZH > ET$ olduğundan $AH > DE$ geçerlidir. Ayrıca $(AD + BD) = (AC^2 + BC^2) + DE = 2(AC \times BC) + AH$ nedeniyle $(AC^2 + BC^2) > 2(AC \times BC)$ olduğu görülür.

***LVIII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *birinci iki adlı* karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *ikinci iki adlı*ya eşittir.**

Burada $EK = (AC^2 + BC^2)$ verilen iki *ortalayan* hattın oluşturduğu alan, $LZ = (AC \times BC)$ rasyonel bir alandır (*Şekil 38-1*). Bu durumda DK (= DH + HK) ve KZ uzunluk yönünden rasyonel olur. DH ile HK ortak bölenli olduğundan $(DK^2 - KZ^2)$ farkı DK ile ortak bölenli hattın karesine eşittir. Neticede DZ bir *ikinci iki adlı* hattır.



Şekil 38-1- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\sigma = 3$; $\rho k^{1/4} = 3{,}57$; $\rho k^{3/4} = 5{,}05$; $(\rho k^{3/4} + \rho k^{1/4})^2 = (\rho^2 k^{3/2} + \rho^2\sqrt{k} + 2\rho^2 k) \cong (25{,}4 + 12{,}72 + 36) \cong 74{,}12$; $DZ = [k^{1/4}\rho + k^{3/4}\rho)]^2/\sigma \cong 24{,}7$.

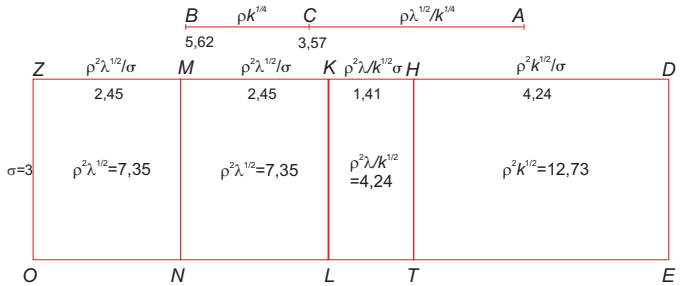
***LIX. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *ikinci iki ortalayan* karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *üçüncü iki adlı*ya eşittir.[1]**

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LXII. Önerme* olarak verilir. Burada amaç *XXXV. Önerme* gereği $[k^{1/4}\rho + (\lambda^{1/2}/k^{1/4})\rho]^2/\sigma$ ifadesinin *bir üçüncü iki adlı* hat olduğunu kanıtlamaktır. Bunun için x, y ve z büyüklükleri $(\sigma \times x) = k^{1/2}\rho^2$, $(\sigma \times y) = (\lambda/k^{1/2})\rho^2$ ve $(\sigma \times 2z) = (2\sqrt{\lambda} \times \rho^2)$ ilişkileri sağlanacak şekilde belirlenir.

(α) Burada $k^{1/4}\rho$ ile $(\lambda^{1/2}/k^{1/4})\rho$ hatları sadece karesel ortak bölünebildiğinden *ortalayan* bir dörtgen tanımlar. Bunların kareleri $k^{1/2}\rho^2$ ile $(\lambda/k^{1/2})\rho^2$ toplamı $\sigma(x + y)$ da *ortalayan*dır, (1) buna göre $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir. (2) $(\sigma \times 2z)$ rasyonel olduğundan $2z$ de rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir.

Ancak $(k^{1/4}\rho)/[(\lambda^{1/2}/k^{1/4})\rho] = (k^{1/4}\rho)^2/[(k^{1/4}\rho)(\lambda^{1/2}/k^{1/4})\rho] = (\sigma \times x)/(\sigma \times z)$ yazılabildiğinden $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma$

Burada *OK* alanı, verilen *ortalayan* hattın AC^2 ve BC^2 kareleriyle ortak bölensiz olduğundan bir *ortalayan* alandır (*Şekil 38-2*). Ayrıca *AC* ve *BC* hatları uzunluğa göre ortak bölensiz olduğundan *ortalayan LZ* alanı da *EK* alanıyla ortak bölensizdir. Şu halde *DK* ve *KZ* hatlarının kareleri rasyonel ve ortak bölensiz, *DE* ile de uzunluğa göre ortak bölensizdir. Ancak *DH* ve *HK* ortak bölenli olduğundan ($DK^2 - KZ^2$) farkı *DK* ile ortak bölenli olan hattın karesine eşit olduğundan *DZ* bir *üçüncü iki adlı*dır.



Şekil 38-2 Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $\sigma = 3$; $\rho k^{1/4} = 3{,}57$; $\rho\sqrt{\lambda}/k^{1/4} = 2{,}05$; $(\rho k^{1/4} + \rho\sqrt{\lambda}/k^{1/4})^2 = (\rho^2 k^{1/2} + \rho^2\lambda/\sqrt{k} + 2\rho^2\sqrt{\lambda}) \cong (12{,}73 + 4{,}24 + 14{,}7) \cong 31{,}67$; $DZ = [\rho k^{1/4} + \rho\sqrt{\lambda}/k^{1/4}]^2/\sigma \cong 10{,}56$.

***LX. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *büyük* karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *dördüncü iki adlı*ya eşittir.**[1]

× *z*) ortak bölünemez. Ne var ki $(k^{1/4}\rho)^2$ ile $\{(k^{1/4}\rho)^2 + [(\lambda^{1/2}/k^{1/4})\rho]^2\}$ ya da $(\sigma \times x)$ ile $[\sigma \times (x + y)]$ ve $(\sigma \times z)$ ile $(\sigma \times 2z)$ ortak bölünebilir. (3) $[\sigma \times (x + y)]$ ile $(\sigma \times 2z)$ ya da $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölünemez. (4) Neticede yukarıdaki nedenlerden dolayı $(x + y) + 2z$ bir *iki adlı* hattır.

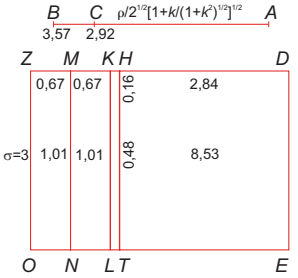
(*b*) Daha önce olduğu gibi $(x + y) > 2z$ ve *x* ile *y* ortak bölenli olduğundan, $(x \times y) = z^2$ yazılabilir. *13. Önerme* nedeniyle $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölünebilir. Ayrıca (1) ve (2) nedeniyle $(x + y)$ ya da $2z$ ifadesi σ ile da ortak bölünemez. Şu halde $(x + y) + 2z$ bir üçüncü iki adlı hat olduğu sonucuna varılır. Burada şüphesiz ki $(x + y) + 2z = (\rho^2/\sigma)[(k + \lambda)/\sqrt{k} + 2\sqrt{k}]$ ilişkisi geçerlidir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LXIII. Önerme* olarak verilir. Burada amaç *XXXVI. Önerme* gereği $(\rho/\sqrt{2}\sigma)\left\{[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2} + [1 - k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2}\right\}$ ifadesinin *bir dördüncü iki adlı* hat olduğunu kanıtlamaktır. Kısaltmak amacıyla bu terimi $(u + v)^2/\sigma$ olarak ifade edelim. Bunun için *x*, *y* ve *z* büyüklükleri $(\sigma \times x) = u^2$, $(\sigma \times y) = v^2$ ve $(\sigma \times 2z) = (2u \times v)$ ilişkileri sağlanacak şekilde belirlenir. Ancak *XXVI. Önerme* gereği *u* ile *v* karelerinin ortak bölünemediğini, $(u^2 + v^2)$ rasyonel ve $(u \times v)$ ortalayan olduğunu unutmamak gerekir.

(α) $(u^2 + v^2)$ ve bunun sonucunda $\sigma(x + y)$ rasyonel olduğundan (1) $(x + y)$ de rasyonel ve σ ile ortak bölenlidir. (2) $2(u \times v)$ ve $(\sigma \times 2z)$ ortalayan, şu halde $2z$ rasyonel ve σ ile ortak bölünemez. (3) Şu halde $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve sadece karesel ortak bölünebilir. Bu nedenlerden dolayı $(x + y) + 2z$ bir *iki adlı* hattır.

(*b*) Daha önce olduğu gibi $(x + y) > 2z$ ve $(x \times y) = z^2$ yazılabilir. (4) u^2 ile v^2, $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da x ile y ortak bölenli olmadığından *14. Önerme* nedeniyle $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli değildir. Ayrıca (1) nedeniyle $(x + y)$ ile σ i ortak bölenlidir. Şu halde (3) ve (4) nedeniyle $(x + y) + 2z$ ya da $(\rho^2/\sigma)[1 + 1/\sqrt{(1+k^2)}]$ bir *dördüncü iki adlı* hattır.

Burada *AC* ve *BC* kareleri ortak bölensiz olduğundan *FD* ve *DK* hatları ortak bölensizdir (*Şekil 38-3*) . Ayrıca ($AC^2 + BC^2$) toplamı rasyonel ve *LE* alanı ortalayan olduğundan *HK* alanı rasyoneldir. Neticede *FK* ve *KE* hatlarının kareleri rasyoneldir. *FK* uzunluk yönünden rasyoneldir. *FD* ile *DK* ortak bölensiz olduğundan ($FK^2 - KE^2$) farkı *FK* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Şu halde *FE* hattı bir *dördüncü iki adlı*dır.



Şekil 38-3 Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\sigma = 3$; $AC = (\rho/\sqrt{2})\,[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2} \cong 2{,}92$;

$BC = (\rho/\sqrt{2})\,[1 - k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2} \cong 0{,}69$; $(\rho^2/2)\left\{[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2} + [1 - k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2}\right\}^2 =$

$(\rho^2/2)\left[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}\right] + (\rho^2/2)\left[1 - k/\sqrt{(1+k^2)}\right] + (\rho^2/2)\,[1/\sqrt{(1+k^2)}] =$

$8{,}53 + 0{,}48 + 2{,}01 = 11{,}02;$

$HD = (\rho^2/2\sigma)\left[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}\right] \cong 2{,}84$; $KH = (\rho^2/2\sigma)\left[1 - k/\sqrt{(1+k^2)}\right] \cong 0{,}16;$

$ZM = MK = (\rho^2/2\sigma)\,[1/\sqrt{(1+k^2)}] \cong 0{,}67.$

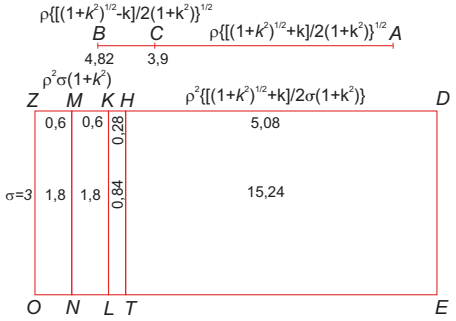
***LXI. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine bir *rasyonel ve ortalayan kökü*n karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *beşinci iki adlı*ya eşittir.**[1]

Burada ($AC^2 + BC^2$) ortalayan ve *LZ* alanı rasyonel olduğundan *DH* ve *HK* hatları ortak bölensiz ve *EK* bir *ortalayan* alandır (*Şekil 38-4*). Bu nedenden *DK* ve *KZ* hatlarının kareleri rasyoneldir. Bunlardan biri *KZ*

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *LXIV. Önerme* olarak verilir. Burada amaç *XXVII. Önerme* gereği yazılan $\left\{\left[\rho/\sqrt{2(1+k^2)}\right]\left\{\left[\sqrt{(1+k^2)} + k\right]^{1/2} + \left[\sqrt{(1+k^2)} - k\right]^{1/2}\right\}\right\}^2/\sigma$ ifadesinin *bir beşinci iki adlı* hat olduğunu kanıtlamaktır. Kısaltmak amacıyla bu terimi $(u + v)^2/\sigma$ olarak ifade edelim. Bunun için *x*, *y* ve *z* büyüklükleri $(\sigma \times x) = u^2$, $(\sigma \times y) = v^2$ ve $(\sigma \times 2z) = (2u \times v)$ ilişkileri sağlanacak şekilde belirlenir. Ancak *37. Önerme* gereği *u* ile *v* karelerinin ortak bölünemediğini, ($u^2 + v^2$) ortalayan ve $2(u \times v)$ ortalayan olduğu göz önünde bulundurulur: (*α*) $\sigma(x + y)$ ortalayan olduğundan (1) $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölenlidir. (2) $(u \times 2z)$ rasyonel olduğundan $2z$ ile σ ortak bölünemez. (3) Şu halde $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve sadece karesel ortak bölünebilir. Neticede yukarıdaki nedenlerden dolayı $(x + y) + 2z$ bir *iki adlı* hattır.

(*b*) Daha önce olduğu gibi $(x + y) > 2z$, $(x \times y) = z^2$ ve *x* ile *y* ortak bölenlidir. (4) Buna göre *14. Önerme* nedeniyle $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli değildir. Şu halde (2), (3) ve (4) nedeniyle $(x + y) + 2z$ ya da $(\rho^2/\sigma)\{[1/\sqrt{(1+k^2)}] + [1/(1+k^2)]\}$ bir *beşinci iki adlı* hattır.

uzunluk yönünden de rasyoneldir. *FD* ile *DK* ortak bölensiz olduğundan ($DK^2 - KZ^2$) farkı *DK* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Şu halde *DZ* hattı bir *beşinci iki adlı*dır.



Şekil 38-4 Burada $\rho = 6$, $k = 2$, $\sigma = 3$;

$$\rho\left\{[\sqrt{(1+k^2)}+k]/2(1+k^2)\right\}^{1/2} \cong 3{,}9;\ \rho\left\{[\sqrt{(1+k^2)}-k]/2(1+k^2)\right\}^{1/2} \cong 0{,}92;$$

$$\rho^2[\sqrt{(1+k^2)}+k]/2(1+k^2)] \cong 15{,}24;\ \rho^2[\sqrt{(1+k^2)}-k]/2(1+k^2)] \cong 0{,}84;$$

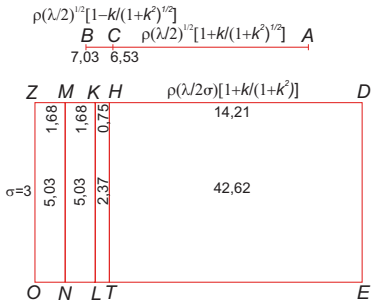
$$\rho^2/2(1+k^2)] \cong 3{,}6.$$

***LXII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *iki ortalayan kökü*n karesine eşit bir alan kurulursa, bu alanın eni bir *altıncı iki adlı*ya eşittir.**[1]

Burada *DH* ve *HK* hatları ortak bölensiz ve *EK ortalayan* bir alandır (*Şekil 38-5*). Bu nedenden *DK* ve *KZ* hatlarının kareleri rasyonel ve ortak bölensizdir. Bunlar ayrıca *DE* ile de ortak bölensizdir. Ayrıca ($DK^2 - KZ^2$) farkı *DK* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşit olduğundan önermede öngörüldüğü gibi *DZ* hattı bir *altıncı iki adlı*dır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *65. Önerme* olarak verilir. Burada amaç *38. Önerme* gereği yazılan $(1/\sigma)\left\{\left[\rho\lambda^2/\sqrt{2}\right]\left\{\left[1+k/\sqrt{(1+k^2)}\right]^{1/2}+\left[1-k/\sqrt{(1+k^2)}\right]^{1/2}\right\}\right\}^2$ ifadesinin *bir altıncı iki adlı* hat olduğunu kanıtlamaktır. Bu terimi $(u+v)^2/\sigma$ olarak ifade edelim. Bunun için *x*, *y* ve *z* büyüklükleri $(\sigma \times x) = u^2$, $(\sigma \times y) = v^2$ ve $(\sigma \times 2z) = (2u \times v)$ ilişkileri sağlanacak şekilde belirleyelim. Ancak *38. Önerme* gereği *u* ile *v* karelerinin ortak bölünemediğini, $(u^2 + v^2)$ ile $2(u \times v)$ ortalayan ve $(u^2 + v^2)$ ile $2(u \times v)$ ortak bölünemediği göz önünde bulundurulur: (*α*) Bu durumda $\sigma(x + y)$ ortalayan olduğundan (1) $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölenlidir. (2) Aynı şekilde $2z$ rasyonel olduğundan σ ile ortak bölünemez. (3) Ayrıca $\sigma(x + y)$ ile $(\sigma \times 2z)$ ortak bölenli olmadığından $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölünemez. Neticede yukarıdaki nedenlerden dolayı $(x + y) + 2z$ bir *iki adlı* hattır.

(*b*) Daha önce olduğu gibi $(x + y) > 2z$, $(x \times y) = z^2$ ve *x* ile *y* ortak bölenlidir. (4) Buna göre *15. Önerme* nedeniyle $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli değildir. Şu halde (1), (2), (3) ve (4) nedeniyle $(x + y) + 2z$ ya da $(\rho^2/\sigma)[\sqrt{\lambda} + (\sqrt{\lambda}/\sqrt{1+k^2})]$ bir *altıncı iki adlı* hattır.



Şekil 38-5 Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 5$, $\sigma = 3$;

$$\rho\sqrt{\lambda/2}\{1 + k/(1 + k^2)\}^{1/2} \cong 6{,}53;\ \rho\sqrt{\lambda/2}\{1 - k/(1 + k^2)\}^{1/2} \cong 0{,}5;$$

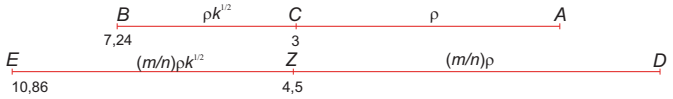
$$\rho^2(\lambda/2)[1 + k/(1 + k^2)] \cong 42{,}62;\ \rho^2(\lambda/2)[1 - k/(1 + k^2)] \cong 2{,}37;$$

$$\rho^2(\lambda/2)[1/(1 + k^2)^{1/2}] \cong 10{,}06.$$

***LXIII. Önerme*: Bir *iki adlı*yla uzunluğa göre (kareleri) ortak bölenli bir hat, aynı mertebeden bir *iki adlı*dır.**[1]

Verilen, *C* noktasıyla iki kısma ayrılan *AB* hattının bir *iki adlı* olduğunu ve *DE* hattının da uzunluk yönünden bu hatla ortak bölenli başka bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 40*). Eğer *AB*/*DE* oranına eşit *AC*/*DZ* oranı kurulursa, geriye kalan *CB* ile *EZ* hatları da aynı oranı sağlar. Bu durumda *AC* ile *BC* kısımları da uygun olarak *DZ* ile *EZ* kısımlarıyla ortak bölenli olduğu gibi, uzunluk yönünden ya da sadece kareleri alındığında rasyoneldir.

Bu durumda *AC*/*BC* = *DZ*/*EZ* yazılabilir. Burada *AC* ile *BC* uzunluk yönünden ortak bölensiz olduğuna göre *DZ* ile *EZ* hatları da ortak bölensizdir. Eğer ($AC^2 - BC^2$) farkı *AC* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşitse, bu durumda ($DZ^2 - EZ^2$) farkı da *DZ* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşit olur. Şu halde *AB* hattı hangi altı tür *iki adlı*dan biriyse, *DZ* hattı da aynı türden olmak zorundadır.



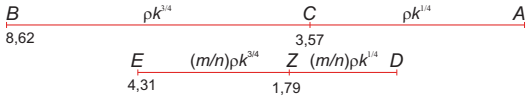
Şekil 40- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $m/n = 3/2$; $AC/BC = DZ/EZ = 1/\sqrt{k} \cong 1{,}41$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *66. Önerme* olarak yer alır. Bu ve bundan sonraki 4 önerme, verilen irrasyonel sayıda ρ yerine $[\rho \times (m/n)]$ yazmak anlamına gelir.

***LXIV. Önerme*: *İki ortalayan* hatla uzunluğa göre (kareleri) ortak bölenli bir hat, onunla aynı mertebeden bir *iki ortalayan*dır.**[1]

Verilen, *C* noktasıyla iki kısma ayrılan *AB* hattının bir *iki ortalayan* olduğunu ve *DE* hattının da uzunluk yönünden bu hatla ortak bölenli başka bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 40-1*). Bu durumda eğer *AC*/*DZ* ve *BC*/*EZ* oranları kurulursa, *AB*/*DE* oranı da aynı oranı sağlar. Şu halde *AC* ile *BC* kısımlarının her biri *DE* ile *EZ* kısımlarıyla uzunluk yönünden ortak bölenli olduğu gibi onlar gibi ortalayan olur. *AC* ve *BC* uzunluk yönünden ortak bölensiz olduklarından *DE* ile *EZ* hatları da aynı türden ortak bölensizdir.

Bu durumda $AC^2/(AC \times BC) = DE^2/(DE \times EZ)$ ya da $AC^2/DE^2 = (AC \times BC)/(DE \times EZ)$ yazılabilir. Ancak iki kare ortak bölenli olduğuna göre alanlar da ortak bölenlidir. Şu halde eğer ilki rasyonel ya da ortalayan ise ikincisi de aynı türdendir. Neticede *AB* hattı hangi türden bir ortalayan hatsa *DE* hattı da aynı türden olmak zorundadır.

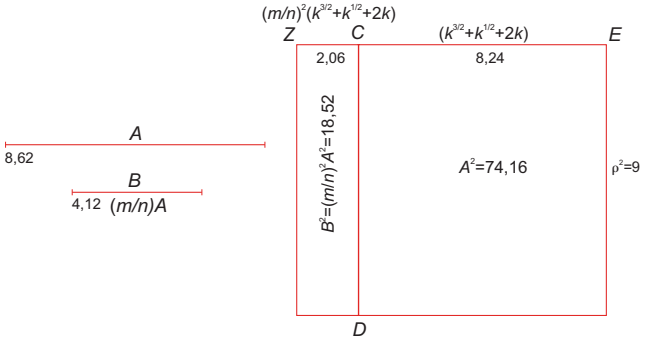


Şekil 40-1 Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $m/n = 1/2$; $\rho k^{1/4} \cong 3{,}57$; $\rho k^{3/4} \cong 5{,}57$ (*birinci ortalayan*).

Not: Bu önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanması.

A hattının bir *birinci* ya da *ikinci iki ortalayan* ve *B* hattının ise onunla ortak bölenli bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 41*). Bu durumda rasyonel bir *EC* hattı üzerine *A* hattının karesine eşit *DE* alanını ve *CZ* hattı üzerine *B* hattının karesine eşit olan *DZ* alanını kuralım. Bu durumda *CE birinci* ya da *ikinci iki adlı* ve *CZ* ile ortak bölenli olduğu için *CD* hattı da onun gibidir. Neticede *DZ* alanının kökü olan *B* hattı da *A* hattı gibi bir *birinci* ya da *ikinci iki ortalayan*dır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *67. Önerme* olarak yer alır.

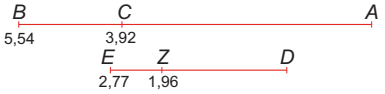


Şekil 41- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $m/n = ½$; $A^2 = [\rho(k^{1/4} + k^{3/4})]^2 = \rho^2[\sqrt{k} + k^{3/2} + 2k] \cong (9 \times 8{,}24) = 74{,}16$;

$B^2 = (m/n)^2[\rho(k^{1/4} + k^{3/4})]^2 = (m/n)^2\rho^2[\sqrt{k} + k^{3/2} + 2k] \cong 18{,}52$.

***LXV. Önerme*: Uzunluğa göre (kareleri) bir *büyük* (*majör*) hatla ortak bölenli bir hat, onunla aynı mertebeden bir *büyük* hattır.**[1]

Birinci yöntem: *AB* hattının bir *büyük* hat olduğunu ve *C* noktasında iki kısma bölündüğünü varsayalım (*Şekil 42*). *AB* hattıyla ortak bölenli olan *DE* hattı da *Z* noktasında onun kısımlarıyla aynı oranda bölünmüştür. Diğer bir değişle $AC/BC = DZ/EZ$ ilişkisi geçerlidir. Ancak *AC* ile *BC* hatlarının kareleri ortak bölensiz olduğuna göre, bu husus *DZ* ile *EZ* hatları için de geçerlidir. Şu halde $AC^2/BC^2 = DZ^2/EZ^2$ ilişkisine toplam kuralı uygulanırsa $(AC^2 + BC^2)/AC^2 = (DZ^2 + EZ^2)/EZ^2$ ya da $(AC^2 + BC^2)/BC^2 = (DZ^2 + EZ^2)/EZ^2$ yazılabilir. Her iki durum çaprazlandığında $(AC^2 + BC^2)/(DZ^2 + EZ^2) = AC^2/EZ^2$ ya da $(AC^2 + BC^2)/(DZ^2 + EZ^2) = BC^2/EZ^2$ elde edildiği ve AC^2 ya da BC^2 ile DZ^2 ya da EZ^2 uygun olarak ortak bölünebildiğinden $(AC^2 + BC^2)$ ile $(DZ^2 + EZ^2)$ ortak bölünebilir. Ayrıca $(AC^2 + BC^2)$ rasyonel olduğundan $(DZ^2 + EZ^2)$ de rasyoneldir. Aynı şekilde $2(AC \times BC)$ *ortalayan* olduğundan $2(DZ \times EZ)$ de *ortalayan*dır.



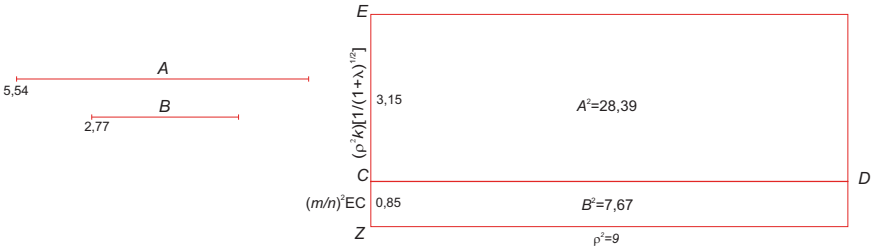
Şekil 42- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 1$, $m/n = ½$; $AC = \rho\{(k/2)[1 + \sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2} \cong 3{,}92$;

$BC = \rho\{(k/2)[1 - \sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2} \cong 1{,}62$; $DZ = (m/n)AC \cong 1{,}96$; $EZ = (m/n)BC \cong 0{,}816$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *68. Önerme* olarak yer alır.

İkinci yöntem: *A* hattının bir *büyük* hat ve *B* hattının onunla ortak bölenli başka bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 43*). Eğer bir rasyonel *CE* hattı üzerinde *A* ve *B* hatlarının karelerine eşit olan alanlar kurulursa, bu durumda *A* hattının karesine eşit *CE* ve *B* hattının karesine eşit *CZ* ortak bölenli birer *dördüncü iki adlı*dır.

Buna göre *DZ* alanının kökü olan *B* hattı da *büyük*tür.



Şekil 43- Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 1$, $m/n = ½$;

$A = (AC + BC) = \rho\{(k/2)\{[1 + \sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2} + [1 - \sqrt{\lambda/(1+\lambda)}]\}^{1/2}\} \cong 5{,}54$; $B = (m/n)A \cong 2{,}77$;

$A^2 = \rho^2k\{1 + 1/\sqrt{1+\lambda}\} \cong (9 \times 3{,}15) \cong 28{,}39$; $B^2 = (m/n)^2A^2 \cong (9 \times 0{,}85) \cong 7{,}67$.

***LXVI. Önerme*: Uzunluğa göre (kareleri) bir rasyonel *ortalayan* kökü hatla ortak bölenli bir hat da bir rasyonel *ortalayan* hattın köküdür.**[1]

Büyük hatla ilişkili olarak verilen açıklama, kanıt ve şekiller bu önerme için de geçerlidir.

***LXVII. Önerme*: Bir *iki ortalayan*ın kökü hatla uzunluğa göre (kareleri) ortak bölenli hattın kendisi de bir *iki ortalayan* hattın köküdür.**[2]

Bu önermeye ilişkin açıklama, kanıt ve şekil bir önceki önermede olduğu gibidir.

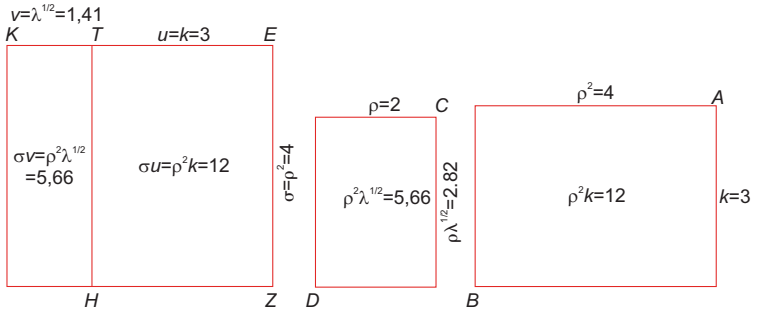
Not: Yukarıda sadece kareleri ortak bölenli olan altı hatla ilişkili olarak elde edilen sonuçlar, bu durumda da daha önce olduğu gibi açıklanabilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *69. Önerme* olarak yer alır.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *70. Önerme* olarak yer alır.

***LXVIII. Önerme*: Eğer bir rasyonel ve bir *ortalayan* alan toplanırsa buna ilişkin kök bir *iki adlı*, *birinci ortalayan*, *büyük* ya da *rasyonel ve ortalayan toplamı* hatta karşı düşer.**[1]

Rasyonel bir *AB* alanının ve bir *ortalayan CD* alanının verildiğini varsayalım (*Şekil 44*). Rasyonel bir *EZ* hattı üzerinde *AB* ve *CD* alanlarına eşit alanlar kuralım. Bu alanların *ET* ve *TK* enlerinin ancak kareleri rasyoneldir. Bu durumda eğer $ET > TK$ ve $(ET^2 - TK^2)$ farkı *ET* ile ortak bölenli bir hattın karesine eşitse *EK* hattı bir *birinci iki adlı* olur. Buna karşın eğer $(ET^2 - TK^2)$ farkı *ET* ile ortak bölensiz bir hattın karesine eşitse bu durumda *EK* bir *dördüncü iki adlı* ve alanın kökü olan hat da bir *büyük* hat olur.

Aksine eğer $TK > ET$ ve $(TK^2 - ET^2)$ farkı *TK* ile ortak bölenli bir hattın karesine eşitse *EK* hattı bir *ikinci iki adlı* olur. Bu alana ilişkin kök ise bir *birinci ortalayan* hattır. Buna karşın eğer $(TK^2 - ET^2)$ farkı *TK* ile ortak bölensiz bir hattın karesine eşitse bu durumda *EK* hattı bir *beşinci iki adlı* ve alanın kökü de bir *rasyonelle ortalayanın* kökü hat olur.



1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *71. Önerme* olarak yer alır. Önerme şu anlama gelir: Rasyonel bir alan $k\rho^2$, *ortalayan* alan $\sqrt{\lambda}\rho^2$ şeklindedir. Burada sorun $(k\rho^2 + \sqrt{\lambda}\rho^2)^{1/2}$ ilişkisini farklı *k* ve λ ilişkilerine göre sınıflandırmaktır. Eğer $(\sigma \times u) = k\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \sqrt{\lambda}\rho^2$ seçilirse, ilk dörtgen rasyonel, ikincisi ise *ortalayan* olduğundan *u* rasyoneldir ve σ ile ortak bölünebilir, *v* rasyoneldir ve σ ile ortak bölünemez. Buna göre *u* ve *v* dörtgenleri ortak bölünemez. Ancak *u* ve *v* rasyonel ve kareleri ortak bölünebilir. Şu halde $(u + v)$ bir *iki adlı* hattır. Aşağıdaki durumlar oluşabilir:

I. $u > v$ ayrıca (1) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile *u* ortak bölünebilir ya da (2) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile *u* ortak bölünemez, ancak her iki durumda *u* ile σ ortak bölünebilir. (1) halinde $(u + v)$ bir *birinci iki adlı*, (2) halinde $(u + v)$ bir *dördüncü iki adlı*. Şu halde $\sqrt{\sigma(u + v)}$ ya (1) *iki adlı* hat (*54. Önerme*) ya da (2) bir *büyük irrasyonel* hattır (*57. Önerme*).

II. $v > u$ ayrıca (1) $\sqrt{v^2 - u^2}$ ile *v* ortak bölünebilir ya da (2) $\sqrt{v^2 - u^2}$ ile *v* ortak bölünemez, ancak her iki durumda *u* ile σ ortak bölünemez. (1) halinde $(u + v)$ bir *ikinci iki adlı*, (2) halinde $(u + v)$ bir *beşinci iki adlı*. Şu halde $\sqrt{\sigma(u + v)}$ ya (1) *birinci ortalayan* hat (*55. Önerme*) ya da (2) bir *rasyonel ve ortalayan* toplamı alanın kenarıdır (*58. Önerme*).

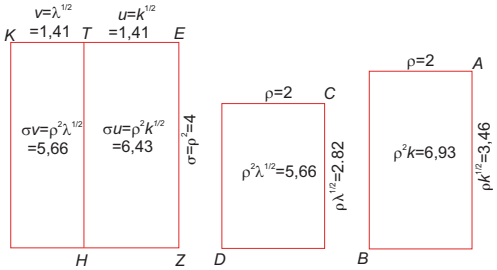
Şekil 44- Burada $\rho = 2$, $k = 3$, $\lambda = 2$; *Ortalayan alanlar* $AB = \rho^2 k \cong 12$; *Ortalayan* alan $CD = \rho^2\sqrt{\lambda} \cong 5{,}66$;

Rasyonel hat $EZ = \sigma = \rho^2 \cong 4$; $EH = AB = k\rho^2 = (\sigma \times u) = 12$, $u = k = 3$;

$HK = CD = \rho^2\sqrt{\lambda} = (\sigma \times v) \cong 5{,}66$; $v = \sqrt{\lambda} \cong 1{,}41$; $\sigma(u + v) = \rho^2(k + \sqrt{\lambda}) = 4(3 + \sqrt{2})$;

Kökü alınırsa $\sqrt{\sigma(u + v)} = \rho\sqrt{k + \sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ büyük irrasyonel hat!

***LXIX. Önerme*: İki *ortalayan* ortak bölensiz alanın toplamına ilişkin kök ya bir *ikinci iki ortalayan* hat ya da *iki ortalayan* hat kökünün toplamıdır.**[1]



Şekil 44- 1 Burada $\rho = 2$, $k = 3$, $\lambda = 2$; Rasyonel alan $AB = \rho^2\sqrt{k} \cong 6{,}93$ ve $CD = \rho^2\sqrt{\lambda} \cong 5{,}66$;

Rasyonel hat $EZ = \sigma = \rho^2 \cong 4$; $EH = AB = \rho^2\sqrt{k} = (\sigma \times u) \cong 6{,}93$, $u = \sqrt{k} \cong 1{,}73$;

$HK = CD = \rho^2\sqrt{\lambda} = (\sigma \times v) \cong 5{,}66$; $v = \sqrt{\lambda} \cong 1{,}41$; $\sigma(u + v) = \rho^2(\sqrt{k} + \sqrt{\lambda}) = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;

Kökü alınırsa $\sqrt{\sigma(u + v)} = \rho\sqrt{\sqrt{k} + \sqrt{\lambda}} = 2\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ *iki adlı* hat!

Ortalayan ortak bölensiz alanların *AB* ve *CD* olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 44-1*). Rasyonel *EZ* hattı üzerinde bu *AB* ve *CD* alanlarına eşit *HE* ve *HK* alanları kurulur. Bu alanların eni *ET* ve *TK* olup bunların rasyonel kareleri birbirleri ve *HE* ile ortak bölenli değildir. Aynı zamanda uzun ve kısa olanın kareleri farkı uzunla ortak bölenli ya da ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Neticede *HK* ya *üçüncü* ya da *altıncı iki adlı* olur. Alan kökü ise bunlardan ikisinden birine karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *72. Önerme* olarak yer alır. Önerme şu anlama gelir: ortak bölensiz $\sqrt{k}\rho^2$ ve $\sqrt{\lambda}\rho^2$ iki ortalayanhat verildiğine göre çeşitli k ve λ değerleri için $(\sqrt{k}\rho^2 + \sqrt{\lambda}\rho^2)^{1/2}$ hattı sınıflandırılmak istenir. Bu durumda $(\sigma \times u) = \sqrt{k}\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \sqrt{\lambda}\rho^2$ seçilir ve burada bir önem taşımasa da ilk ifadenin ikinciden daha büyük olduğu varsayılır. (1) $(\sigma \times u) = \sqrt{k}\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \sqrt{\lambda}\rho^2$ ortalayan alanlar ve σ rasyonel olduğundan u ve v rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir. (2) Varsayım gereği $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ya da u ile v ortak bölenli değildir. Neticede (1) ve (2) gereği $(u + v)$ bir *iki adlı* hattır. Bu durumda $\sqrt{u^2 - v^2}$ uzunluk yönünden u ile ortak bölenli olur ya da olmayabilir. (α) Eğer $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenliyse $(u + v)$ bir *üçüncü iki adlı* hattır ve *56. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u + v)}$ bir *ikinci iki ortalayan* hatta karşı düşer. (b) Eğer $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli değilse $(u + v)$ bir *altıncı iki adlı* hattır ve *59. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u + v)}$ bir *iki ortalayan alanın* toplam kenarına karşı düşer.

Numarasız Önerme[1]**: *İki adlı* hat ve bununla birlikte uygulanan irrasyonel hatların hiçbiri *ortalayan* olsun ya da olmasın, diğer başka hiçbir hat türüyle birlikte kendilerine eşit değildir.**

Ortalayan hattın karesi bir rasyonel hatta uygulanırsa *18. Önerme* gereği elde edilen genişlik rasyoneldir ve uygulandığı hatla uzunluk yönünden ortak bölünmez.

Buna karşın bir *iki adlı* karesi bir rasyonel hatta uygulanırsa *57. Önerme* gereği genişliği bir *birinci iki adlı* olur.

Bir *birinci iki adlı* karesi bir rasyonel hatta uygulanırsa *58. Önerme* gereği genişliği *ikinci iki adlı* olur.

Bir *ikinci iki adlı* karesi bir rasyonel hatta uygulanırsa *59. Önerme* gereği genişliği *üçüncü iki adlı* olur.

Bir *büyük* karesi bir rasyonel hatta uygulandığında *60. Önerme* gereği genişliği *dördüncü iki adlı* olur.

Bir rasyonel karesiyle *ortalayan* alanın kenarı bir rasyonel hatta uygulandığına ise *61. Önerme* gereği genişliği bir *beşinci iki adlı* olur.

Nihayet bir *iki ortalayan* alan kenarının karesi bir rasyonel hatta uygulandığında *62. Önerme* gereği genişliği bir *altıncı iki adlı* olur.

Burada söz konusu genişliklerin tümü bu hatları oluşturan hatların ikisinden de farklı oldukları görülür. Bunun nedeni birinin rasyonel olması ve diğerinin ise aynı mertebeden olmamasından kaynaklanır ve neticede irrasyonel hatların kendileri de birbirlerinden farklı olur.

***LXX. Önerme*: Uzunluğa göre (kareleri) ortak bölensiz ve rasyonel olan iki hattın farkı alındığında farkı irrasyoneldir ve *ayrılmış* (*apotem*) olarak adlandırılır.**[2]

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *72. Önerme*nin hemen arkasında, ara başlıksız olarak yer alır. Amacı yapılabilecek tüm irrasyonel birleşimlerin uygulanan *ortalayan*, altı adet *birinci*, *ikinci*, *üçüncü*, *dördüncü*, *beşinci* ve *altıncı iki adlı* hattan farklı olduğunu vurgulamak içindir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *73. Önerme* olarak yer alır. Önermede x ve y rasyonel ancak kareleri ortak bölenli olan iki hattır. Önerme $(x - y)$ farkı ya da *ayrılmış*ın irrasyonel olduğunu kanıtlamayı amaçlar. x ve y ortak bölünemediği ve $x/y = x^2/(x \times y)$ yazılabildiğine göre x^2 ile $(x \times y)$ ortak bölünemez. Ancak x^2 ile $(x^2 + y^2)$ ve $(x \times y)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölünebilir. Buna göre $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x - y)^2$ ile $(x^2 + y^2)$ ortak bölünemez. Ancak $(x^2 + y^2)$ rasyonel, $(x - y)^2$ ve neticede $(x - y)$ irrasyoneldir. Burada, tıpkı *iki adlı* hat $(\rho + \sqrt{k})$ biçiminde ifade edildiği gibi, $(x - y)$ ayrılmış da $(\rho - \sqrt{k})$ biçiminde ifade edilir.

AB (= ρ) ve AC (=$\rho\sqrt{k}$) uzunluğa göre ortak bölensiz iki hat ve BC = ($AC - AB$) farkı verilmiş olsun (*Şekil 45*). Bu hatların rasyonel olan toplamları ortalayan $2(AB \times BC)$ çarpımıyla ortak bölensiz olur. Neticede bu çarpım BC^2 ile de ortak bölensiz olduğundan BC ya da *ayrılmış* (*apotem*) de irrasyonel olmak zorundadır.

Şekil 45- Burada $AC = \rho = 5$, $k = 2/3$; $AB = \rho\sqrt{k} \cong 4{,}08$; $BC = (AC - AB) = \rho(1 - \sqrt{k}) \cong 0{,}92$.

***LXXI. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli *ortalayan* rasyonel bir alanın kenarlar farkı *birinci ayrılmış ortalayan* (*birinci ortalayan apotem*) olarak adlandırılan irrasyonel bir hattır.**[1]

AB ve AC uzunluğa göre ortak bölensiz iki hat ve bu iki hattın BC = ($AC - AB$) farkının verildiği varsayalım (*Şekil 46*). Bu durumda rasyonel olan $2(AB \times BC)$ çarpımı ($AB^2 + AC^2$) toplamıyla ortak bölensizdir. Neticede bu çarpım rasyonel BC^2 ile de ortak bölensizdir olduğundan BC de irrasyoneldir.

Şekil 46- Burada $\rho = 5$, $k = 2$; $AC = \rho k^{3/4} \cong 8{,}41$; $AB = \rho k^{1/4} \cong 5{,}95$; $BC = (AC - AB) = \rho(k^{3/4} - k^{1/4}) \cong 2{,}46$.

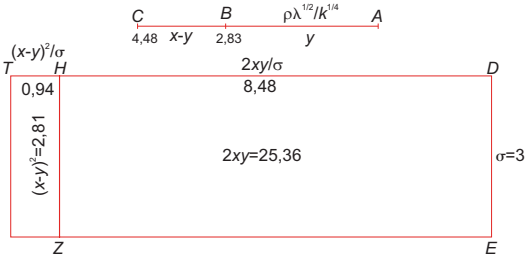
***LXXII. Önerme*: Sadece kareleri ortak bölenli *ortalayan* bir alanın kenarlarını oluşturan iki hattın farkı verildiğinde, bu fark *ikinci ayrılmış ortalayan* (*ikinci ortalayan apotem*) olarak adlandırılan irrasyonel bir hattır.**[2]

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *74. Önerme* olarak yer alır. *Birinci ayrılmış ortalayan* hat, sadece kareleri ortak bölünebilir $k^{1/4}\rho$ ve $k^{3/4}\rho$ biçiminde rasyonel bir dörtgen oluşturan iki hattın farkına eşittir. Varsayım gereği x^2 ve y^2 ortalayan alanlardır. $(x \times y)$ rasyonel olduğundan $(x^2 + y^2)$ ile $(x \times y)$ ya da $2(x \times y)$ ortak bölensizdir. Şu halde $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölensizdir. Ancak $2(x \times y)$ ve neticede $(x - y)$ irrasyoneldir. Bu *birinci ayrılmış ortalayan* irrasyonel ifade $(k^{1/4}\rho - k^{3/4}\rho)$ şeklindedir. Bunun pozitif işaretlisi şüphesiz ki *birinci iki ortalayan* hattır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *75. Önerme* olarak yer alır. *İkinci ayrılmış ortalama* hat, sadece kareleri ortak bölünebilir $k^{1/4}\rho$ ve $\lambda^{1/2}\rho/k^{1/4}$ biçiminde ortalayan bir dörtgen oluşturan iki hattın farkına eşittir. $(x^2 + y^2)$ ve $2(x \times y)$ alanlarının her biri bir rasyonel σ hattına uygulanır. Diğer bir değişle $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$ ve $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ eşitlenir. Bu durumda (1) $(\sigma \times u)$ ve $(\sigma \times v)$ çarpımları ortalayan alanlara

Örneğin bir ortalayan hat farkı $BC = (AC - AB)$ [$= (x - y)$] ve rasyonel DE ($= \sigma$) hattının verildiğini varsayalım (*Şekil 47*). Bunun üzerinde ($AB^2 + AC^2$) [$= (x^2 + y^2)$] alanına eşit bir ET alanını ve $2(AB \times AC)$ [$= 2(x \times y)$] alanına eşit bir EH alanını kuralım. Bu durumda ZT alanı BC^2 [$= (x - y)$] alanına karşı düşer. AB ile AC hatları ortak bölünemediğinden ortalayan ET ve EH alanları da ortak bölünemez. Bu alanların eni DT ve DH hatlarının da kareleri rasyonel olmakla birlikte uzunluğa göre ortak bölünemediğinden HT bir *ayrılmış* (*apotem*)'dir. Şu halde ZT alanı ve bunun kökü olan BC hattı da irrasyoneldir.



Şekil 47- $\rho = 3$, $k = 5$, $\lambda = 2$, $\sigma = 3$; $x = AC = \rho k^{1/4} \cong 4{,}48$; $y = AB = \rho\lambda^{1/2}/k^{1/4} \cong 2{,}83$; $(x - y) = BC = (AC - AB) = \rho(k^{1/4} - \lambda^{1/2}/k^{1/4}) \cong 1{,}65$; $EH = 2(x \times y) \cong 25{,}36$; $ZT = (x - y)^2 \cong 2{,}81$;
$ET = (x^2 + y^2) = \rho^2\sqrt{k}(1 + \lambda/k) \cong 28{,}17$; $DT = (x^2 + y^2)/\sigma \cong 9{,}39$.

***LXXIII. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen, kareleri toplamı rasyonel olan ve biri diğerinin iki katıyla çarpıldığında *ortalayan* bir değer elde edilen iki hattın farkı irrasyonel *küçük* (*minör*) olarak adlandırılan *ayrılmış* (*apotem*) bir hattır.**[1]

Örneğin burada $BC = (AC - AB)$ [$= (x - y)$] olduğunu varsayalım (*Şekil 47-1*). Bu durumda önerme tıpkı *70. Önerme*de olduğu gibi şekillendirilip açıklanabilir.

---

dönüşür ve rasyonel u ve v ile σ ortak bölünemez. (2) Aynı şekilde x ile y, x^2 ile $(x \times y)$, $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$, $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve neticede u ile v ortak bölünemez. (1) ve (2) sonucu u ve v hatlarının rasyonel ve kareleri ortak bölünebilir olduğu anlaşılır. *70. Önerme* gereği $(u - v)$ bir irrasyonel hattır ve $[(u - v) \times \sigma]$ irrasyonel alan oluşturur. Bunun sonucunda $(x - y)^2$ ve $(x - y)$ irrasyoneldir. Bu *ikinci ayrılmış ortalayan* irrasyonel ifade ($k^{1/2}\rho - \lambda^{1/2}\rho/k^{1/4}$) şeklindedir. Bunun pozitif işaretlisi şüphesiz ki *ikinci iki ortalayan* hattır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *76. Önerme* olarak yer alır. Burada x ve y önceki *30. Önerme*de olduğu gibi $x = (\rho/\sqrt{2})[1 + k/\sqrt{1 + k^2}]^{1/2}$, $y = (\rho/\sqrt{2})[1 - k/\sqrt{1 + k^2}]^{1/2}$ şeklindedir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ rasyonel ve $(x \times y)$ ortalayan bir alandır. Şu halde $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x - y)^2$ ile $(x^2 + y^2)$ ortak bölünemez. Neticede $(x - y)^2$ ve $(x - y)$ irrasyoneldir. Buna göre burada söz konusu irrasyonel *küçük* (*minör*) hat $(x - y) = (\rho/\sqrt{2})\{[1 + k/\sqrt{1 + k^2}]^{1/2} - [1 - k/\sqrt{1 + k^2}]^{1/2}\}$ şeklindedir.

Şekil 47-1 Burada $\rho = 6$, $k = 2$; $AC = x = (\rho/\sqrt{2})[1 + k/\sqrt{1+k^2}]^{1/2} \cong 5{,}84$; $AB = y = (\rho/\sqrt{2})[1 - k/\sqrt{1+k^2}]^{1/2} \cong 1{,}38$.

***LXXIV. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen, kareler toplamı *ortalayan* olan ve biri diğerinin iki katıyla çarpıldığında rasyonel olan iki hattın farkı irrasyoneldir ve bu *bir rasyonel alanla birleşerek toplamı rasyonel ortalayan bir hat* oluşturur.**[1]

Şekil 47-2 Burada $\rho = 6$, $k = 2$; $AC = x = \{\rho\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}\}/\sqrt{2(1+k^2)} \cong 3{,}91$; $AB = y = \{\rho\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\}/\sqrt{2(1+k^2)} \cong 0{;}92$.

Bu durumda önerme tıpkı 71. Önermede olduğu gibi şekillendirilip açıklanabilir (*Şekil 47-2*).

***LXXV. Önerme*: Kareleri ortak bölünmeyen, kareler toplamı *ortalayan* olan ve biri diğerinin iki katıyla çarpıldığında *ortalayan* olan iki hattın farkı irrasyoneldir ve *bir ortalayan alanın kenarına karşı düşen ortalayan irrasyonel bir hatta* karşı düşer.**[2]

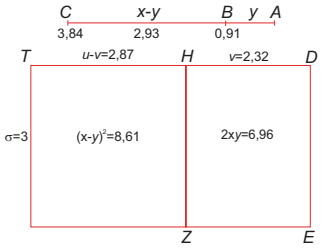
Bu önerme de tıpkı *72. Önerme*de olduğu gibi şekillendirilip açıklanabilir (*Şekil 47-3*).

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *77. Önerme* olarak yer alır. Burada x ve y önceki *31. Önerme*de olduğu gibi $x = \{\rho\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}\}/\sqrt{2(1+k^2)}$ ve $y = \{\rho\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\}/\sqrt{2(1+k^2)}$ şeklindedir. Varsayım gereği $(x^2 + y^2)$ *ortalayan* ve $(x \times y)$ *rasyonel* bir alandır. Şu halde $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ve $(x - y)^2$ ile $2(x \times y)$ ortak bölünemez. Neticede $(x - y)^2$ ve $(x - y)$ irrasyoneldir. Burada *rasyonel alandan bir ortalayan bütün oluşturan irrasyonel hat* $(x - y) = [\rho/\sqrt{2(1+k^2)}]\{\sqrt{\sqrt{1+k^2}} + k - \sqrt{\sqrt{1+k^2}} - k\}$ şeklindedir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *78. Önerme* olarak yer alır. Burada x ve y önceki *32. Önerme*de olduğu gibi $x = [\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}]\left\{[1 + k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2}\right\}$ ve $y = [\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}]\left\{[1 - k/\sqrt{(1+k^2)}]^{1/2}\right\}$ şeklindedir. $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$ ve $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ olarak tanımlayalım. (1) Varsayım gereği $(\sigma \times u)$ ve $(\sigma \times v)$ alanları ortalayan, u ve v rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir. (2) Ayrıca $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve u ile v ortak bölenli değildir. Neticede (1) ve (2) nedeniyle u ve v rasyonel ve kareleri ortak bölenlidir. Şu halde *70. Önerme* gereği $(u - v)$ ayrılmış bir irrasyonel hat, $[\sigma \times (u - v)]$ irrasyonel alan, neticede $(x - y)^2$ ve $(x - y)$ bir ortalayan alanın kenarına karşı düşen irrasyonel ortalayan bir hattır:

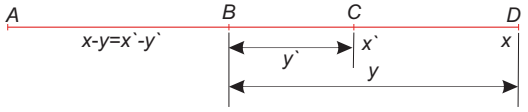
$$(x - y) = (\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2})\{[1 + k/\sqrt{1+k^2}]^{1/2} - [1 - k/\sqrt{1+k^2}]^{1/2}\}.$$



Şekil 47-3 Burada $\rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 3$; $AC = x = [\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}]\{[1 + k/\sqrt{(1 + k^2)}]^{1/2}\} \cong 3{,}84$; $AB = y = [\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2}]\{[1 - k/\sqrt{(1 + k^2)}]^{1/2}\} \cong 0{,}91$; $DT = u = (x^2 + y^2)/\sigma = \rho^2\sqrt{\lambda}/\sigma \cong 5{,}19$; $DH = v = 2(x \times y)/\sigma = (\rho^2\sqrt{\lambda}/\sigma)\sqrt{1 - k^2/(1 + k^2)} \cong 2{,}32$; $HT = (u - v) \cong 2{,}87$; $(x - y)^2 = (x^2 + y^2) - 2(x \times y) = (\rho^2\sqrt{\lambda})\{[1 - \sqrt{1 - k^2/(1 + k^2)}] \cong 8{,}61$.

***LXXVI. Önerme*: *Ayrılmış*la (*apotome*) birleşerek onu ayrılmazdan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.[1]**

Aksi halde eğer bir *AB* ayrılmışına *AB* hattını ayrılmazdan önceki şekle getiren *BC* ve *BD* gibi iki farklı hattın ilavesi söz konusu olsaydı bu durumda $AC - BC = AD - BD$ olması gerekirdi (*Şekil 48*). Bu eşitliğin karesi alınırsa $(AC^2 + BC^2) - 2(AC \times BC) = (AD^2 + BD^2) - 2(AD \times BD)$ ya da $[(AC^2 + BC^2) - (AD^2 + BD^2)] = [2(AC \times BC) - 2(AD \times BD)]$ olması gerekir. Bu ise iki rasyonel alan farkının iki ortalayan alan farkına eşit olması gerektiği anlamına gelir ki yanlıştır. Buna göre önermede öngörülen hüküm olmayana ergi yöntemi gereği geçerlidir.



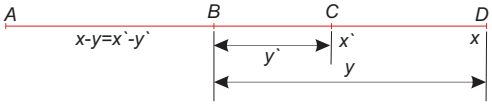
Şekil 48

***LXXVII. Önerme*: Bir *ortalayanla birleşik birinci ayrılmış*ı ayrılmazdan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.[2]**

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *79. Önerme* olarak yer alır. Bu önerme eğer $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ise bu durumda bilinegelen $a = x$ ve $b = y$ özelliğine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *80. Önerme* olarak yer alır. Bu önermede bir *ortalayan hatla birleşik bir birinci ayrılmış*ın, eğer $x > x'$ olmak üzere, $(x - y) = (x' - y')$ olarak iki farklı şekilde ifade edilebileceği varsayılırsa bu durumda $(x - y)^2 = (x' - y')^2$ ya da $[(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] = [2(x \times y) - 2(x' \times y')]$ yazılabilir. Ancak bu durumda eşitliğin solundaki *ortalayan* alanlar eşitliğin sağındaki rasyonel alanlara eşit olması gerektiğinden bu mümkün değildir.

Aksi halde eğer bir *AB ortalayanla birleşik birinci ayrılmış*a *AB* hattını ayrılmazdan önceki şekle getiren *BC* ve *BD* gibi iki farklı hattın ilavesi söz konusu olsaydı bu durumda $AC - BC = AD - BD$ olması gerekirdi (*Şekil 48-1*). Eşitliğin karesi alınırsa $(AC^2 + BC^2) - 2(AC \times BC) = (AD^2 + BD^2) - 2(AD \times BD)$ ya da $[(AC^2 + BC^2) - (AD^2 + BD^2)] = [2(AC \times BC) - 2(AD \times BD)]$ olması gerekir. Bu ise iki ortalayan alan farkının iki rasyonel alan farkına eşit olması gerektiği anlamına gelir ki yanlıştır. Buna göre önermede öngörülen hüküm olmayana ergi yöntemi gereği geçerlidir.

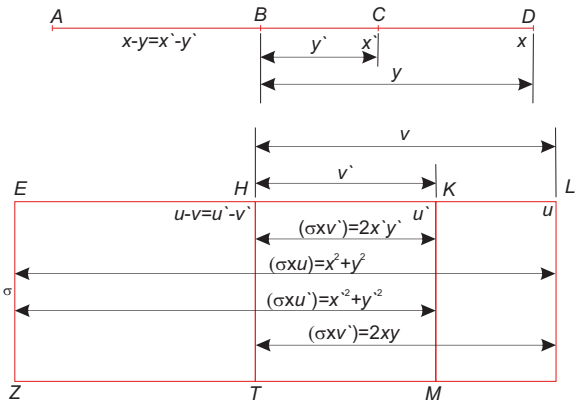


Şekil 48-1

***LXXVIII. Önerme*: Bir *ikinci ayrılmış ortalayan*la birleşik hattı ayrılmadan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.**[1]

Aksi halde eğer bir *AB ikinci ayrılmış ortalayanla birleşik birinci ayrılmış*ı ayrılmazdan önceki şekle getiren *BC* ve *BD* gibi iki farklı hattın ilavesi söz konusu olurdu (*Şekil 49*). Bu durumda rasyonel *EZ* hattı üzerinde $(AC^2 + BC^2)$ toplamına eşit olan *ZK* alanı ve AB^2 alanına eşit olan *ZH* alanı kurulur. Burada *TK* alanı $2(AC \times BC)$ alanına eşit olur. Ancak bir ortalayan alan olan $(AC^2 + BC^2)$ toplamı, $2(AC \times BC)$ ortalayan alanıyla ortak bölensiz olduğundan *EK* ile *HK* hatlarının da kareleri rasyonel ve uzunluk yönünden ortak bölensizdir. Burada *EH* ayrılmışa karşı düşer. Sonra *EZ* üzerinde $(AD^2 + BD^2)$ toplamına eşit olan *ZL* alanı oluşturulur. Burada $LT = 2(AD \times BD)$ alanına eşit olur. *EL* ve *HL* hatlarının ancak kareleri rasyonel ve *EH* ise *ayrılmış* hatta eşittir. Neticede *EH* hattına *HK* ve *HL* gibi iki hat birleşerek ayrılmadan önceki şekle getirir. Bu ise *76. Önerme* gereği mümkün olmadığından önerme hükmü olmayana ergi yöntemiyle geçerliliğini korur.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *81. Önerme* olarak yer alır. Bir *ikinci ayrılmış ortalayan*da $x > x'$ koşuluyla $(x - y) = (x' - y')$ ifadesinin gerçekleştiğini varsayalım. $(x^2 + y^2)$, $2(x \times y)$ ve $(x'^2 + y'^2)$, $2(x' \times y')$ ilişkilerini rasyonel σ hattına uygulayalım: $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$, $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ ve $(x'^2 + y'^2) = (\sigma \times u')$, $2(x' \times y') = (\sigma \times v')$. Burada $(x^2 + y^2)$ ve $2(x \times y)$ ortalayan birer alandır. (1) rasyonel u ve v ile σ ortak bölensizdir. (2) x ile y kareleri ortak bölenli olmakla birlikte x ile y, x^2 ile $(x \times y)$, $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$, $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve neticede u ile v ortak bölensizdir. Şu halde (1) ve (2) gereği u ile v rasyonel ve kareleri ortak bölünebilir ve neticede $(u - v)$ bir ayrılmıştır. Aynı şekilde $(u' - v')$ için de aynı ayrılmış elde edilir. Ancak *76. Önerme* gereği bu mümkün değildir. Buna olmayana ergi yöntemi gereği çözüm tektir.



Şekil 49

***LXXIX. Önerme*: Bir *küçük*le birleşik hattı ayrılmazdan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.[1]**

Aksi halde eğer *AB* ile *BD* ve *BC* gibi iki hat bulunsaydı bu durumda ayrılmışlar konusunda verilmiş bulunan *76. Önerme* gereği hatalı sonuç elde edilirdi (bak. *Şekil 49*).

***LXXX. Önerme*: Bir *rasyonelle birleşik ortalayanı* ayrılmazdan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.[2]**

Bu önermenin kanıtı ve şekli *77. Önerme*de olduğu gibidir.

***LXXXI. Önerme*: Bir *ortalayanla birleşik ortalayanı* ayrılmazdan önceki şekle getiren sadece bir hat mevcuttur.[3]**

Aksi halde eğer *AB* ile *BD* ve *BC* gibi iki hat bulunsaydı bu durumda ayrılmışlar konusunda verilmiş bulunan *76. Önerme* gereği hatalı sonuç elde edilirdi. Bu önermenin kanıtı ve şekli *78. Önerme*de olduğu gibidir.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *82. Önerme* olarak yer alır. Burada $x > x'$ koşuluyla $(x - y) = (x' - y')$ ifadesinin gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda $(x^2 + y^2)$ ile $(x'^2 + y'^2)$ rasyonel $2(x \times y)$ ile $2(x' \times y')$ ortalayan alanlara karşı düşer. Daha önce olduğu gibi $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2(x \times y) - 2(x' \times y')$ olması gerektiğinden ortalayan alanlar farkının rasyonel olması gerekir ki bu imkânsızdır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *83. Önerme* olarak yer alır. Burada da $x > x'$ koşuluyla $(x - y) = (x' - y')$ ifadesinin gerçekleştiğini varsayalım. Bu durumda $(x^2 + y^2)$ ile $(x'^2 + y'^2)$ ortalayan $2(x \times y)$ ile $2(x' \times y')$ rasyonel alanlara karşı düşer. Daha önce olduğu gibi $(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) = 2(x \times y) - 2(x' \times y')$ olması gerektiğinden ortalayan alanlar farkının rasyonel olması gerekir ki bu imkânsızdır.

3 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *84. Önerme* olarak yer alır. Burada da $x > x'$ koşuluyla $(x - y) = (x' - y')$ ifadesinin gerçekleştiğini varsayalım. Ayrıca $(x^2 + y^2) = (\sigma \times u)$, $2(x \times y) = (\sigma \times v)$ ve $(x'^2 + y'^2) = (\sigma \times u')$, $2(x' \times y') = (\sigma \times v')$ olarak tanımlayalım. (1) $(x^2 + y^2)$ ve $2(x \times y)$ ortalayan alanlar olduğuna göre u ve v rasyonel ve σ ile ortak bölünemez; Ayrıca (2) $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$, $(\sigma \times u)$ ile $(\sigma \times v)$ ve neticede u ile v ortak bölünemez. Buna göre (1) ve (2) nedeniyle u ile v rasyonel ve kareleri ortak bölünebilir olduğundan $(u - v)$ bir ayrılmıştır (apotome). Aynı şekilde $(u' - v')$ farkının da *aynı* ayrılmış olduğu kanıtlanabilir. Buna göre aynı ayrılmış farklı yollar izlenerek belirlenmiş olur ki bu imkânsızdır.

GİRİŞ (TANIMLAR)[1]

***Birinci ayrılmış*:** Eğer ayrılmışla birleşerek ilk haline gelen rasyonel bir hat verilmiş ve eğer tamın (ayrılmışla onu ilk haline getiren hattın) karesi ile ayrılmışın kareleri farkı, tamla *ortak bölenli* hattın karesine eşit ve ayrılmış aynı zamanda tamla ortak bölenli değilse buna *birinci ayrılmış* denir.

***İkinci ayrılmış*:** Eğer hatların tümü rasyonelse *ikinci ayrılmış* denir.

***Üçüncü ayrılmış*:** Eğer hatların hiçbiri uzunluk yönünden rasyonel değilse *üçüncü ayrılmış* denir.

***Dördüncü ayrılmış*:** Eğer tamın karesi ile o hattın karesi farkı tam ile *ortak bölensiz* olan hattın karesine eşit ve aynı zamanda tam uzunlukça rasyonelse *dördüncü ayrılmış* denir.

***Beşinci ayrılmış*:** Eğer o hat rasyonelse *beşinci ayrılmı*ş denir.

***Altıncı ayrılmış*:** Eğer hatların hiçbiri uzunlukça rasyonel değilse *altıncı ayrılmış* denir.

LXXXII. Önerme: *Birinci ayrılmışın* belirlenmesi.[2]

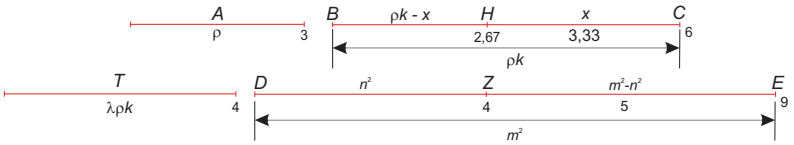
Verilen rasyonel büyüklüğün $A\,(=\rho)$ olduğunu ve bu sayının $BC\,[=(k\times\rho)]$ ile ortak bölenli olduğunu varsayalım (*Şekil 50*). $DE\ (=m^2)$ ve $DZ\ (=n^2)$ iki karesel sayı, onların farkı $ZE\ [=(m^2-n^2)]$ ise karesel olmayan bir sayıdır. Eğer $DE/ZE\ [=1/(1-\lambda^2)]$ oranına eşit olan $BC^2/CH^2\ [(k\times\rho)^2/x^2=1/(1-\lambda^2)]$ oranı kurulursa $BH\ [=(k\times\rho)-x]$ *birinci ayrılmış*a karşı düşer.

---

1 Öklid'in özgün eserinde bu ara bölüm *Tanımlar III* şeklinde 6 alt başlıkla verilir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *85. Önerme* olarak verilir. Burada $(k\times\rho)$ tamın ve bununla ortak bölenli rasyonel ρ hattının verildiğini ve ayrıca m^2 ve n^2 karesel sayıları için (m^2-n^2) sayısının karesel olmadığını varsayalım. Bu durumda (1) eğer x sayısı $m^2/(m^2-n^2)=(k\times\rho)^2/x^2$ ya da $x=(k\times\rho)\frac{\sqrt{(m^2-n^2)}}{m}=(k\times\rho)\sqrt{1-\lambda^2}$ olarak seçilirse, bu durumda $(k\times\rho)-x$ ya da $(k\times\rho)[1-\sqrt{1-\lambda^2}]$ *birinci ayrılmış* olur.

Buna göre (α) x rasyonel ancak $(k\times\rho)$ ile ortak bölünemez, $(k\times\rho)$ ile x sadece kareleri ortak bölünebilir olduğundan bir *ayrılmış*tır (*apotome*). (β) Eğer $y^2=(k\times\rho)^2-x^2$ olarak tanımlanırsa (1) ilişkisinin farkı alınırsa $m^2/n^2=(k\times\rho)^2/y^2$ yazılabilir ve $(k\times\rho)$ ile $y=\sqrt{(k\times\rho)^2-x^2}$ uzunlukça ortak bölünebilir. Ayrıca $(k\times\rho)$ ile ρ ortak bölünebildiğinden $(k\times\rho)-x$ *birinci ayrılmış*tır. *45. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere $(k\times\rho)[1-\sqrt{1-\lambda^2}]$ *birinci ayrılmış*, $x^2-2(k\times\rho)x+\lambda^2(k\times\rho)^2=0$ denklemi köklerinden birine karşı düşer.



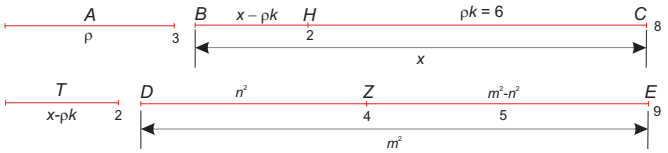
Şekil 50- Burada $k = 2$, $\rho = A = 3$, $\lambda = 2/3$, $n = 2$, $m = 3$;
Birinci ayrılmış $x = k\rho\sqrt{1-\lambda^2} = 3{,}33$; $T = \sqrt{BC^2 + CH^2} = k\rho\lambda = 4$; $(k\rho - x) = 2{,}67$.

Kanıtı: *BC* hattı uzunluk yönünden rasyonel olmakla birlikte *CH* hattının sadece karesi rasyoneldir ve bu iki hat sadece kareleri alındığında ortak bölünebilir. Eğer $T^2 = BC^2 - CH^2$ olarak tanımlanırsa fark ilişkisinden $BC^2/T^2 = DE/DZ$ yazılabilir. Buna göre *T* ve *BC* hatları uzunlukça ortak bölenlidir.

LXXXIII. Önerme: *İkinci ayrılmış*ın belirlenmesi.[1]

Burada *A* (= ρ) hattının rasyonel ve *CH* [=($k \times \rho$)] onunla ortak bölenli bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 50-1*). *DE* (= m^2) ve *DE* (= n^2) iki karesel sayıdır. *ZE*/*DE* [$(m^2 - n^2)/m^2 = 1/(1 - \lambda^2)$] oranında olan CH^2/BC^2 [x^2/y^2] oranı kurulursa *BH* [= $x - (k \times \rho)$] *ikinci ayrılmış*a karşı düşer.

Kanıtı: *CH* hattı uzunluğa göre rasyoneldir, *BC* hattının ise sadece karesi rasyoneldir. Eğer $T^2 = BC^2 - CH^2$ olarak tanımlanırsa fark ilişkisinden $CH^2/T^2 = ZE/ZD$ yazılabilir. Buna göre $BC^2 - CH^2 = T^2$ olmak üzere *T* ve *BC* hatları ortak bölenlidir.



Şekil 50-1- Burada $k = 2$, $\rho = A = 3$, $\lambda = 2/3$, $n = 2$, $m = 3$;
İkinci ayrılmış $x = k\rho/\sqrt{1-\lambda^2} \cong 8$; $T = \sqrt{BC^2 - CH^2} = x - k\rho = k\rho[1/\sqrt{1-\lambda^2} - 1] = 2$.

---

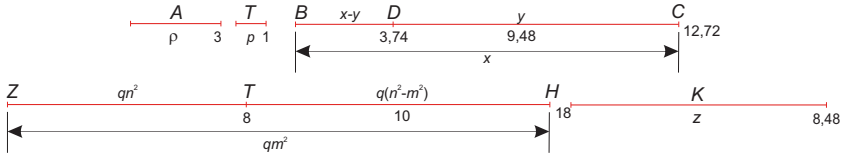
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *86. Önerme* olarak verilir. Burada da ($k \times \rho$) tamın ve bununla ortak bölenli rasyonel ρ hattının verildiğini ve ayrıca m^2 ve n^2 karesel sayıları için ($m^2 - n^2$) sayısının karesel olmadığını varsayalım. Bu durumda (1) eğer *x* sayısı $(m^2 - n^2)/m^2 = (k \times \rho)^2/x^2$ ya da $\lambda = n/m$ olmak üzere $x = (k \times \rho)[m/\sqrt{(m^2 - n^2)}] = (k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2}$ olarak seçilirse, bu durumda $x > (k \times \rho)$ olacağından $x - (k \times \rho)$ ya da $(k \times \rho)[(1/\sqrt{1-\lambda^2}) - 1]$ *ikinci ayrılmış* olur.

Buna göre (*α*) *x* rasyonel ancak ($k \times \rho$) ile kareleri alındığında ortak bölünebilir. (*β*) Eğer $y^2 = x^2 - (k \times \rho)^2$ olarak tanımlanırsa (1) ilişkisinden $m^2/n^2 = x^2/y^2$ yazılabilir ve *x* ile $y = \sqrt{x^2 - (k \times \rho)^2}$ uzunlukça ortak bölünebilir. Ayrıca ($k \times \rho$) ile ρ ortak bölünebildiğinden $x - (k \times \rho)$ bir *ikinci ayrılmış*tır. *45. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere $(k \times \rho)[(1/\sqrt{1-\lambda^2}) - 1]$ *ikinci ayrılmış*, $x^2 - 2(k \times \rho)(1/\sqrt{1-\lambda^2})\,x + (\lambda^2/\sqrt{1-\lambda^2})\,(k \times \rho)^2 = 0$ denklemi köklerinden birine karşı düşer.

LXXXIV. Önerme: *Üçüncü ayrılmış*ın belirlenmesi.[1]

Burada A (= ρ) hattının rasyonel ve ZH (= qm^2) ile ZT (= qn^2) sayılarının karesel olduklarını varsayalım (*Şekil 51*). Bu sayıların farkı HT bir karesel sayı değildir. Ayrıca E (= p) karesel olmayan başka bir sayıdır. Buna göre E/HT {= $p/[q(m^2 - n^2)]$} oranı bir kareler oranı oluşturmaz. Eğer $E/ZH = A^2/BC^2$ {ya da $p/qm^2 = \rho^2/x^2$} ve aynı şekilde $ZH/HT = BC^2/DC^2$ {ya da $(qm^2)/[q(m^2 - n^2)] = x^2/y^2$} oranları oluşturulursa BD[= $(x - y)$] hattı aranan *üçüncü ayrılmış*ı belirler.

Kanıtı: BC ve CD hatları A ile uzunlukça ortak bölenli değildir. Ayrıca $K^2 = BC^2 - CD^2$ ve $K^2/BC^2 = ZT/ZH$ olduğundan K ile BC kareleri ZT/ZH oranında ve ortak bölenlidir.



Şekil 51- Burada $p = 1$, $q = 2$, $k = q/p = 2$, $\rho = A = 3$, $\lambda = 2/3$, $n = 2$, $m = 3$;

$$x = \rho m\sqrt{q/p} \cong 12{,}72;\ y = \rho\sqrt{m^2 - n^2}\sqrt{q/p} \cong 9{,}48;$$

Üçüncü ayrılmış $(x - y) = (\rho \times m).(\sqrt{k})\,[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}] \cong 3{,}74$; $z = \sqrt{x^2 - y^2} \cong 8{,}48$.

LXXXV. Önerme: *Dördüncü ayrılmış*ın belirlenmesi.[2]

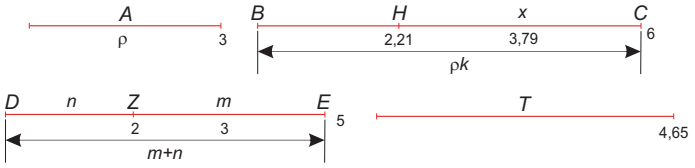
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *87. Önerme* olarak verilir. Eğer ρ rasyonel bir hat, p, qm^2 sayıları ve $q(m^2 - n^2)$ diğer sayılarla karesel bir ilişkisi bulunmayan üç sayı olarak verildiğini varsayalım. Bu durumda aşağıdaki özelliklere sahip x ve y sayılarını göz önünde bulunduralım: (1) $p/(qm^2) = \rho^2/x^2$. (2) $(qm^2)/[q(m^2 - n^2)] = x^2/y^2$. Bu durumda $(x - y)$ bir *üçüncü ayrılmış* olur. (3) Şu halde (α) ve (2) nedeniyle y rasyonel olmakla birlikte x ile ortak bölünemez. Neticede rasyonel x ve y ifadelerinin sadece kareleri ortak bölünebildiği halde $(x - y)$ bir *ayrılmış*tır. (β) Ayrıca (1) ve (2) nedeniyle $p/[q(m^2 - n^2)] = \rho^2/y^2$ yazılabildiğinden y ile ρ ortak bölenli değildir. (4) Buna göre (3) nedeniyle x ve y ile ρ ortak bölenli değildir. Son olarak eğer $z^2 = x^2 - y^2$ olarak tanımlanırsa (2) ilişkisinden $(qm^2)/(qn^2) = (x^2)/(z^2)$ yazılabilir, bu ise (5) z ya da $\sqrt{x^2 - y^2}$ ile x ifadelerinin ortak bölünebildiği anlamına gelir. Şu halde (4) ve (5) nedeniyle $(x - y)$ bir *üçüncü ayrılmış*tır. Şeklini bulmak için (1) ve (2) ilişkilerinden $x = (\rho \times m).(\sqrt{q})/(\sqrt{p})$ ve $y = [\rho\sqrt{m^2 - n^2}.\sqrt{q}]/(\sqrt{p})$ olduğu görülür. Eğer $k = q/p$ ve $\lambda = n/m$ olarak tanımlanırsa *üçüncü ayrılmış* kısaca $(x - y) = (\rho \times m).(\sqrt{k})\,[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$ olarak elde edilir. *46. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere bu *üçüncü ayrılmış* $(\rho \times m).(\sqrt{k})\,[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$ ile birlikte $x^2 - 2(m \times \rho)\sqrt{k}.x + k\lambda^2(m \times \rho)^2 = 0$ ya da $a = (m \times \rho)\sqrt{k}$ tanımıyla $x^2 - 2ax + \lambda^2 a^2 = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *88. Önerme* olarak verilir. Burada *82* ve *83. Önerme*de olduğu gibi ρ ve $(k \times \rho)$ hatlarının verildiğini, m, n sayılarının kareleri $(m + n)$ karesiyle karesel bir oran oluşturmadığı varsayılır. (1) Sonra $(m + n)/n = k^2\rho^2/x^2$ ilişkisini sağlayan x sayısı hesaplanır ($\lambda = m/n$): $x = (k \times \rho)\sqrt{n/(m + n)} = (k \times \rho)/\sqrt{1 + \lambda}$. Bu durumda $(k \times \rho) - x = (k \times \rho)[1 - 1/\sqrt{1 + \lambda}]$ *dördüncü ayrılmış* olarak adlandırılan bir hattır. (1) nedeniyle x rasyonel ve $(k \times \rho)$ ile karesel ortak bölenlidir. Ayrıca $(m + n)/m = k^2\rho^2/(k^2\rho^2 - x^2)$ ve $(m + n)/m$ oranı karesel sayıların bir oranı olmadığından $\sqrt{(k \times \rho)^2 - x^2}$ ile $(k \times \rho)$ ortak bölenli değildir. Buna karşın $(k \times \rho)$ ve ρ ortak bölenlidir. *47. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere $(k \times \rho)[1 - 1/\sqrt{1 + \lambda}$ *dördüncü ayrılmış* ile birlikte bu iki ifade $x^2 - 2(k \times \rho)\,x + (k \times \rho)^2\,\lambda/(1 + \lambda) = 0$ ya da $a = (k \times \rho)$ tanımıyla $x^2 - 2ax + a^2\,\lambda/(1 + \lambda) = 0$ denkleminin köklerine karşı düşer.

Bu durumda *birinci ayrılmış*ın belirlenmesinde olduğu gibi (bak. *82. Önerme*) hareket edilir (*Şekil 51-1*). Ancak şimdi ZE (= m) ve DZ (= n) hatları, DE [= (m + n)] hattı ile karesel bir oran oluşturmaz. Bu durumda $BC^2/x^2 = DE/DZ$ ifadesini sağlayan x [= $(k \times \rho)\sqrt{n/(m+n)}$] aranan *dördüncü iki adlı*dır.

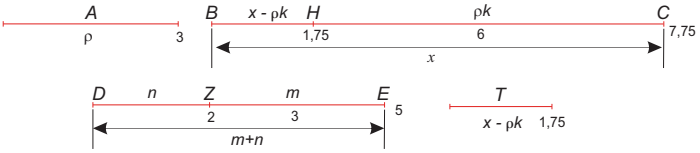
Kanıtı: x ile BC ortak bölünemez $x^2/BC^2 = DZ/DE$ olduğundan varsayım gereği. $T^2 = (BC^2 - CH^2)$ ifadesi geçerlidir.



Şekil 51-1- Burada k = 2, $\rho = A$ = 3, λ = 3/2, n = 2, m = 3;
Dördüncü ayrılmış $x = k\rho/\sqrt{1+\lambda} \cong 8$; $T = \sqrt{BC^2 - CH^2} = (k\rho - x) = k\rho[1 - 1/\sqrt{1+\lambda}] = 4{,}65$.

LXXXVI. Önerme: *Beşinci ayrılmış*ın belirlenmesi.[1]

İkinci ayrılmışla ilgili 83. Önermede olduğu gibi hareket edilir. Bu durumda DZ ve ZE sayıları dördüncü ayrılmıştaki gibi oluşturulur. Şekil ise önceki önermedeki gibidir (*Şekil 51-2*).



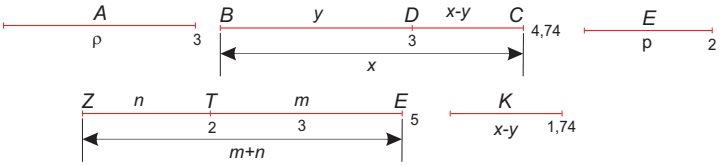
Şekil 51-2- Burada k = 2, $\rho = A$ = 3, λ = 3/2, n = 2, m = 3;
Dördüncü ayrılmış $x = k\rho\sqrt{1+\lambda} \cong 7{,}75$; $T = \sqrt{BC^2 - CH^2} = (x - k\rho) = k\rho[\sqrt{1+\lambda} - 1] = 1{,}75$.

LXXXVII. Önerme: *Altıncı ayrılmış*ın belirlenmesi.[2]

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *89. Önerme* olarak verilir. Son önermede olduğu gibi ρ ve ($k \times \rho$) hatlarının ve m, n sayılarının verildiğini varsayalım. (1) Bu durumda $n/(m + n) = k^2\rho^2/x^2$ ilişkisini sağlayan $x > (k \times \rho)$ sayısı hesaplanır: $x = (k \times \rho)\sqrt{(m+n)/n} = (k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$. Bu durumda x - ($k \times \rho$) = ($k \times \rho$)[$\sqrt{1+\lambda}$ - 1] *beşinci ayrılmış* olarak adlandırılan hattır. (1) ilişkisi gereği rasyonel x ile ($k \times \rho$) ifadelerinin kareleri ortak bölenlidir. Ayrıca $(m + n)/m = x^2/(x^2 - k^2\rho^2)$ nedeniyle $\sqrt{x^2 - (k^2 \times \rho^2)}$ ile x ortak bölenli değildir. Ancak ρ ile ($k \times \rho$) ortak bölenlidir. *48. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere ($k \times \rho$)[$\sqrt{1+\lambda}$ - 1] *beşinci ayrılmış*, ikinci mertebeden $x^2 - 2(k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}\,x + (k \times \rho)^2\lambda = 0$ denkleminin küçük köküne karşı düşer.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *90. Önerme* olarak verilir. Burada ρ verilen rasyonel hat olsun.

Burada *üçüncü ayrılmış*la ilişkili *84. Önermede* olduğu gibi hareket edilir. İki sayı *dördüncü ayrılmış*la ilgili *85. Önermede*ki gibi oluşturulur. Şekil *üçüncü ayrılmış*ta olduğu gibidir (*Şekil 51-3*).



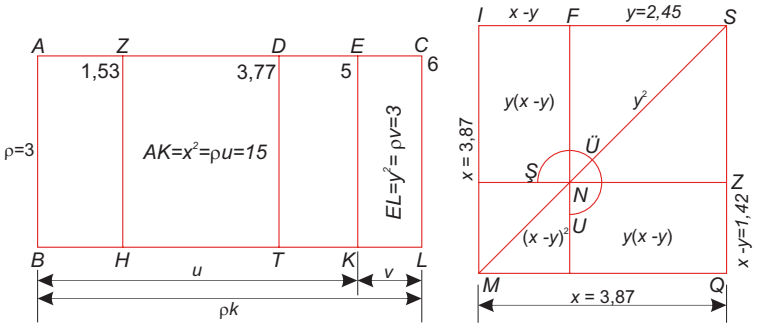
Şekil 51-3- Burada $\rho = A = 3$, $n = 2$, $m = 3$, $p = 2$, $k = (m + n)/p = 5/2$, $\lambda = n/p = 1$; $x = \rho\sqrt{(m+n)/p} \cong 4{,}74$; $y = \rho\sqrt{n/p} = 3$; *altıncı ayrılmış* $(x - y) = \rho(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) = K \cong 1{,}74$.

***LXXXVIII. Önerme*: Bir kenarı rasyonel diğer kenarı *birinci ayrılmış* bir hattan oluşan alanın karekökü *ayrılmış* bir hattır.**[1]

Ayrıca p, $(m + n)$ ve n sayılarının kareleri birbirleri orantılı olmadıkları gibi m ve n sayılarını da $(m + n)$/m oranı ile karesel orantılı olmayacak şekilde seçilmiş olsun. Eğer x ve y büyüklükleri (1) $p/(m + n) = \rho^2/x^2$ ve (2) $(m + n)/n = x^2/y^2$ olacak şekilde seçilirse, bu durumda $(x - y)$ altıncı ayrılmışa karşı düşer. (3) Burada (1) nedeniyle x rasyoneldir ve ρ ile ortak bölünemez. (4) Ayrıca (2) nedeniyle x rasyonel olduğundan y de rasyoneldir ve x ile ortak bölünemez. (3) ve (4) nedeniyle $(x - y)$ bir ayrılmıştır. Ayrıca p/n = ρ^2/y^2 yazılabildiğinden y ile ρ da ortak bölünemez. Neticede x ve y ile ρ ortak bölünemez. Eğer (2) ilişkisi fark biçiminde yazılırsa $(m + n)/m = x^2/(x^2 - y^2)$ oranından $\sqrt{x^2 + y^2}$ ile x değerinin ortak bölünmediği anlaşılır. (1) ve (2) ifadelerinden $x = \rho\sqrt{(m+n)/p}$ ve $y = \rho\sqrt{n/p}$ bulunur. Şu halde $k = (m + n)/p$ ve $\lambda = n/p$ olmak üzere *altıncı ayrılmış*ın $(x - y) = \rho(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda})$ olduğu görülür. *49. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere *altıncı ayrılmış* $x^2 - 2\sqrt{k}.\rho)\, x + (k - \lambda)\rho^2 = 0$ denkleminin küçük köküne karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *91. Önerme* olarak verilir. Önerme *51. Önerme*ye diğer bir değişle $(k \times \rho)[1 - \sqrt{1-\lambda^2}]$ şeklindeki bir *birinci ayrılmış* ve ρ rasyonelinden oluşan alanın, kenarları $\sqrt{\rho(k \times \rho)[1-\sqrt{1-\lambda^2}]}$ hattına eşit bir kareye dönüştürülebileceğini ifade eder. (1) Bunun için ilkin $(u + v) = (k \times \rho)$ ve $(u \times v) = (k^2 \times \rho^2)(1 - \lambda^2)/4$ denklemlerinden u ve v değerleri bulunur. (2) Bulunan bu değerlerden $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ değerleri oluşturulur. Aranan karekök $(x - y)$ farkından elde edilir. Öklid önermeyi kanıtlamak amacıyla (1) ilişkilerinden ilki $u/[(k \times \rho)\sqrt{1-\lambda^2}/2] = [(k \times \rho)\sqrt{1-\lambda^2}/2]/v$ şeklinde ifade edilir ve ρ ile çarpılırsa: $(u \times \rho)/[(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2] = [(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2]/(v \times \rho)$ bulunur. Buna göre (2) nedeniyle $x^2/[(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2] = [(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2]/\, y^2$ yazılabilir. Ancak $x^2/(x \times y) = (x \times y)/y^2$ eşdeğerliği nedeniyle karşılaştırınca (3) $(x \times y) = [(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2]$ olduğu görülür. Buna göre (1),(2) ve (3) nedeniyle $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2(x \times y) = \rho(u + v) - (k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2} = (k \times \rho^2) - (k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2} = (k \times \rho^2)\left(1 - \sqrt{1-\lambda^2}\right)$ ya da $(x - y) = \sqrt{\rho(k \times \rho)[1-\sqrt{1-\lambda^2}]}$, diğer bir değişle bir ayrılmış olduğu kanıtlanmış olur. Ayrıca (1) ve *13. Önerme* gereği (4) u, v ile $(u + v)$ ve ρ ortak bölünebilir. (5) Bunun sonucunda u ve v rasyonel sayılar, $(\rho \times u)$ ve $(\rho \times v)$ rasyonel alanlar olup ortak bölünebilirler. (6) Neticede x ve y rasyonel hatlardır. $[(k \times \rho)\sqrt{1-\lambda^2}]$ rasyoneldir ancak ρ ile ortak bölünemez. $[(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2]$ ortalayan alandır (3) nedeniyle $(x \times y)$ bir ortalayan alandır. Ancak (5) nedeniyle y^2 bir rasyonel alandır. $(x \times y)$ ile y^2 ya da x ile y ortak bölünemez. Ancak her ikisi rasyoneldir ve kareleri ortak bölünebilir. Neticede $(x - y)$ bir *ayrılmış*tır. Cebirsel şöyle hesaplanabilir: (1)'de toplamları $(u + v) = (k \times \rho)$ ve çarpımları $(u \times v) = (k^2 \times \rho^2)(1 - \lambda^2)/4$ verilen u ve v büyüklükleri $u = (k \times \rho)(1 + \lambda)/2$ ve $v = (k \times \rho)(1 - \lambda)/2$ olarak hesaplanır. Ayrıca (2) ilişkilerinden $x = \rho\sqrt{k(1+\lambda)/2}$ ve $y = \rho\sqrt{k(1+\lambda)/2}$ ve neticede $(x - y) = \rho\left[\sqrt{k(1+\lambda)/2} - \sqrt{k(1-\lambda)/2}\right]$ elde edilir. *51. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2(k \times \rho^2).x^2 + \lambda^2.(k^2 \times \rho^4) = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.

Alanın AT [= $(k \times \rho^2)/2$] olarak verildiğini, bu alanda AB (= ρ) kenarının rasyonel bir hat ve AZ {= $(k \times \rho)$ [1− $\sqrt{1-\lambda^2}$]} kenarının ise bir *birinci ayrılmış* hat olduğunu varsayalım (*Şekil 52*). Burada ZC [= $(k \times \rho)\sqrt{1-\lambda^2}$] hattı, AZ hattı ayrılmadan önceki AC [= $(k \times \rho)$] uzunluğa ulaşması için eklenmesi gereken hattır. İlkin BC [= $(k \times \rho^2)$] alanı oluşturulur ve ZC hattı D noktasında ikiye ayrılır. AC üzerinde, $ZC^2/4$ [= $(u \times v)$ = $(k^2 \times \rho^2)(1 - \lambda^2)/4$] olmak üzere, AK [= x^2 = $(\rho \times u)$] ve EL [= y^2 = $(\rho \times v)$] alanları oluşturulur. Bu durumda E noktası AC hattını AE/DC = DC/EC oranında böler. $DE > EC$ olduğu varsayılırsa $EC < DC < AE$ olur. Son olarak AB hattına paralel EK ve DT hatları çekilir.



Şekil 52- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = k\rho = 6$; $AZ = k\rho[1 - \sqrt{1-\lambda^2}]$ ≅ 1,53; $ZC = k\rho\sqrt{1-\lambda^2}$ ≅ 4,67; $ZD = DC = ZC/2$; $AK = x^2 = \rho u = 15$; $EL = y^2 = \rho v = 6$; $u = k\rho(1 + \lambda)/2 = 5$; $v = k\rho(1 - \lambda)/2 = 1$; x ≅ 3,87; y ≅ 2,25; $(x - y)$ ≅ 1,42; $(x - y)^2 = 2$.

Ayrıca AK (= x^2) alanına eşit bir MS alanı oluşturulur ve bu alanın köşegeni üzerine EL (= y^2) alanına eşit bir NS karesi kurulur. Bu durumda IQ şeklinin hatları tamamlanır. Burada $MS/FQ = FQ/NS$ [$x^2/(x \times y) = (x \times y)/y^2$] olduğundan FQ [= $(x \times y)$] bu iki kare arasında orta oranlıdır. Ne var ki DL [= $(k^2 \times \rho^2)(1 - \lambda^2)/4$] alanı onların arasında orta oranındaydı. Neticede $ZT = IZ$ {[$(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2$] = $(x \times y)$ = [$(x^2 + y^2) - (x - y)^2$]/2} ve $ZT = DL = FQ$ {[$(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}/2$] = $(x \times y)$} olur. Aynı şekilde ZL [= $(k \times \rho^2)\sqrt{1-\lambda^2}$] alanı da *ŞÜU* gnomon alanına {ya da = $(MS - MN)$ = [$x^2 - (x - y)^2$] alanına} eşittir. Geriye kalan MN alanı AH alanına eşittir {= $(k \times \rho)^2[1 - \sqrt{1-\lambda^2}$]}. Burada $(AC^2 - CZ^2)$ {= $(k^2 \times \rho^2)[1 - \sqrt{1-\lambda^2}]^2$} farkı AC ile ortak bölenli hattın karesine eşit olduğundan MN karesinin kenarına eşit olan IF hattı

*birinci ayrılmış*a karşı düşer {= $(x - y) = \rho\left[\sqrt{k(1+\lambda)/2} - \sqrt{k(1-\lambda)/2}\right]$}. Buna göre eğer *AC* üzerinde *CZ*²'den *CD*² kadar eksik bir alan oluşturulursa, *AC* hattı *E* noktasıyla ortalamalı iki kısma bölünür. Neticede *AE* ve *EC* ortak bölenli ve *AC* rasyonel olduğu için *AK* [= $x^2 = (\rho \times u)$] ve *EL* [= $y^2 = (\rho \times v)$] alanları da rasyoneldir. Ayrıca *ZC* ve *AC* ortak bölensiz olduğundan *ZC* ile ortak bölenli olan *DC* ve *AC* ile ortak bölenli olan *AE* ortak bölensiz olur. Neticede *DL* ile *AK* ortak bölünmez ve *IS* ile *FS* uzunlukça ortak bölünmez. Buna göre *IF* birinci ayrılmıştır ve *AK* alanının köküne karşı düşer.

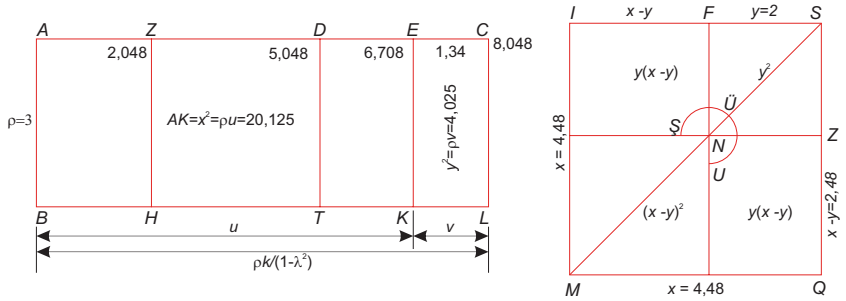
***LXXXIX. Önerme*: Eğer bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *ikinci ayrılmış* hatsa alanı bu alana eşit karenin kökü bir *ortalamalı* hattın *birinci ayrılmışı*dır.[1]**

Önermenin kanıtı önceki gibidir. Ancak burada *AE* ve *EC* hatları ortak bölenli ve rasyonel olduğundan *AK* ve *EL* alanları *ortak bölenli ortalamalı* alanlardır (*Şekil 52-1*). Bu nedenden *IS* ve *FS* hatları *ortalamalı* olmakla birlikte kareleri *ortak bölenli rasyonel hat*lar şeklinde *ortalamalı* alanların kenarlarına karşı düşer. Neticede *IF* bir *ortalamalı birinci ayrılmış hat*tır.

---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *92. Önerme* olarak verilir. Burada amaç son önermede verilen yöntemden yararlanarak $\sqrt{\rho(k \times \rho)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1\right]$ ifadesini belirlemektir. Bunun için Öklid (1) ilkin $(u + v) = (k \times \rho)/\sqrt{1-\lambda^2}$ ve $(u \times v) = (k^2 \times \rho^2)/4$ denklemlerini çözer ve (2) bulduğu *u* ve *v* değerleriyle $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ ifadelerini oluşturur. Aranan karekök $(x - y) = \sqrt{\rho(k \times \rho)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1\right]$ ilişkisinden elde edilir. Bu husus *91. Önerme*de olduğu gibi kanıtlanır. (1) ve (2) ilişkilerinden (3) ifadesi türetilebilir: $(x \times y) = (k \times \rho^2)/2$. Neticede $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2(x \times y) = \rho(u + v) - (k \times \rho^2) = \sqrt{\rho(k \times \rho)}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1\right]$ olduğu görülür.

İkinci olarak $(x - y)$ ifadesinin bir *ortalamalı hattın birinci ayrılmışı* olduğunu kanıtlamak gerekir. (4) yukarıdaki (1) ilişkisi ve *13. Önerme* gereği *u* ile *v* ortak bölenli olduğundan *u* ve *v* ile $(u + v)$ ortak bölenlidir. (5) ancak $(u + v)$ rasyonel olmakla birlikte (1) nedeniyle *u* ve *v* ile ρ ortak bölenli değildir. (6) bu nedenden $(\rho \times u)$, $(\rho \times v)$ ya da x^2, y^2 ortalamalı alanlar ve *x*, *y* ortalaman hatlardır. (7) aynı şekilde(4) gereği *u* ile *v* ortak bölenli olduğundan x^2 ile y^2 ortak bölenlidir. Neticede (6), (7) ve (3) gereği *x* ve *y* ortalamalı hatlar olup kareleri ortak bölenli rasyonel dörtgen alan kenarlarını tanımlar. Şu halde $(x - y)$ bir *ortalamalı hattın birinci ayrılmışı*na karşı düşer. Denklemler çözülürse $u = (k \times \rho)\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)}/2$ ve $v = (k \times \rho)\sqrt{(1-\lambda)/(1+\lambda)}/2$ ve nihayet $(x - y) = \rho\left[\sqrt{k/2\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}} - \sqrt{k/2\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}}\right]$ elde edilir. *52. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2\left[(k \times \rho^2)/\sqrt{1-\lambda^2}\right]x^2 + \left[\lambda^2/\sqrt{1-\lambda^2}\right](k^2 \times \rho^4) = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.

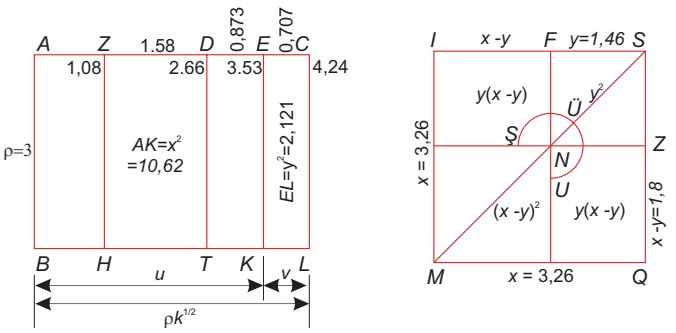


Şekil 52-1- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = k\rho/\sqrt{1-\lambda^2} = 8{,}048$; $AZ = k\rho[1/\sqrt{1-\lambda^2} - 1] \cong 2{,}048$;
$ZC = k\rho = 6$; $ZD = DC = ZC/2 = 3$; $AK = x^2 = \rho u = 20{,}125$; $EL = y^2 = \rho v = 4{,}025$; $u = k\rho\sqrt{(1+\lambda)/(1-\lambda)}/2 = 6{,}708$; $v = k\rho\sqrt{(1-\lambda)/(1+\lambda)}/2 = 1{,}34$; $x \cong 4{,}48$; $y \cong 2$; $(x-y) \cong 2{,}48$; $(x-y)^2 = 6{,}15$.

***XC. Önerme*: Eğer bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *üçüncü ayrılmış* hatsa alanı bu alana eşit karenin kökü bir *ortalamalı* hattın *ikinci ayrılmışı*dır.**[1]

Bu önerme de öncekiler gibi kanıtlanır. Ancak burada *AH* ve *HC* hatları ortak bölenli olduğundan *HB* ve *HL* alanları *ortak bölenli* ve *ortalamalı* alanlardır (*Şekil 52-2*). Aynı şekilde *EL* ve *FL* ortak bölenli ve ortalamalı alanlardır. Bu nedenden *A′C′* ve *F′C′* hatları *ortalamalı* olmakla birlikte kareleri *ortak bölenli ortalamalı* alanların kenarlarına karşı düşer. Neticede *A′F′* bir *ortalamalı ikinci ayrılmış hat*tır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *93. Önerme* olarak verilir. Burada amaç aynı yöntemden yararlanarak $\sqrt{\rho(\sqrt{k}\times\rho)[1-\sqrt{1-\lambda^2}]}$ ifadesini belirlemektir. Bunun için daha önce olduğu gibi ilkin (1) $(u+v) = (\sqrt{k}\times\rho)$ ve $(u\times v) = (k\times\rho^2)(1-\lambda^2)/4$ denklemleri çözülür ve (2) bulunan u ve v değerleriyle $x^2 = (\rho\times u)$ ve $y^2 = (\rho\times v)$ ifadeleri oluşturulur. Bu durumda $(x-y)$ aranan kareköktür ve bir *ortalamalı hattın ikinci ayrılmışı*na karşı düşer. Bu husus daha önceki önermelerde olduğu gibi kanıtlanır. (1) ve (2) ifadelerinden $(x\times y) = \tfrac{1}{2}\sqrt{k}\rho^2\sqrt{1-\lambda^2}$ dörtgeninin de ortalamalı olduğu görülür. (1) ve *13. Önerme* gereği u ile v ya da $(u+v)$ ile u ortak bölenlidir. Ancak $(u+v)$ ya da $(\sqrt{k}\times\rho)$ ile $\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\rho\sqrt{1-\lambda^2}$ ortak bölenli değildir. Buna göre u ile $\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\rho\sqrt{1-\lambda^2}$, $(\rho\times u)$ ile $\tfrac{1}{2}\sqrt{k}\rho^2\sqrt{1-\lambda^2}$, x^2 ile $(x\times y)$ ya da x ile y ortak bölenli değildir. Ne var ki u ile v, $(\rho\times u)$ ile $(\rho\times v)$ ya da x^2 ile y^2 ortak bölenlidir. Şu halde x ile y hatlarının kareleri ortak bölenli ortalamalı hatlar olduğundan $(x\times y)$ bir ortalamalı alandır. Neticede $(x-y)$ bir *ortalamalı hattın ikinci ayrılmışı*na karşı düşer. Eğer (1) ve (2) denklemleri çözülürse $u = (\sqrt{k}\times\rho)(1+\lambda)/2$, $v = (\sqrt{k}\times\rho)(1-\lambda)/2$ ve $(x-y) = \rho\left[\sqrt{k(1+\lambda)/2} - \sqrt{k(1-\lambda)/2}\right]$ elde edilir. *53. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2\sqrt{k}\rho^2.x^2 + \lambda^2k\rho^4 = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.

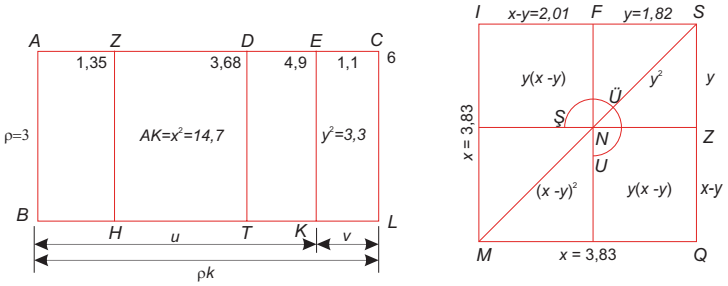


Şekil 52-2- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = \sqrt{k}\rho \cong 4{,}24$; $AZ = \sqrt{k}\rho[1 - \sqrt{1-\lambda^2}] \cong 1{,}08$;
$ZC = \sqrt{k}\rho\sqrt{1-\lambda^2} = 3{,}16$; $ZD = DC = ZC/2 = 1{,}58$; $AK = x^2 = \rho u = 10{,}62$; $EL = y^2 = \rho v = 2{,}121$;
$u = \sqrt{k}\rho(1 + \lambda)/2 = 3{,}54$; $v = \sqrt{k}\rho(1 - \lambda)/2 = 0{,}707$; $x \cong 3{,}26$; $y \cong 1{,}46$; $(x - y) \cong 1{,}8$; $(x - y)^2 = 3{,}24$.

***XCI. Önerme*: Eğer bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *dördüncü ayrılmış* ise alanı bu alana eşit karenin karekökü bir *küçük* ya da *minör*dür.[1]**

Bu önerme de aynı şekilde kanıtlanır. Ancak burada *AE*, *EC* hatları *AK* ve *EL* alanları ortak bölenli değildir. Çarpımları rasyoneldir. *AK* ve *EL* alanları *ortak bölenli* ve *ortalamalı* alanlardır (*Şekil 52-3*). Aynı şekilde *ZL* alanı ortalamalı olduğundan *IS* ve *FS* hatları karesel ortak bölünemez. Onların kareleri toplamı rasyonel ve $2(IS \times FS)$ ortalamalı bir alandır. Neticede *IF* bir *küçük*tür.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *94. Önerme* olarak verilir. Burada amaç $\sqrt{\rho(k \times \rho)\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right]}$ ifadesini belirlemektir. (1) daha önce olduğu gibi ilkin $(u + v) = (k \times \rho)$ ve $(u \times v) = (k^2 \times \rho^2)/4(1 + \lambda)$ denklemlerinden u ve v değerleri bulunur. (2) Bulunan bu değerlerden $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ değerleri oluşturulur. Aranan karekök $(x - y)$ ilişkisinden elde edilir. Burada $(x \times y) = ½(k \times \rho^2)/\sqrt{1 + \lambda}$ olduğuna göre önerme benzer şekilde kanıtlanır. (1) ve *14. Önerme* gereği u ile v, $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$, x^2 ile y^2 ortak bölünemediğinden x ile y kareleri ortak bölünemez. Bu nedenden $(x^2 + y^2)$ ya da $\rho(u + v) = (k \times \rho^2)$ rasyonel bir alandır. Ancak $2(x \times y) = (k \times \rho^2)/\sqrt{1 + \lambda}$ bir ortalamalı alan olduğuna göre, *73. Önerme* gereği $(x - y)$ *küçük* (*minör*) adı verilen irrasyonel bir hattır. (1) ve (2) ilişkileri çözülürse $u = ½(k \times \rho)\left[1 + \sqrt{\lambda/(1 + \lambda)}\right]$ ve $v = ½(k \times \rho)[1 - \sqrt{\lambda/(1 + \lambda)}]$, neticede $(x - y) = \rho\left[\sqrt{\frac{k}{2}(1 + \sqrt{\lambda/(1+\lambda)})} - \sqrt{\frac{k}{2}(1 - \sqrt{\lambda/(1+\lambda)})}\right]$ elde edilir. *54. Önerme* dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2(k \times \rho^2).x^2 + [\lambda/(1 + \lambda)](k^2 \times \rho^4) = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.

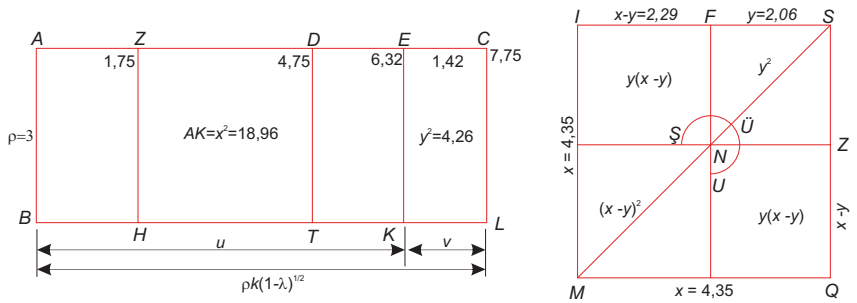


Şekil 52-3- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = k\rho = 6$; $AZ = k\rho[1 - 1/\sqrt{1-\lambda^2}] \cong 1{,}35$;

$ZC = k\rho/\sqrt{1-\lambda^2} = 4{,}65$; $ZD = DC = ZC/2 = 2{,}32$; $AK = x^2 = \rho u = 14{,}7$; $EL = y^2 = \rho v = 3{,}3$;

$u = \frac{1}{2}(k\rho)\left[\sqrt{\lambda/(1+\lambda)}\right] = 4{,}9$; $v = \frac{1}{2}(k\rho)\left[1 - \sqrt{\lambda/(1+\lambda)}\right] = 1{,}1$; $x \cong 3{,}83$; $y \cong 1{,}82$; $(x - y) \cong 2{,}01$.

***XCII. Önerme*: Eğer bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *beşinci ayrılmış* ise, alanı bu alana eşit karenin karekökü bir rasyonelle birleşik *ortalamalı* bir hattır.**[1]



1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *95. Önerme* olarak verilir. Burada amaç $\sqrt{\rho(k\times\rho)[\sqrt{1+\lambda}-1]}$ ifadesini belirlemektir. Önceki önermelerde olduğu gibi (1) ilkin $(u + v) = (k \times \rho)\sqrt{1+\lambda}$ ve $(u \times v) = (k^2 \times \rho^2)/4$ denklemlerinden u ve v değerleri çözülür. (2) Bulunan değerlerden $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ elde edilir. Aranan kök ifadesi $(x - y)$ ilişkisinden elde edilir. Sonuç daha önce olduğu gibi kanıtlanır. Burada $(x \times y) = \frac{1}{2}(k \times \rho^2)$ olarak elde edilir. (1) ve *14. Önerme* gereği u ile v, $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$, x^2 ile y^2 ortak bölünemediğinden x ile y kareleri ortak bölünemez. Bu nedenden $(x^2 + y^2) = \rho(u + v) = (k \times \rho^2)\sqrt{1+\lambda}$ $\sqrt{1+\lambda}$ rasyonel bir alan oluşturur. Şu halde *74. Önerme* gereği $(x - y)$ rasyonel hat *eksiltilmiş ortalamalı* bir hat olarak elde edilir. Cebirsel çözüm $u = \frac{1}{2}(k \times \rho)[\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}]$ ve $v = \frac{1}{2}(k \times \rho)[\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}]$ olmak üzere şu şekildedir:

$$(x - y) = \rho\left[\sqrt{\tfrac{k}{2}(\sqrt{1+\lambda}+\sqrt{\lambda})} - \sqrt{\tfrac{k}{2}(\sqrt{1+\lambda}-\sqrt{\lambda})}\right].$$

55. Önerme dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2(k \times \rho^2)\sqrt{1+\lambda}.x^2 + \lambda(k^2 \times \rho^4) = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.

Şekil 52-4- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = k\rho\sqrt{1-\lambda} = 7{,}75$; $AZ = k\rho[1-\sqrt{1-\lambda}] \cong 1{,}75$;

$ZC = k\rho = 6$; $ZD = DC = ZC/2 = 3$; $AK = x^2 = \rho u = 18{,}96$; $EL = y^2 = \rho v = 4{,}26$;

$u = \frac{1}{2}(k\rho)[\sqrt{(1+\lambda)} + \sqrt{\lambda}] = 6{,}32$; $v = \frac{1}{2}(k\rho)[\sqrt{(1+\lambda)} - \sqrt{\lambda}] = 1{,}42$; $x \cong 4{,}35$; $y \cong 2{,}06$;

$(x - y) \cong 2{,}29$.

Önerme de aynı şekilde kanıtlanır. Ancak burada *AE* ve *EC* hatları, *AK* ve *EL* alanları ortak bölenli değildir ve çarpımları ortalamalıdır (*Şekil 52-4*). Bu nedenden *IS* ve *FS* hatları karesel ortak bölünemez. Onların kareleri toplamı rasyonel ve 2(*IS* × *FS*) çarpımı ortalamalı bir alandır. Neticede *AK* alanına eşit *IF* toplamı bir *rasyonelle birleşik ortalamalı* bir hattır.

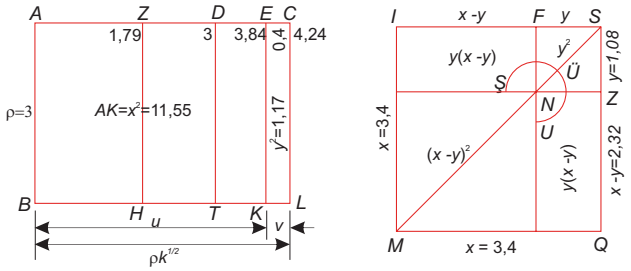
***XCIII. Önerme*: Eğer bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *altıncı ayrılmış* ise, alanı bu alana eşit karenin karekökü bir *ortalamalıyla birleşik ortalamalı* bir hattır.**[1]

Önermenin kanıtında aynı yol izlenir. Ancak burada *AE* ve *EC* hatları, *AK* ve *EL* alanları ortak bölenli değildir ve çarpımları ortalamalıdır (*Şekil 52-5*). Burada *ZL* alanı ortalamalı olmakla birlikte onlarla uzunluk yönünden ortak bölünmez. Bu nedenden *IS* ve *FS* hatlarının karesel ortak bölünemez. Onların kareleri toplamı rasyonel ve 2(*IS* × *FS*) çarpımı ortalamalı bir alandır. Neticede önermede öngörüldüğü gibi *AK* alanına eşit *IF* toplamı bir *rasyonelle birleşik ortalamalı* bir hattır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *96. Önerme* olarak verilir. Önermenin amacı $\sqrt{\rho^2[\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}]}$ ifadesini belirlemektir. Önceki önermelerde olduğu gibi (1) ilkin $(u + v) = (\sqrt{k} \times \rho)$ ve $(u \times v) = (\lambda \times \rho^2)/4$ denklemlerinden u ve v değerleri çözülür. (2) Bulunan değerlerden $x^2 = (\rho \times u)$ ve $y^2 = (\rho \times v)$ elde edilir. Aranan kök ifadesi $(x - y)$ ilişkisinden elde edilir. (1) ve *14. Önerme* gereği u ile v, $(\rho \times u)$ ile $(\rho \times v)$, x^2 ile y^2 ortak bölünemediğinden x ile y kareleri ortak bölünemez. Bu nedenden $(x^2 + y^2) = \rho(u + v) = (\sqrt{k} \times \rho^2)$ ortalamalı bir alan oluşturur. Ayrıca $2(x \times y) = (\sqrt{k} \times \rho^2)$ ifadesi de bir ortalamalı alan tanımlar. Nihayet varsayım gereği $(\sqrt{k} \times \rho)$ ile $(\sqrt{\lambda} \times \rho)$ ifadelerinin kareleri ortak bölenli olduğundan $(\sqrt{k} \times \rho)$ ile $(\sqrt{\lambda} \times \rho)$, $(\sqrt{k} \times \rho^2)$ ile $(\sqrt{\lambda} \times \rho^2)$ ya da $(x^2 + y^2)$ ile $2(x \times y)$ ortak bölensizdir. Şu halde *75. Önerme* gereği $(x - y)$ rasyonel *eksiltilmiş ortalamalı* bir hat olarak elde edilir. Cebirsel çözüm $u = (\rho/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k-\lambda}]$ ve $v = (\rho/2)[\sqrt{k} - \sqrt{k-\lambda}]$ olmak üzere şu şekildedir:

$$(x - y) = \rho\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k-\lambda})} - \sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-\lambda})}\right].$$

56. Önerme dipnotunda belirtildiği üzere çözüm $x^4 - 2\sqrt{k}\,\rho^2.x^2 + (k - \lambda)\rho^4 = 0$ denkleminin küçük pozitif köküne karşı düşer.



Şekil 52-5- Burada $AB = \rho = 3$, $k = 2$, $\lambda = 2/3$; $AC = \sqrt{k}\rho = 4{,}24$; $AZ = \rho[\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}] \cong 1{,}79$;

$ZC = \rho\sqrt{\lambda} = 2{,}45$; $ZD = DC = ZC/2 = 2{,}32$; $AK = x^2 = \rho u = 11{,}55$; $EL = y^2 = \rho v = 1{,}17$;

$u = (\rho/2)[\sqrt{k} + \sqrt{k - \lambda}] = 3{,}84$; $v = (\rho/2)[\sqrt{k} - \sqrt{k - \lambda}] = 0{,}4$; $x \cong 3{,}4$; $y \cong 1{,}08$; $(x - y) \cong 2{,}32$.

XCIV. Önerme: Eğer bir *ayrılmış* hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *birinci ayrılmış* hattır.[1]

Ayrılmış hattın AB [$= \rho(1 - \sqrt{k})$] ve onunla birleşerek onu ilk durumuna getiren hattın BC [$= \rho\sqrt{k}$] ve rasyonel hattın ise DE ($= \sigma$) olduğunu varsayalım (*Şekil 53*). DE hattı üzerinde alanı $DT = AB^2$ [$= \rho^2(1 - \sqrt{k})^2$] ve kenarı DH [$= \rho^2(1 - \sqrt{k})^2/\sigma$] birinci ayrılmış olan

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *97. Önerme* olarak verilir. Bu ve bunu izleyen beş önerme ters işlemin diğer bir deyişle kareler verildiğinde dörtgen kenarlarından birinin ayrılmış hatlardan biri olması gerektiğinin kanıtlanmasına karşı düşer. Burada amaç eğer ρ $(1 - \sqrt{k})$ bir *ayrılmış* ise $[\rho (1 - \sqrt{k})]^2/\sigma$ ifadesinin bir *birinci ayrılmış* olduğunu geometrik kanıtlamaktır. (1) Bunun için x, y ve z değişkenlerinin $(\sigma \times x) = \rho^2$, $(\sigma \times y) = k\rho^2$ ve $(\sigma \times 2z) = 2\sqrt{k}\rho^2$ denklemlerini sağladıkları varsayılır. Buna göre $(x + y) - 2z = (\rho - \rho\sqrt{k})^2/\sigma$ ifadesinin gerçekleşmesi ya da diğer bir deyişle $(x + y) - 2z$ farkının bir *birinci ayrılmış* olması gerektiğini kanıtlamak gerekir.

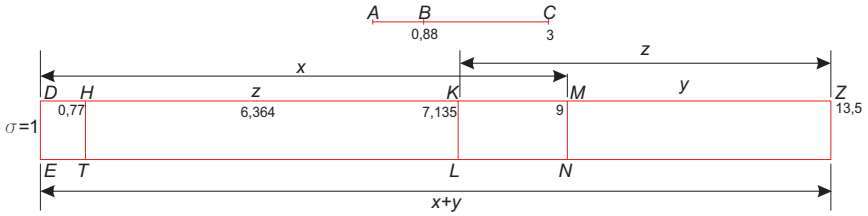
(α) Burada (2) rasyonel $\rho^2 + k\rho^2 = [\sigma \times (x + y)]$ ilişkisi nedeniyle $(x + y)$ ile σ ortak bölenlidir. (3) ayrıca $(\sigma \times 2z) = 2\sqrt{k}\rho^2$ ortalamalı olduğundan rasyonel $2z$ ile σ *ortak bölenli değildir*. Ancak $[\sigma \times (x + y)]$ rasyonel ve $(\sigma \times 2z)$ ortalamalı olduğundan $[\sigma \times (x + y)]$ ile $(\sigma \times 2z)$ ya da $(x + y)$ ile $2z$ *ortak bölenli değildir*. (4) Buna göre (2) ve (3) nedeniyle $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve kareleri *ortak bölenli*dir. Şu halde $(x + y) - 2z$ bir *ayrılmış*tır.

(β) Ancak $\sqrt{k}$ ρ^2 ifadesi ρ^2 ile $k\rho^2$ arasında bir orta oran olduğundan (1) nedeniyle $(\sigma \times z)$ ifadesi de $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ arasında bir orta oran oluşturur. (5) bunun sonucunda $(\sigma \times x)/(\sigma \times z) = (\sigma \times z)/(\sigma \times y)$ ya da $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ yazılabilir. (6) ayrıca ρ^2 ile $k\rho^2$ ortak bölenli olduğundan (1) nedeniyle $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da x ile y ortak bölenlidir. Neticede (5), (6) ve *13. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenlidir. Ayrıca (4) nedeniyle $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve kareleri ortak bölenlidir ve (2) nedeniyle$(x + y)$ ile σ ortak bölenli olduğundan $(x + y) - 2z$ bir birinci ayrılmıştır. Şüphesiz $(x + y) - 2z$ ifadesinin gerçek değeri şu şekildedir:

$$\rho^2/\sigma\ [(1 + k) - 2\sqrt{k})].$$

bir alan kuralım. Benzer şekilde DE hattı üzerinde alanı $DN = AC^2$ $(= \rho^2)$ ve kenarı DM $[= x = \rho^2/\sigma]$, sonra alanı $NZ = BC^2$ $[= (\rho^2 \times k)]$ ve kenarı MZ $[= y = (\rho^2 \times k)/\sigma]$ olan alanları kuralım. Şimdi HZ $\{= 2z = (DM - DH) + MZ = [\rho^2/\sigma - \rho^2(1- \sqrt{k})^2/\sigma] + (\rho^2 \times k)/\sigma = 2\rho^2\sqrt{k}/\sigma\}$ hattını K noktasında yarıya bölüp DE hattına paralel KL hattını çekelim. Burada DN ile NZ alanları ve DM ile MZ hatları rasyonel olduğundan ortak bölenlidir. Neticede DZ $[= (x + y) = \rho^2(1 + k)/\sigma]$ hattı uzunluk yönünden rasyoneldir. Ayrıca $(AC \times BC)$ $[= \rho^2\sqrt{k}]$ çarpımı ortalamalı olduğundan ZL $[= \rho^2\sqrt{k} + k)]$ alanının ve aynı şekilde ZT $[= \rho^2(2\sqrt{k} + k)]$ alanın karesi rasyoneldir. $(AC \times BC)$ çarpımı AC^2 ve BC^2 arasında orta oranındadır: $AC^2/(AC \times BC) = (AC \times BC)/ BC^2$. ZL alanı da DN ve NZ arasında orta oranındadır: $DN/ZL = ZL/NZ$. Diğer bir deyişle $DM/ZK = ZK/ZM$ yazılabilir $(x/z = z/y)$.

Buna göre eğer DZ $[= (x + y)]$ hattı üzerinde $(ZH^2 - ZK^2)$ $[= z^2]$ farkına eşit bir alan kurulursa, DZ hattı M noktasında iki ortak bölenliye bölünür. Bu durumda $(DZ^2 - ZH^2)$ $[= (x + y)^2 - (2z)^2]$ farkı, uzunluğa göre DZ ile ortak bölenli DH hattının karesine eşit olur: $[(x + y)^2 + (2z)^2] = [\rho^2(1- \sqrt{k})^2/\sigma]^2$.

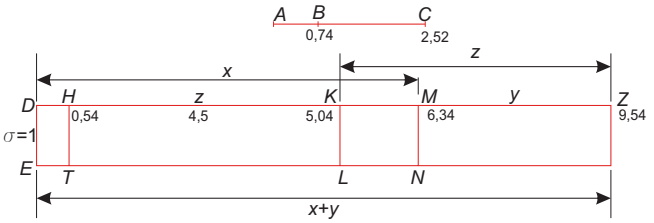


Şekil 53- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $s = 1$; $AB = \rho(1 - \sqrt{k}) = 0{,}88$; $BC = \rho\sqrt{k} = 2{,}12$; $AC = \rho = 3$;
$x = \rho^2/\sigma = 9$; $y = (\rho^2 \times k)/\sigma = 4{,}5$; $(x + y) = \rho^2(1 + k)/\sigma = 13{,}5$; $z^2 = (x \times y) = 40{,}5$; $z = 6{,}364$.

***XCV. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *birinci ortalama ayrılmış* hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *ikinci ayrılmış* hattır.**[1]

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *98. Önerme* olarak verilir. Burada amaç $\rho^2(k^{1/4} \sim k^{3/4})/\sigma$ ifadesini belirlemektir. (1) bunun için x, y ve z büyüklükleri $(\sigma \times x) = k^{1/2}\rho^2$, $(\sigma \times y) = k^{3/4}\rho^2$ ve $(\sigma \times 2z) = 2k\rho^2$ denklemlerini sağlamalıdır. (α) Burada $k^{1/2}\rho^2$ ve $k^{3/4}\rho^2$ ortalamalı alanlar olduğuna göre $[\sigma \times (x + y)]$ ortalamalı bir alandır. (2) şu halde $(x + y)$ rasyonel olmakla birlikte σ ile ortak bölenli değildir. (3) ancak $2k\rho^2$ ve bu nedenden $(\sigma \times 2z)$ rasyoneldir. Buna göre $2z$ ile σ ortak bölenlidir. Ayrıca $[\sigma \times (x + y)]$ ortalamalı ve $(\sigma \times 2z)$ rasyonel olduğundan bu ikisi ya da $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölenli değildir ve sadece

Bu önerme önceki önermede olduğu gibi kanıtlanır. Ancak burada *DN* ve *NZ* alanları ortalamalı ve ortak bölenlidir (*Şekil 53-1*). *EZ* alanı ortalamalı olmakla birlikte karesi rasyoneldir. *ZT* alanı ise rasyoneldir. Neticede *ZH* uzunluk yönünden rasyoneldir. *DM* ile *MZ* ortak bölenli olduğundan ($DZ^2 - ZH^2$) farkı *DZ* ile ortak bölenli olan hattın karesine eşittir. Böylece *DH* bir *ikinci ayrılmış*a karşı düşer.



Şekil 53-1- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $s = 1$; $AB = \rho(k^{1/4} - k^{3/4}) = 0{,}74$; $BC = \rho k^{3/4}) = 1{,}78$; $AC = \rho\, k^{1/4} = 2{,}52$;
$x = \rho^2\, k^{1/2}/\sigma = 6{,}36$; $y = (\rho^2 \times k^{3/2})/\sigma = 3{,}18$; $(x + y) = \rho^2\sqrt{k}(1 + k)/\sigma = 9{,}54$; $z = \rho^2 k/s = 4{,}5$.

***XCVI. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *ikinci ortalama ayrılmış* hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *üçüncü ayrılmış* hattır.**[1]

---

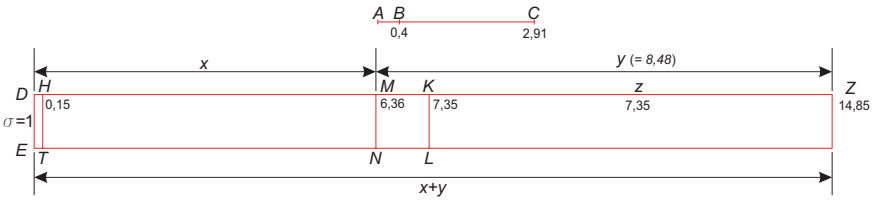
kareleri ortak bölenli olduğundan $[(x + y) - (2z)]$ bir *ayrılmış*tır. (β) Daha önce olduğu gibi (4) $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ olduğu kanıtlanabilir. Ayrıca (5) $k^{1/2}\rho^2$ ile $k^{3/4}\rho^2$; $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da *x* ile *y* ortak bölenlidir. Neticede (4), (5) ve *13. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ve $2z$ ile σ ortak bölenli ve $[(x + y) - (2z)]$ bir *ikinci ayrılmış*tır ve şüphesiz aşağıdaki ilişkisi geçerlidir:

$$[(x + y) - (2z)] = \rho^2[\sqrt{k}(1 + k) - 2k]/\sigma.$$

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *99. Önerme* olarak verilir. Burada amaç $(\rho^2/\sigma)[k^{1/4} \sim \sqrt{\lambda}/k^{1/4}]^2$ ifadesini belirlemektir. Bunun için *x*, *y* ve *z* büyüklükleri $(\sigma \times x) = k^{1/2}\rho^2$, $(\sigma \times y) = (\lambda/k^{1/2})\rho^2$ ve $(\sigma \times 2z) = 2k^{1/2}\rho^2$ denklemlerini sağlamalıdır. (α) Burada (1) $[\sigma \times (x + y)]$ ortalamalı bir alan olduğundan $(x + y)$ rasyonel olmakla birlikte σ ile ortak bölenli değildir. (2) Ayrıca $(\sigma \times 2z)$ ortalamalı olduğundan rasyonel olmakla birlikte $2z$ ile σ ortak bölenli değildir. (3) Yine $\rho k^{1/4}$ ile $\rho\sqrt{\lambda}/k^{1/4}$ ya da $\rho^2\sqrt{k}$ ile $\rho^2\sqrt{\lambda}$ ortak bölenli değildir. Buna karşın $\rho^2\sqrt{k}$ ile $\rho^2(\sqrt{k} + \lambda\sqrt{k})$ ve $\rho^2\sqrt{\lambda}$ ile $2\rho^2\sqrt{\lambda}$ ortak bölenlidir. Ne var ki $\rho^2(\sqrt{k} + \lambda\sqrt{k})$ ile $2\rho^2\sqrt{\lambda}$ ya da $[\sigma \times (x + y)]$ ile $(\sigma \times 2z)$ ve nihayet $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölenli değildir. Buna göre (1), (2) ve (3) nedeniyle rasyonel $(x + y)$ ile $2z$ ifadelerinin kareleri ortak bölenli olduğundan $[(x + y) - (2z)]$ bir *ayrılmış*tır.

(β) Ancak $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da *x* ile *y* ortak bölenlidir. Daha önce olduğu gibi $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ olduğundan, *13. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli olmakla birlikte, $(x + y)$ ve $2z$ ile σ ortak bölenli değildir. Buna göre $[(x + y) - (2z)]$ bir *üçüncü ayrılmış*tır ve yapısı $(\rho^2/\sigma)[(k + \lambda)/\sqrt{k} - 2\sqrt{\lambda}]^2$ şeklindedir.

Bu önerme de öncekilerde olduğu gibi kanıtlanır. Burada da *DN* ve *NZ* alanları ortalamalı ve ortak bölenlidir (*Şekil 53-2*). *DZ* hattı ortalamalı olmakla birlikte karesi rasyoneldir. *ZT* alanı ise rasyoneldir ve onunla uzunluğa göre ortak bölensizdir. Neticede *ZD* hattının karesi de rasyonel ve ortak bölensizdir. *DM* ile *MZ* ortak bölenli olduğundan ($DZ^2 - ZH^2$) farkı *DZ* ile ortak bölenli hattın karesine eşittir. Böylece *DH* bir *üçüncü ayrılmış*a karşı düşer.



Şekil 53-2- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $\lambda = 2/3$; $s = 1$;
$AB = \rho(\lambda^{1/2}/k^{1/4} - k^{1/4}) = 0{,}4$; $BC = \rho k^{1/4} = 2{,}52$; $AC = \rho\,\lambda^{1/2}/k^{1/4} = 2{,}91$;
$x = \rho^2 k^{1/2}/\sigma = 6{,}36$; $y = (\rho^2 \times .\lambda)/k^{1/2}\sigma = 8{,}48$; $(x + y) = \rho^2(k + \lambda)/k^{1/2}\sigma = 14{,}84$; $z = \rho^2\lambda^{1/2}/s = 7{,}35$.

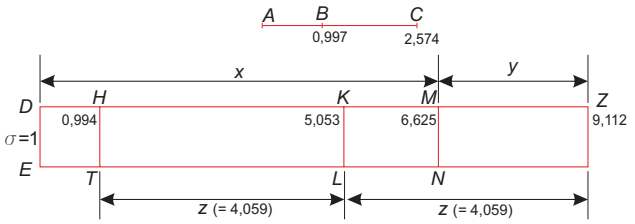
***XCVII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerine *daha küçük* hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *dördüncü ayrılmış* olur.**[1]

Bu önerme de aynı şekilde kanıtlanır. Ancak burada AC^2 ve BC^2 ortak bölünemediğinden *FN* ve *NE* alanları ile *FM* ve *EM* hatları da ortak bölünemez (*Şekil 53-3*). Lakin iki karenin toplamı olduğundan *FE* = (*FM* + *ME*) hattı rasyoneldir. Ayrıca (*AC* × *BC*) ortalamalı olduğundan *TE* hattı ortalamalı, *DE* hattının ise sadece karesi rasyoneldir. Burada *FE* ile *EM* ortak bölensiz olduğundan, ($FE^2 - ED^2$) farkı *FE* ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Böylece *FD* bir *dördüncü ayrılmış*a karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *100. Önerme* olarak verilir. Burada amaç

$$(\rho^2/2\sigma)\left[\left(1 + k/\sqrt{1+k^2}\right)^{1/2} - \left(1 - k/\sqrt{1+k^2}\right)^{1/2}\right]^2$$

ifadesini belirlemektir. Bunu kısaca $(u - v)^2/\sigma$ şeklinde ifade edelim. Bunun için *x*, *y* ve *z* büyüklükleri $(\sigma \times x) = u^2$, $(\sigma \times y) = v^2$ ve $(\sigma \times 2z) = 2(u \times v)$ denklemlerini sağlamalıdır. Burada u^2 ve v^2 ortak bölünemediğini, $(u^2 + v^2)$ ifadesinin rasyonel ve $2(u \times v)$ ifadesinin ortalamalı olduğunu unutmamak gerekir. (1) Buna göre $[\sigma \times (x + y)]$ rasyonel ve $(\sigma \times 2z)$ ortalamalı olduğundan $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölenlidir. (2) Buna karşın $2z$ rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir. (3) Şu halde $\sigma(x + y)$ ile $(\sigma \times 2z)$ ya da $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölenli değildir. Neticede (1), (2) ve (3) nedeniyle $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve kareleri ortak bölenli olduğundan $[(x + y) - (2z)]$ bir *ayrılmış*tır. Son olarak u^2 ile v^2, $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da *x* ile *y* ortak bölünemez. Daha önce olduğu gibi $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ olduğundan, *14. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli olmamakla birlikte, $(x + y)$ ve $2z$ ile σ ortak bölenlidir. Buna göre $[(x + y) - (2z)]$ bir *dördüncü ayrılmış*tır ve yapısı şüphesiz ki şu şekildedir: $(\rho^2/\sigma)(1 - 1/\sqrt{1+k^2})$



Şekil 53-3- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $s = 1$;
$AB = (u - v) = 0{,}997$; $BC = v = (\rho/\sqrt{2}\sigma)\,(1 - k/\sqrt{1+k^2})^{1/2} = 1{,}577$; $AC = u = (\rho/\sqrt{2}\sigma)\,(1 + k/\sqrt{1+k^2})^{1/2} = 2{,}574$;
$x = u^2/\sigma = 6{,}625$; $y = v^2/\sigma = 2{,}487$; $(x + y) = 9{,}112$; $z = (u \times v)/s = 4{,}059$.

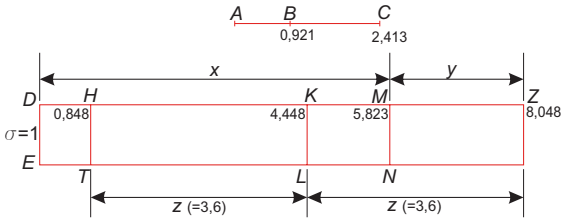
***XCVIII. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerinde bir *rasyonel* hatla birleşerek toplamı *ortalamalı* olan bir hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *beşinci ayrılmış* olur.**[1]

Bu önerme de aynı şekilde kanıtlanır: AC^2 ve BC^2 ortak bölünemediğinden DN ve NZ alanları ile DM ve MZ hatları da ortak bölünemez (*Şekil 53-4*). Lakin iki karenin toplamı $DZ = (DM + MZ)$ hattı ortalamalı olduğundan karesi rasyoneldir. Ayrıca $(2AC \times BC)$ rasyonel olduğundan DZ ancak uzunluğa göre rasyoneldir. Burada da DZ ile MZ ortak bölensiz olduğundan, $(DZ^2 - ZH^2)$ farkı DZ ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Böylece DH bir *beşinci ayrılmış*a karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *101. Önerme* olarak verilir. Burada amaç

$$(\rho^2/\sigma\sqrt{2(1+k^2)})\left[\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)^{1/2} - \left(\sqrt{1+k^2}-k\right)^{1/2}\right]^2$$

ya da $(u - v)^2/\sigma$ ifadesini belirlemektir. Bunun için x, y ve z büyüklükleri $x = u^2/\sigma$, $y = v^2/\sigma$ ve $z = (u \times v)/\sigma$ denklemlerini sağlamalıdır. Burada u^2 ve v^2 ortak bölünemediğini, $(u^2 + v^2)$ ifadesinin ortalamalı ve $2(u \times v)$ rasyonel alanlardır. Buna göre $[\sigma \times (x + y)]$ ortalamalı ve $(\sigma \times 2z)$ rasyonel olduğundan $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölünemez. Buna karşın $2z$ rasyonel olduğundan σ ile ortak bölünebilir. Şu halde $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölenli değildir. Neticede $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel ve kareleri ortak bölenli olduğundan $[(x + y) - (2z)]$ bir *ayrılmış*tır. Daha önce olduğu gibi $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ ve u^2 ve v^2 ortak bölünemediğinden $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ya da x ile y ortak bölenli değildir. Neticede *14. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli olmamakla birlikte, $2z$ ile σ ortak bölenlidir. Buna göre $[(x + y) - (2z)]$ bir *beşinci ayrılmış*tır ve yapısı şüphesiz ki şu şekildedir: $(\rho^2/\sigma)(1/\sqrt{1+k^2} - 1/\sqrt{1+k^2})$.



Şekil 53-4- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $s = 1$; $AB = (u - v) = 0{,}921$; $BC = v = (\rho^2/\sigma\sqrt{2(1+k^2)})\left(\sqrt{1+k^2} - k\right)^{1/2} = 1{,}492$; $AC = u = (\rho^2/\sigma\sqrt{2(1+k^2)})\left(\sqrt{1+k^2} + k\right)^{1/2} = 2{,}413$; $x = u^2/\sigma = 5{,}823$; $y = v^2/\sigma = 2{,}225$; $(x + y) = 8{,}048$; $z = (u \times v)/s = 3{,}6$.

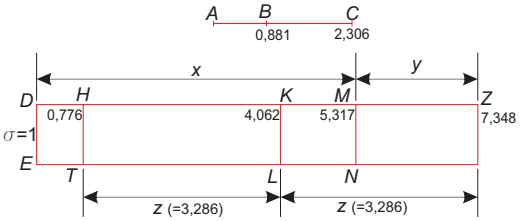
***XCIX. Önerme*: Eğer rasyonel bir hat üzerinde bir *ortalamalı* hatla birleşerek toplamı *ortalamalı* olan bir hattın karesine eşit bir alan oluşturulursa, bu alanın eni bir *altıncı ayrılmış* olur.**[1]

Bu önerme de aynı şekilde kanıtlanır. Burada da AC^2 ve BC^2 ortak bölensiz olduğundan DN ve NZ alanları ile DM ve MZ hatları da ortak bölensizdir (*Şekil 53-5*). Lakin iki karenin toplamı ortalamalı olduğundan $DZ = (DM + MZ)$ hattının karesi rasyoneldir. Ayrıca $(2AC \times BC)$ ortalamalı ve ortak bölensiz olduğundan DZ ve ZH hatlarının sadece kareleri rasyoneldir. Burada DZ ile MZ ortak bölensiz olduğundan, $(DZ^2 - ZD^2)$ farkı DZ ile ortak bölensiz olan hattın karesine eşittir. Böylece önermede öngörüldüğü gibi DH bir *altıncı ayrılmış*a karşı düşer.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *102. Önerme* olarak verilir. Burada amaç

$$(\rho^2\lambda^{1/4}/\sqrt{2}\sigma)\left[\left(1 + k/\sqrt{1+k^2}\right)^{1/2} - \left(1 - k/\sqrt{1+k^2}\right)^{1/2}\right]^2$$

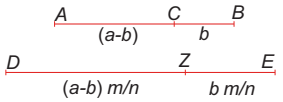
ya da $(u - v)^2/\sigma$ ifadesini belirlemektir. Bunun için x, y ve z büyüklükleri $x = u^2/\sigma$, $y = v^2/\sigma$ ve $z = (u \times v)/\sigma$ denklemlerini sağlamalıdır. Burada $(u^2 + v^2)$ ve $2(u \times v)$ ortalamalı alanlar olduğundan ortak bölünemez. Ayrıca $[\sigma \times (x + y)]$ ve $(\sigma \times 2z)$ ortalamalı ve ortak bölünemediğinden $(x + y)$ rasyonel ve σ ile ortak bölünemez. Keza $2z$ rasyoneldir ve σ ile ortak bölünemez. Şu halde $(x + y)$ ile $2z$ ortak bölünemez. Neticede $(x + y)$ ile $2z$ rasyonel olduğundan kareleri ortak bölünebilir ve $[(x + y) - (2z)]$ ifadesi bir *ayrılmış*tır. u^2 ile v^2 ya da $(\sigma \times x)$ ile $(\sigma \times y)$ ortak bölenli olmadığından x ile y de ortak bölünemez. Daha önce olduğu gibi $(x \times y) = z^2 = (2z^2)/4$ ifadesi geçerli ve *18. Önerme* gereği $[(x + y)^2 - (2z)^2]^{1/2}$ ile $(x + y)$ ortak bölenli değildir. Buna göre (x + y) ya da $2z$ ile σ ortak bölenli değildir. Buna göre $[(x + y) - (2z)]$ bir *altıncı ayrılmış*tır ve yapısı şüphesiz ki şu şekildedir: $(\rho^2\sqrt{\lambda}/\sigma)\left(1 - 1/\sqrt{1+k^2}\right)$.



Şekil 53-5- Burada $\rho = 3$; $k = 0{,}5$; $\lambda = 2/3$; $s = 1$; $AB = (u - v) = 0{,}881$; $BC = v = (\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2})\,(1 - k/\sqrt{1+k^2})^{1/2} = 1{,}425$; $AC = u = (\rho\lambda^{1/4}/\sqrt{2})\,(1 + k/\sqrt{1+k^2})^{1/2} = 2{,}306$; $x = u^2/\sigma = 5{,}317$; $y = v^2/\sigma = 2{,}031$; $(x + y) = 7{,}348$; $z = (u \times v)/s = 3{,}286$.

C. Önerme: Bir *ayrılmış*la uzunluğa göre ortak bölenli olan hat onunla aynı mertebeden bir *ayrılmış*tır.[1]

Burada *AC* hattının bir *ayrılmış* ve *DZ* hattının onunla uzunluğa göre ortak bölenli bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 54*). Eğer *AC* hattı *BC* hattıyla birleştirilirse ilk şekline dönüştürülmüş olur. Ayrıca *AC*/*BC* oranına eşit olan bir *DZ*/*EZ* oranı oluşturalım. Bu durumda eğer ($AB^2 - BC^2$) farkı *AB* ile ortak bölenli ya da ortak bölensiz olan hattın karesine eşitse, bu husus ($DE^2 - EZ^2$) farkı içinde geçerli olmalıdır. Buna göre *AB* ve *BC* hatlarının her biri *DE* ve *EZ* hatlarının her biriyle uygun olarak ortak bölenli olduğuna göre, eğer bunlardan biri boy ya da karesel yönden rasyonelse, diğeri de böyle olmak zorundadır. Böylece *AC* altı tür ayrılmıştan hangisine karşı düşüyorsa *DZ* hattı da aynı türden olmak zorundadır.



Şekil 54

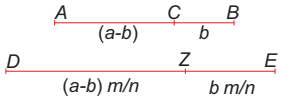
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *103. Önerme* olarak verilir. Bu ve bunu *104. Önerme*ye kadar izleyen önermeler *63* ila *67. Önerme*lere karşı düşer. Etrafı açıklanması gerekmeyen önerme eğer bir ρ hattından $\rho(m/n)$ hattı oluşturulursa, elde edilen irrasyonel hat türetildiği hatla aynı tür ve mertebeden olduğu anlamına gelir. Yukarıda tanımlanan çeşitli türden *ayrılmışlar* şunlardır:

a) *Birinci türden ayrılmış* (*82. Önerme*); $(a - b) = (k \times \rho)[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$,
b) *İkinci türden ayrılmış* (*83. Önerme*); $(a - b) = (k \times \rho)[(1/\sqrt{1 - \lambda^2}) - 1]$,
c) *Üçüncü türden ayrılmış* (*84. Önerme*); $(a - b) = (\rho \times m).(\sqrt{k})\,[1 - \sqrt{1 - \lambda^2}]$,
d) *Dördüncü türden ayrılmış* (*85. Önerme*); $(a - b) = (k \times \rho)[1 - 1/\sqrt{1 + \lambda}]$,
e) *Beşinci türden ayrılmış* (*86. Önerme*); $(a - b) = (k \times \rho)[\sqrt{1 + \lambda} - 1]$,
f) *Altıncı türden ayrılmış* (*87. Önerme*); $(a - b) = \rho(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda})$.

***CI. Önerme*: Bir *ortalamalı ayrılmış*la ortak bölenli hat aynı türden bir *ortalamalı ayrılmış*tır.[1]**

Söz konusu *ortalamalı ayrılmış* hattın *AC* ve bununla ortak böleli diğer hattın da *DZ* olduğunu varsayalım (*Şekil 54-1*). Eğer *AC* hattına *CB* eklenirse ilk şekline dönüşmüş olur. Ayrıca *AC*/*CB* oranına eşit olan *DZ*/*ZE* oranı kurulursa *AB* ve *BC* hatlarının her biri *DE* ve *ZE* hatlarının her biriyle uygun olarak ortak bölenli ve ortalamalı bir hale gelir.

Kanıtı: *AB* ve *BC* ortak bölenli olmadığına göre, *DE* ve *ZE* hatları da ortak bölenli değildir. Yukarıdaki orana toplam kuralı uygulanır, pay ve payda payla çarpılırsa $AB^2/(AB \times BC) = DE^2/(DE \times ZE)$ ya da $AB^2/DE^2 = (AB \times BC)/(DE \times ZE)$ elde edilir. İki karesel sayının oranı nedeniyle $(AB \times BC)$ ve $(DE \times ZE)$ ortak bölenlidir. Burada birinci çarpımın rasyonel ya da ortalamalı olmasına göre ikinci çarpım da rasyonel ya da ortalamalıdır. Buna göre *AC* iki tür ortalamalının hangi türündense *DE* de aynı türdendir.



Şekil 54-1

***CII. Önerme*: Bir *küçük* (*Minör*) hatla ortak bölenli bir hattın kendisi de *küçük*tür.[2]**

Bir *küçük A* hattının ve onunla ortak bölenli bir *B* hattının verildiğini varsayalım (*Şekil 55*). Rasyonel *CD* hattı üzerinde bu hatların karelerine eşit iki alan kuralım. *XCI Önerme* gereği bir alanın kenarlarından biri rasyonel diğeri bir *dördüncü ayrılmış* olur. Bu alana eşit karenin karekökü bir *küçük* ya da *minör* olması gerektiğinden, $DE = A^2$ alanının eni *CZ* de bir *dördüncü ayrılmış* olmak zorundadır. Bu husus *A* hattıyla ortak bölenli *B* hattı karesine eşit $DZ = B^2$ alanının eni *CZ* hattı için de geçerli olduğundan *DZ* alanı kökü *B* hattı bir *küçük* (*minör*)'dür.

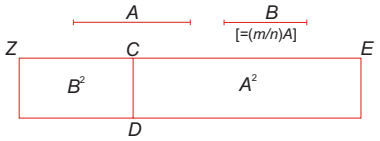
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *104. Önerme* olarak verilir. Daha önceki önermelerde iki tür *ortalamalı ayrılmış* tanımlanmıştır:

a) *Birinci türden ortalamalı ayrılmış* (*89. Önerme*); $(a-b) = \rho\sqrt{k\left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1\right]}$,

b) *İkinci türden ortalamalı ayrılmış* (*90. Önerme*); $(a-b) = \rho\sqrt{\sqrt{k}[1 - \sqrt{1-\lambda^2}]}$.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *105. Önerme* olarak verilir.



Şekil 55- Burada $A = \rho\sqrt{k/2}\left[\sqrt{(1+\sqrt{\lambda/(1+\lambda)})} - \sqrt{(1-\sqrt{\lambda/(1+\lambda)})}\right]$ *küçük* (*minör*);

$A^2 = (k \times \rho^2)[1 - 1/\sqrt{1+\lambda}]$;

$CD = \rho^2[1 - 1/\sqrt{1+\lambda}]$; $B^2 = (m/n)^2 A^2$; $B = (m/n)$ *A küçük* (*minör*)'dür (örnek değerlendirilmemiştir).

***CIII. Önerme:* Bir *rasyonel*le birleşerek toplamı ortak bölenli *ortalamalı* bir hat oluşturan hattın kendisi de aynı türdendir.[1]**

Bu önermenin açıklaması ve şekli tıpkı *CII. Önerme*de olduğu gibidir. Ancak bu durumda *XCII Önerme*den yararlanmak gerekir.

***CIV. Önerme*: Bir *ortalamalıyla birleşerek toplamı bir ortalamalı* olan ortak bölenli hattın kendisi de aynı türdendir.[2]**

Bu önermenin açıklaması ve şekli de *CII. Önerme*de olduğu gibidir. Ancak bu durumda *XCIII Önerme*den yararlanmak gerekir.

Açıklama: Son beş önerme, *iki adlılar*ın kanıtlanmasında kullanılan yöntemden yararlanmak suretiyle de kanıtlanabilir. Benzer şekilde önermeler, bu altı hat ancak kareleri alındığında *iki adlı*larla ortak bölenli olmaları halinde de, aynı şekilde kanıtlanabilir.

***CV. Önerme*: Bir *rasyonel* ile *ortalamalı* alan farkına eşit bir dörtgen alanının karekökü ya *ayrılmış* ya da *küçük* bir hattır.[3]**

Rasyonel alanın *AB*, ortalamalı alanın *AD* ve fark alanın *CB* olarak verildiğini varsayalım (*Şekil 56*). Rasyonel bir *EK* hattı üzerinde *ZK* = *AB*

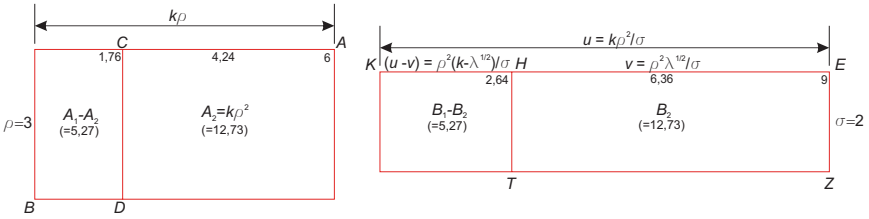
---

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *106. Önerme* olarak verilir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *107. Önerme* olarak verilir.

3 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *108. Önerme* olarak verilir. Burada rasyonel alan $k\rho^2$ ve ortalamalı alan $\sqrt{\lambda}\rho^2$ olarak verildiğine göre farklı k ve λ ilişkilerine göre $(k\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2)^{1/2}$ ifadesi sınıflandırılmak istenir. Eğer $(\sigma \times u) = k\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \sqrt{\lambda}\rho^2$ olarak tanımlanırsa $(\sigma \times u)$ rasyonel ve $(\sigma \times v)$ *ortalamalı*, u rasyonel ve σ ile ortak bölenlidir, ancak v rasyonel ancak σ ile ortak bölenli değildir. Buna göre u ile v ortak bölenli değildir. Buna karşın kareleri ortak bölenli olduğundan $(u - v)$ bir ayrılmıştır. Buna göre iki farklı durum oluşabilir: (1) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli, (2) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli değildir. Ancak her iki durumda u ile σ ortak bölenli olduğundan $(u - v)$ ifadesi (1) durumunda bir *birinci ayrılmış*, (2) durumunda *dördüncü ayrılmış*tır. Bu durumda (1) halinde *88. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u-v)}$ bir *ayrılmış* ve (2) halinde *91. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u-v)}$ bir *irrasyonel küçük* hattır.

ve *ZH* = *AD* alanlarını oluşturalım. Bu durumda *EK* hattının uzunluğu, *EH* hattının ise karesi rasyoneldir. Eğer (EK^2 - EH^2) farkı *EK* ile ortak bölenli olan hattın karesine eşitse, bu durumda *HK birinci ayrılmış* ve *TK* alanına eşit dörtgen alanının kökü bir *ayrılmış* olur. Buna karşın eğer (EK^2 - EH^2) farkı *EK* ile ortak bölenli olmayan hattın karesine eşitse, bu durumda *HK dördüncü ayrılmış* ve *TK* alanına eşit dörtgen alanının kökü bir *küçük* olur.

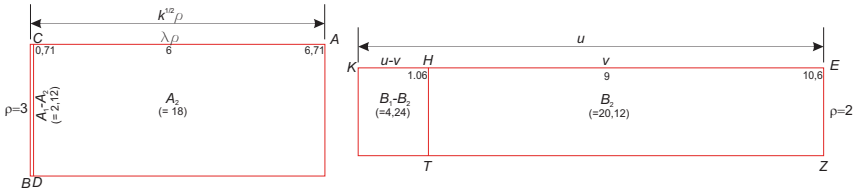


Şekil 56- Burada k =2; ρ = 3; λ = 2, s = 2; *Rasyonel* alan $A_1 = AB = k\rho^2 = 18$; *Ortalamalı* alan $A_2 = AD = \sqrt{\lambda}\rho^2 \cong 12{,}73$; $(A_1 - A_2) = \rho^2(k - \sqrt{\lambda}) \cong 5{,}27$; $\sqrt{(A_1 - A_2} \cong 2{,}3$; $u = k\rho^2/s = 9$; $v = \sqrt{\lambda}\rho^2/s \cong 6{,}365$; $(u - v) = (\rho^2/s)(k - \sqrt{\lambda}) \cong 2{,}635$ (k ve λ değerine göre birinci ya da dördüncü ayrılmış).

***CVI. Önerme*: Bir *ortalamalı* ile *rasyonel* alan farkına eşit bir dörtgen alanının karekökü ya *birinci ayrılmış ortalamalı* ya da *rasyonelle birleşik toplamı ortalamalı* bir hattır.**[1]

Bu önermenin kanıtı ve şekli önceki önermede olduğu gibidir. Ancak bu durumda *AB* hattı ortalamalı *EH* hattının uzunluğu ve *EK* hattının karesi rasyonel, *HK* ise ya bir *ikinci ayrılmış* ya da *beşinci ayrılmış* hattır. Bu durumda *BC* alanına eşit karenin karekökü, ancak önermede belirtilen özellikli büyüklüklerden biri olabilir.

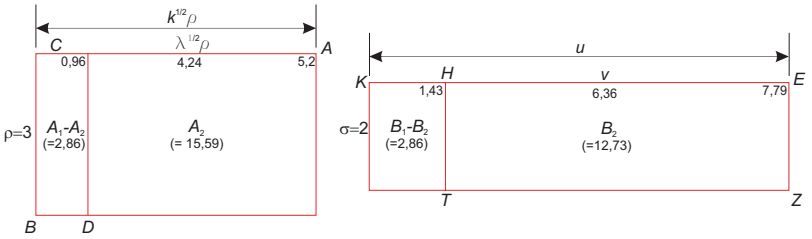
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *109. Önerme* olarak verilir. Bu durumda $(\sqrt{k}\rho^2 - \lambda\rho^2)^{1/2}$ ifadesi sınıflandırılmak istenir. Eğer $(\sigma \times u) = \sqrt{k}\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \lambda\rho^2$ olarak tanımlanırsa ($\sigma \times u$) *ortalamalı* ve ($\sigma \times v$) rasyonel, u rasyonel ve σ ile ortak bölenli değildir, ancak v rasyonel ancak σ ile ortak bölenlidir. Buna göre u ile v rasyonel kareleri ortak bölenli olduğundan (u - v) bir *ayrılmış*tır. Buna göre: (1) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli, (2) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli olmayabilir. Ancak her iki durumda v ile σ ortak bölenli olduğundan (u - v) ifadesi (1) durumunda bir *ikinci ayrılmış*, (2) durumunda *bir beşinci ayrılmış*tır. Bu durumda (1) halinde *89. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u - v)}$ *ortalamalı* hattın birinci *ayrılmış*ı ve (2) halinde *92. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u - v)}$ bir *ortalamalı* eksi rasyonel alanın kenar hattına karşı düşer.



Şekil 56-1- Burada k =5; ρ = 3; λ = 2, s = 2; *Ortalamalı* alan $A_1 = AB = \sqrt{k}\rho^2 \cong 20{,}12$; *Rasyonel* alan $A_2 = AD = \lambda\rho^2 = 18$; $(A_1 - A_2) = \rho^2(\sqrt{k} - \lambda) \cong 2{,}12$; $\sqrt{(A_1 - A_2} \cong 1{,}46$; $u = \sqrt{k}\rho^2/s \cong 10{,}06$; $v = \lambda\rho^2/s = 9$; $(u - v) = (\rho^2/s)(k - \sqrt{\lambda}) \cong 1{,}06$ (k ve λ değerine göre *ortalamalı birinci ayrılmış* ya da *rasyonelle birleşik toplamı ortalamalı* hat).

***CVII. Önerme*: Ortak bölünemeyen iki *ortalamalı* alanın farkına eşit bir dörtgen alanın karekökü ya bir *ikinci ayrılmış* ya da *ortalamalı bir hatla birleşerek toplamı ortalamalı* olan bir hattır.[1]**

Önermenin kanıtı ve şekli önceki önermedeki gibidir. Burada *EH* ve *HK* ancak karesel rasyonel ve uzunluğa göre ortak bölensizdir. Şu halde *HK* ya *üçüncü ayrılmış* ya da bir *altıncı ayrılmış*tır. Bu durumda *BC* alanına eşit karenin karekökü öngörüldüğü gibi, ancak önermede belirtilen özellikli büyüklüklerden biri olabilir.



Şekil 56-2- Burada ρ = 3; k =3; λ = 2, s = 2; *Ortalamalı* alan $A_1 = AB = \sqrt{k}\rho^2 \cong 15{,}59$; *Ortalamalı* alan $A_2 = AD = \sqrt{\lambda}\rho^2 \cong 12{,}73$; $(A_1 - A_2) = \rho^2(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) \cong 2{,}86$; $\sqrt{(A_1 - A_2} \cong 1{,}69$; $u = \sqrt{k}\rho^2/s \cong 7{,}79$; $v = \sqrt{\lambda}\rho^2/s \cong 6{,}36$; $(u - v) = (\rho^2/s)(\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}) \cong 1{,}43$ (k ve λ değerine göre *ortalamalı birinci ayrılmış* ya da *rasyonelle birleşik toplamı ortalamalı* hat).

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *110. Önerme* olarak verilir. Bu durumda ortak bölensiz $\sqrt{k}\rho^2$ ile $\sqrt{\lambda}\rho^2$ hatlardan oluşan $(\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2)^{1/2}$ ifadesi sınıflandırılmak istenir. Eğer $(\sigma \times u) = \sqrt{k}\rho^2$ ve $(\sigma \times v) = \sqrt{\lambda}\rho^2$ olarak tanımlanırsa, u ve v rasyonel ve σ ile ortak bölenli olmadığından u ile v ortak bölenli değildir. Ancak u ve v rasyonel ve kareleri ortak bölenli olduğundan $(u - v)$ bir *ayrılmış*tır. Buna göre: (1) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli, (2) $\sqrt{u^2 - v^2}$ ile u ortak bölenli olmayabilir. Ancak her iki durumda u ve v ile σ ortak bölenli değildir. Buna göre (1) durumunda $(u - v)$ bir *üçüncü ayrılmış*, (2) durumunda ise $(u - v)$ *bir altıncı ayrılmış*tır. Bu durumda (1) halinde *90. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u - v)}$ bir *ortalamalı ikinci ayrılmış*ına ve (2) halinde *93. Önerme* gereği $\sqrt{\sigma(u - v)}$ bir *ortalamalı* iki alan farkının kenar hattına karşı düşer.

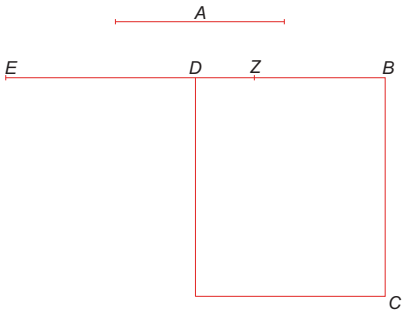
***Numarasız Önerme*: Birim altı tür ayrılmış hattan hiçbiri olamaz.**

Rasyonel hat üzerine kurulan ortalamalı karesine eşit alanın eni karesi rasyonel olması gerektiğinden ortalamalı hat birimden ne önce ne de sonra bulunamaz. Aksi halde bu hatların karelerine eşit olan alanların enleri farklı ayrılmışlardan oluşur. Ne var ki birim bu enlerin hiçbirinden olamaz. Önermede öngörüldüğü gibi farklı enlerin alınmasına neden olan hatlar da aynı türden olmak zorundadır.

***CVIII. Önerme*: *Ayrılmış* bir *iki adlı* olamaz.**[1]

Aksine bir an *A* hattının hem *ayrılmış* hem de bir *iki adlı* bir hat olduğunu varsayalım (*Şekil 57*). Rasyonel bir *BC* hattı üzerinde *A* hattının karesine eşit bir $CD = A^2$ alanını oluşturalım. Ancak *A* hattı varsayım gereği bir *iki adlı* olduğundan bu alanın eni *BD* bir *birinci iki adlı*dır. Ne var ki *A* ayrıca bir *ayrılmış* olduğundan *BD* aynı zamanda bir *birinci ayrılmış*tır. Bir an *BD* hattının *Z* noktasında kendi *iki adlısı*na bölündüğünü ve *ZD* < *ZB* olduğunu varsayalım. Buna göre *ZB* hattı uzunluğa göre rasyonel, *ZD* hattının ise sadece karesi rasyoneldir. Bu durumda *BD* ile birleşerek onu eski haline getiren hattın *DE* olduğunu varsayalım. Şu halde *BD* uzunluğa göre rasyonel, *DE* hattının ise sadece karesi rasyonel olduğundan *ZE* uzunluğa göre rasyoneldir. Neticede (*ZE* + *ZD*) ve (*ZE* + *DE*) hatlarının sadece karesi rasyonel olduğundan *DE* ve *DZ* birer *ayrılmış*tır. Ancak bunların kareleri rasyonel olduğundan önergede öngörüldüğü gibi elde edilen bu sonuç yanlıştır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *111. Önerme* olarak verilir. Önerme özetle ($\sqrt{x} + \sqrt{y}$) ifadesinin ($\sqrt{x'} - \sqrt{y'}$) ifadesine ya da ($x + \sqrt{y}$) ifadesinin ($x' - \sqrt{y'}$) ifadesine eşit olamayacağı anlamına gelir. Eğer $\rho + \sqrt{k}\rho$ ve $\rho' - \sqrt{k\lambda}\rho'$ ifadeleri ele alınır ve bu ifadelerin karelerinden oluşan $(\rho + \sqrt{k}\rho)^2/\sigma$ ve $(\rho' - \sqrt{\lambda}\rho')^2/\sigma$ hatlarının eşit olma koşulu yazılırsa (1) $\rho^2/\sigma[1 + k + 2\sqrt{k}] = \rho'^2/\sigma[1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}]$ elde edilir. Ancak $\rho^2/\sigma\,(1 + k)$ ve $\rho'^2/\sigma\,(1 + \lambda)$ rasyonel ve ortak bölenli olduğundan $[\rho'^2/\sigma\,(1 + \lambda) - \rho^2/\sigma\,(1 + k)]$ ile $\rho'^2/\sigma\,(1 + \lambda)$ ortak bölenli ancak $\rho^2 2\sqrt{k}/\sigma$ ile ortak bölenli değildir. Ne var ki iki taraf rasyonel olduğundan $[\rho'^2/\sigma\,(1 + \lambda) - \rho^2/\sigma\,(1 + k)] - (\rho^2/\sigma).\,2\sqrt{k}$ bir *ayrılmış*tır. Ayrıca (1) nedeniyle bu ifade rasyonel $(\rho'^2/\sigma).2\sqrt{\lambda}$ ilişkisine eşittir. Neticede irrasyonel bir *ayrılmış*ın rasyonel olduğu kanıtlanmış olur ki bu mümkün değildir. Aynı yöntem diğer ifadeye de uygulanabilir.

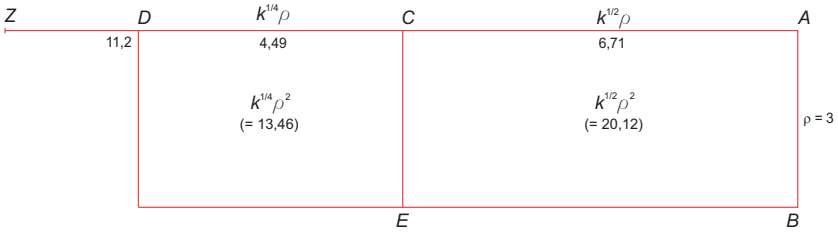


Şekil 57- Burada $A = \rho(1 + \sqrt{k}) = \rho'(1 - \sqrt{\lambda})$ olamayacağı gösterilmek istenmektedir. Eğer $CD = A^2 = \rho^2(1 + \sqrt{k})^2 = \rho'^2(1 - \sqrt{\lambda})^2$ alınırsa bu $DB = \rho^2/\sigma[1 + k + 2\sqrt{k}] = \rho'^2/\sigma[1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}]$ ya da $[\rho'^2/\sigma\ (1 + \lambda) - \rho^2/\sigma\ (1 + k)] - (\rho^2/\sigma).2\sqrt{k} = (\rho'^2/\sigma).\ 2\sqrt{\lambda}$ yazılabilir. Buna göre önerme irrasyonel bir ayrılmışın rasyonel olması gerektiği çelişkisi nedeniyle olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***CIX. Önerme*: *Ortalamalı* bir hattan, hiçbiri kendinden önceki türe eşit olmayan, sonsuz sayıda irrasyonel hat türetilebilir.**[1]

Rasyonel *AB* (= ρ) hattına, sonsuz uzunlukta bir *AZ* diki çekildiğini ve *ortalamalı AC* (= $\sqrt{k}$) hattının bu *AZ* hattı üzerinde bulunduğunu varsayalım (*Şekil 58*). Burada *AE* alanının eni *AC ortalamalı* olduğundan *AE* alanı rasyonel değildir. Bu durumda *AE* alanına eşit karenin kökü *CD* (= $k^{1/4}$) olduğu varsayılan *ortalamalı CD* hattı, rasyonel *AC* hattıyla aynı türden değildir. Şimdi *AE* alanıyla aynı türden olmayan bir *ED* alanı kurulur. Bu durumda kurulan *ED* alanı, ne *CD* alanına eşit karenin kökü ve ne de *AD* hattı cinsinden olur. Eğer aynı yöntem uygulanarak *DZ* hattından bunun gibi yeni hatlar ayrılırsa, önermede öngörüldüğü gibi *AZ* hattı üzerinde sonsuz sayıda değişik türden hat elde edilebilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *111. Önerme*nin sonunda verilir.



Şekil 58 – Burada $\rho = 3$; $k = 5$; $AC = \rho\sqrt{k} \cong 6{,}71$; $DC = \rho k^{1/4} \cong 4{,}49$; $AD = \rho(\sqrt{k} + k^{1/4}) \cong 11{,}2$.

10. makale sona erdi.

ON BİRİNCİ MAKALE
KATI CİSİMLER (MÜCESSİMÂT)

41 önermeden oluşan Katı Cisimler Geometrisinde Haccâc ve Sâbit arasında fark yoktur.

TANIMLAR

***Cisim* (*mücessem şekil*):** Uzunluğu, eni ve derinliği olan ve bir yüzeyle sonlanan şekildir.

***Düzlem* (*müstevî satıh*):** Eğer bir düzlemden öyle bir hat kaldırılır ve bu hat o düzlem üzerinde onunla kesişen her bir hatla bir dik açı oluşturursa, bu durumda söz konusu satıh diktir. Eğer düzlem yüzey üzerinde öyle bir düzlem satıh kaldırılır, bu iki sathın kesişme hattı üzerinde bir noktadan söz konusu satıhlara dikler indirildiğinde aralarındaki kalan açı bir dik açı oluşturursa, bu iki düzlem birbirine diktir.

***Paralel yüzeyler*:** Sonsuz olarak uzatılsalar bile ne birbiriyle kesişen ne de temas eden yüzeylere paralel yüzeyler denir.

***Benzer ve eşit cisimler*:** Benzer ya da eşit yüzeylerle çevrelenen ya da oluşturulan cisimlere denir.

***Prizma*:** Üç paralelkenar ve iki üçgenle çevrelenen şekle denir.

***Küre*:** Bir yarım dairenin çapı çevresi etrafında dönerek ilk noktaya ulaşması sonucunda oluşan cisimdir. Merkezi yarım daire merkeziyle çakışır.

***Piramit*:** Bir düzlemle onun karşısındaki bir noktaya kaldırılan düzlemlerden oluşan bir cisimdir.

***Silindir*:** İki eşit dairesel tabanı bulunan bir cisimdir. Dik açılı bir paralelkenarın kenarlarından biri sabitlenerek silindir tabanları boyunca ve ilk noktaya gelinceye kadar sarılarak döndürülür. Sabit kenara silindirin doğuranı denir.

***Koni*:** Bir dik açılı üçgenin dik açıya komşu taraflardan biri sabitlenir ve koni bu üçgenin ilk konuma gelinceye kadar sabit kenar etrafında çevrilerek elde edilir. Bu üçgen kenarı koninin doğuranıdır. Eğer dik açının diğer kenarı sabit kenara eşitse tepe açısı dik bir koni elde edilir. Koninin tabanı daireseldir. Koniye dairesel piramit de denir.

***Cisimsel açı*:** Aynı düzlemde olmayan, ikiden çok aynı noktada buluşan açıdan oluşur.

***Benzer silindirler*:** Doğurtanların oranı tabanlarının yarıçaplarıyla orantılı olan silindirlerdir.

Not: Burada verilenler tanımlar dışında aşağıdaki *koyutlar*ın (*aksiyom*ların) da kaydedilmesi gerekir:

1- Verilen herhangi bir hattan tek bir düzlem geçirilebilir.

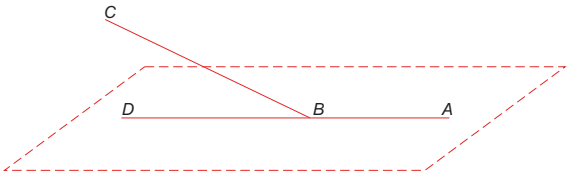
2- Herhangi bir doğru ve onun üzerinde olmayan bir noktadan tek bir düzlem geçirilebilir.

3- İki eşit düzlem bir cisimle çevrelenemez.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Bir doğrunun bir kısmı düzlem üzerinde diğer kısmı dışında bulunamaz.**

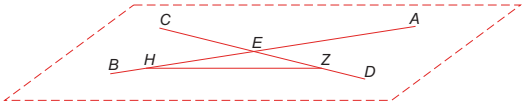
Bir an aksini düşünelim ve *ABC* doğrusunun *AB* kısmının düzlem üzerinde ve *BC* kısmının düzlem dışında olduğunu varsayalım (*Şekil 1*). Bu durumda düzlem üzerinde *AB* ile aynı yönde olan herhangi bir hat çekebiliriz. *AB* parçasını *D* noktasına kadar uzatalım. Bu durumda *ABC* hattıyla *ABD* hattı eşleşir. Bu ise kabul gereği yanlış olduğundan önermenin hükmü kanıtlanmış olur.



Şekil 1

***II. Önerme*: İki kesişen hat ve bu hatlardan oluşan tüm üçgenler hatların tanımladığı düzlem üzerindedir.**

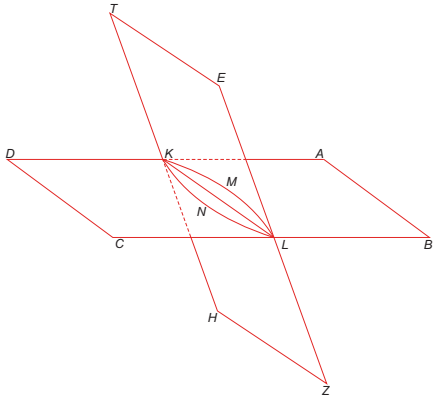
AB ve *CD* hatlarının *E* noktasında kesiştiklerini varsayalım (*Şekil 2*). Bu iki hat üzerinde bulunan *H* ve *Z* noktalarını birleştiren *HZ* hattını çekelim. Bu durumda *EHZ* üçgenin hatların tanımladığı düzlem üzerinde olması gerekir. Aksi halde onun bir kısmı düzlem üzerinde, diğer kısmı ise başka düzlem üzerinde olması gerekir. Bu ise önermeye göre yanlış olduğundan üçgeni oluşturan tüm hatlar önermenin öngördüğü gibi hatların tanımladığı düzlem üzerinde bulunur.



Şekil 2

***III. Önerme*: İki düzlem ancak bir hat boyunca kesişir.**

ABCD ve *EZHT* düzlemlerinin *AD* ve *TH* kenarları *K* noktasında, *BC* ve *EZ* kenarları ise *L* noktasında kesişir, *K* ve *L* noktalarını birleştiren hattın her iki düzlemde farklı olduğunu, bunlardan birinin *KML*, diğerinin ise *KNL* olduğunu varsayalım (*Şekil 3*). Bunların her ikisi düzdür ve iki yerde karşılaşmışlar ve bir yüzeyle çevrelenmişlerdir ki bu yanlıştır. Çünkü her iki hat aynı *K* ve *L* noktalarından geçer ve aynı alanı çevreler. Buna göre *KL* hattı önermenin öngördüğü gibi her iki satıhta aynı ve ortaktır.

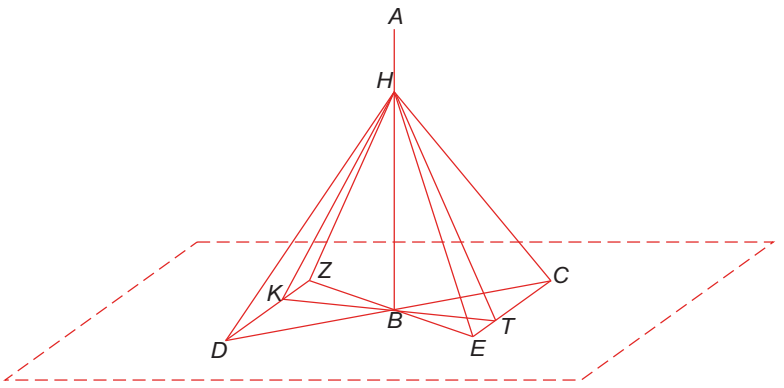


Şekil 3

Not: Önerme şu şekilde de ifade edilebilir; *K* ve *L* noktaları *ABCD* düzlemi üzerindedir. Bir düzlem üzerindeki iki nokta bir hatla birleştirilebildiği için *K* ve *L* noktalarından geçen bir hat çekilebilir. Aynı şekilde *K* ve *L* noktaları *EZHT* düzlemi üzerinde bulunur. Buna göre iki noktayı birleştiren ancak bir hat bulunduğundan *KNL* ve *KML* hatları eşdeğerdir.

***IV. Önerme*: İki hattın kesişme noktasından hatlara çekilen dik, iki hattın tanımladığı düzleme diktir.**

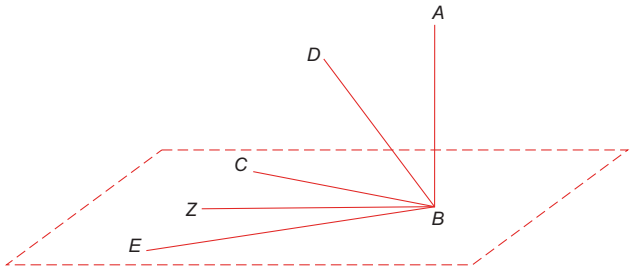
CD ve *EZ* hatlarının *B* noktasında kesiştiğini ve *BA* hattının bunlara dik olduğunu varsayalım (*Şekil 4*). Hatlar üzerinde *B* noktasından birbirine eşit olan *BC*, *BE*, *BD* ve *BZ* hatlarını ayıralım. Bu hatların diğer uçlarını *BA* diki üzerindeki herhangi bir *H* noktasına *CH*, *EH*, *DH* ve *ZH* şeklinde birleştirelim. Bu durumda uygun kenar ve açıları eşit olan dört üçgen oluşur. Bunlar arasında $\Delta(CBE) = \Delta(ZDB)$ ve $\Delta(HCE) = \Delta(HZD)$ olduğu açıkça görülür. Sonra *CD* ve *EZ* hatları düzleminde *B* noktasından geçen herhangi bir *TBK* hattını ve *TH* ile *KH* hatlarını çekelim. Bu durumda *BCT* ve *BDK* üçgenlerinde, $\angle(KBD) = \angle(CBT)$, $\angle(BCT) = \angle(BDK)$ ve $BC = BD$ olduğundan, *CT* ve *TB* kenarları uygun olarak *DK* ve *KB* kenarlarına eşittir. Benzer şekilde *HCT* ve *HKK* üçgenlerinde, $HC = HD$, $CT = KD$ ve , $\angle(HCT) = \angle(HDK)$ olduğundan $HT = HK$ ve neticede tüm tarafları uygun olarak eşit olduğundan, *HTB* ve *HKB* üçgenleri de eşittir. Şu halde $\angle(HBT) = \angle(HBK) = 90°$, *KBT* hattı *EZ* ve *CD* hatlarının kesişme noktasından geçen herhangi bir hattır. Bu hat *BA* hattına dik olduğundan, önerme kanıtlanmış olur.



Şekil 4

***V. Önerme*: Eğer bir noktada kesişen üç hattın kesişme noktasında hatların tümüne dik bir hat çekilebiliyorsa, bu üç hat bir düzlem üzerindedir.**

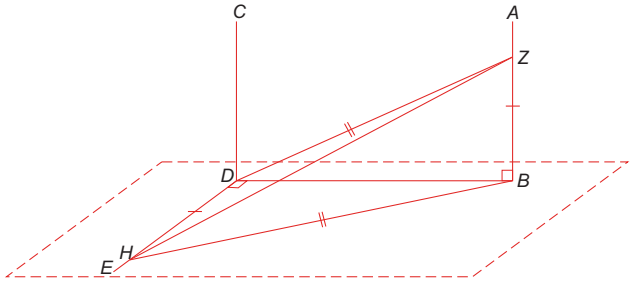
Bir *B* noktasında kesişen *BC*, *BD* ve *BE* hatlarının tümüne dik bir *BA* hattının bulunduğunu varsayalım (*Şekil 5*). Bir an bu üç hattın aynı düzlem üzerinde bulunmadığını ve *BD* hattının *BC* ve *BE* hatları düzleminin dışında bulunduğunu varsayalım. Bu durumda *BA* ve *BD* hatlarının düzlemi *BC* ve *BE* hatları düzlemine paralel değildir. Bu iki düzlemin *BZ* hattı boyunca kesiştiğini varsayalım. Bu durumda *ABD* ve *ABZ* açılarının her ikisinin de dik olması gerekir. Bu ise varsayım gereği yanlış olduğundan önermenin hükmü geçerlidir.



Şekil 5

***VI. Önerme*: Aynı düzleme dik iki hat birbirine paraleldir.**

Verilen *AB* ve *CD*, aynı düzlemi *B* ve *D* noktalarında dik kesen iki hattır (*Şekil 6*). *CD* doğrusuna dik bu düzlemde *BD* hattını ve bu hatta dik *DE* hattını çekelim. Düzleme dik *AB* hattı üzerinde herhangi bir *Z* noktası alarak *DE* hattı üzerinde *DH* = *ZB* hattını ayıralım ve sonra *ZD*, *ZH* ve *BH* hatlarını çekelim. *ZB* = *DH*, *BD* kenarı ortak ve ∠(*ZBD*) = ∠(*HDB*) = 90° olduğundan Δ(*ZBD*) ve Δ(*HDB*) dik üçgenleri eşittir.

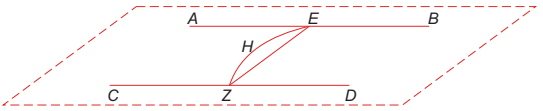


Şekil 6

Buna göre aynı şekilde $HB = ED$, ZH kenarı müşterek $\angle(ZDH) = \angle(ZBH) = 90°$ olduğundan $\Delta(ZDH)$ ve $\Delta(ZBH)$ dik üçgenleri de eşittir. Şu halde ED hattı DB, DZ ve DC hatlarına dik olduğundan bu hatların üçü de bir düzlemdedir. BZA hattı, keza AB ve CD hatları da aynı düzlem üzerindedir ve BD hattı bu iki hatlarla kesişir. Şu halde BD hattına iki ucundan dik AB ve CD hatları, önermede öngörüldüğü gibi birbirine paralel iki hattır.

***VII. Önerme*: İki paralel hattı birleştiren herhangi bir hat, paralel hatların tanımladığı düzlemde bulunur.**

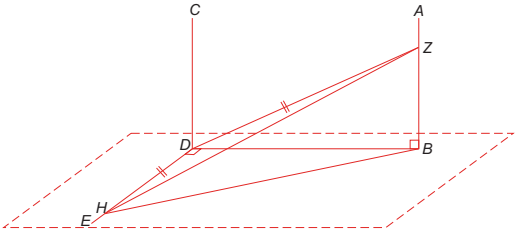
Birbirine paralel AB ve CD hatlarını herhangi bir EZ hattıyla birleştirelim (*Şekil 7*). Bir an aksini düşünerek verilen hatların düzleminde başka bir EHZ hattının daha bulunduğunu varsayalım. Bu durumda koşul gereği EZ ve EHZ hatlarının ikisinin de birer doğru hat olması gerektiğinden bu yanlıştır. Böylece önerme hükmü, olmayana ergi yöntemiyle, kanıtlanmış olur.



Şekil 7

***VIII. Önerme*: Eğer iki paralel hattan biri herhangi bir düzleme dikse, bu durumda diğer hat da bu düzleme diktir.**

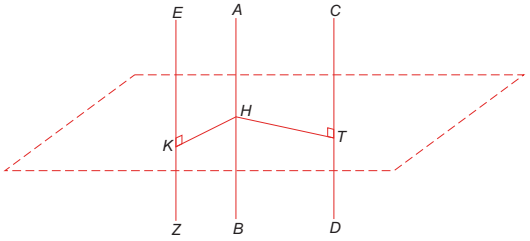
Bir birine paralel olan AB ve CD hatlarından AB hattı herhangi bir düzleme diktir (*Şekil 8*). Önemeyi kanıtlamak için düzlem üzerindeki BD hattı ve ona dik olan DE hattı çekilir. Sonra AB hattı üzerinde herhangi bir Z noktası alınır ve $DH = DZ$ mesafesi alınır, DZ, ZH ve BH hatları çekilir. *VI. Önerme*'de gösterdiğimiz gibi HDZ açısı diktir. Bu durumda ED hattı DB ve DZ hatlarının düzlemine diktir. Şu halde CD hattı da önermede öngörüldüğü gibi DE ve DB hatlarının düzlemine diktir.



Şekil 8

***IX. Önerme*: Herhangi bir hatta paralel olan tüm hatlar aynı düzlemde olmasalar da birbirlerine paraleldirler.**

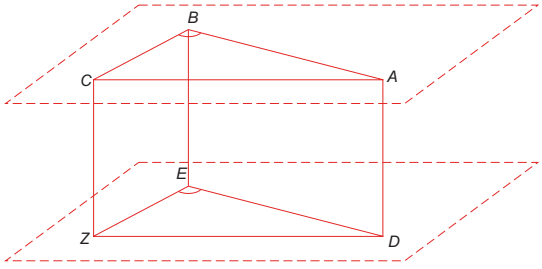
CD ve *EZ* hatları *AB* hattına paraleldir, lakin bu üç hat aynı düzlem üzerinde değildir (*Şekil 9*). Önermeyi kanıtlamak için *AB* hattı üzerindeki bir *H* noktasından diğer iki hatta *HT* ve *HK* diklerini çekelim. Bu durumda *CT* ve *EK* hatları, birbirleriyle kesişen *HT* ve *HK* hatlarının tanımladığı düzleme dik olur. Şu halde *CD* ve *EZ* hatları da aynı düzleme dik olduklarından önermenin öngördüğü gibi birbirlerine paraleldir.



Şekil 9

***X. Önerme*: Kenarları aynı düzlemde olmayan iki açının kenarları uygun olarak paralelse, açıları da eşittir.**

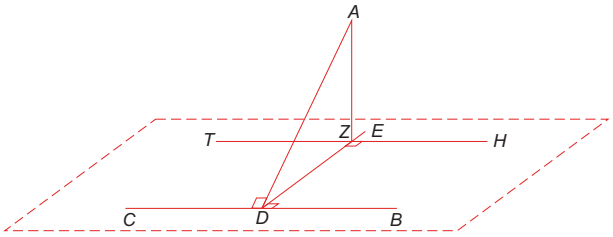
Aynı düzlemde olmayan *B* ve *E* açılarının kenarları uygun olarak paraleldir (*Şekil 10*). Önermeyi kanıtlamak için *ED* kenarına eşit *BA* ve *EZ* kenarına eşit *BC* hatları ayrılır ve *AC*, *DZ*, *BE*, *AD* ve *CZ* hatları çekilir. *AD* ve *CZ* hatları *BH* hattına hem paralel, hem de eşit olduğundan *AD* hattı *CZ* hattına eşit ve paraleldir. Bu nedenden *ABC* üçgeni *DEZ* üçgenine eşit olduğundan önermenin öngördüğü gibi *B* açısı da *E* açısına eşittir.



Şekil 10

***XI. Önerme*: Bir düzlem üzerinde olmayan herhangi bir noktadan bir düzleme dik inmek.**

Örneğin *A* noktasından, üzerinde *BC* hattı bulunan bir düzleme dik inmek isteyelim (*Şekil 11*). İlkin A noktasından *BC* hattına *AD* diki inilir. Daha sonra düzlem üzerinde *D* noktasından *BC* hattına dik çekilir. Nihayet *A* noktasından *DZ* hattına dik olan *AZ* hattı çekilir, *AZ* hattı önermede çekilmesi istenen diktir.

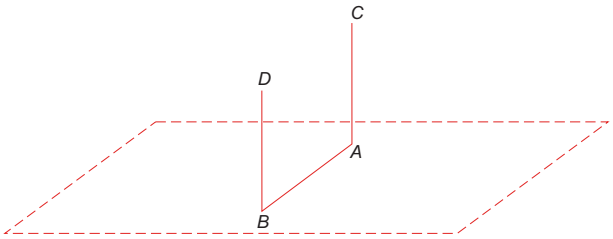


Şekil 11

Kanıtı: *Z* noktasında, verilen düzlemde olma koşuluyla *BC* hattına paralel olan *TZH* hattı çekilir. *BC* hattı *DA* ve *DZ* hatlarına dik olduğundan *ADZ* üçgeni düzlemine de diktir. *HT* hattı *BC* hattına paralel olduğundan *HT* hattı da *ADZ* düzlemine diktir. Böylece *AZ* hattı *ED* ve *HT* hatlarına dik olduğundan önermenin öngördüğü gibi verilen düzleme de diktir.

***XII. Önerme*: Verilen bir düzlem noktasından düzleme bir dik çekilmesi.**

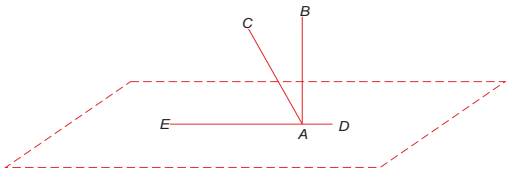
Eğer *A* düzlem üzerinde verilen bir noktaysa, ilkin düzlem üzerinde olmayan bir *D* noktasından *XI. Önerme* gereği *DB* diki inilir (*Şekil 12*). Eğer bu hat *A* noktasından geçerse istenen dik elde edilmiş olur. Aksi halde *A* noktasından *BD* hattına paralel *AC* hattı çekilir ve önermede öngörülen dik hat elde edilir.



Şekil 12

***XIII. Önerme*: Verilen bir düzlem noktasından düzleme sadece bir dik çekilebilir.**

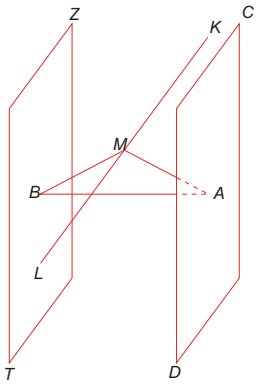
Bir an aksini düşünerek *A* noktasından düzleme *AB* ve *AC* diklerinin çekilebildiğini varsayalım (*Şekil 13*). Bu iki dikin oluşturduğu düzlemle verilen düzlemin kesişme hattının *DE* olduğunu varsayalım. Bu durumda arakesit düzleminde *CAD* ve *BAD* açılarının her biri 90° olması gerekir ki bu yanlış olduğundan önermede önerilen hükmün doğru olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 13

***XIV. Önerme*: Eğer bir hat herhangi iki düzleme dikse, bu durumda düzlemler birbirlerine paraleldir.**

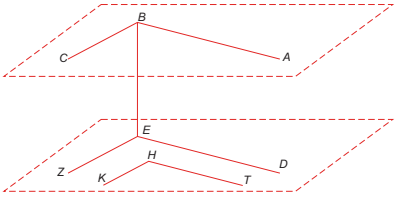
CD ve *ZT* düzlemlerinin *AB* hattına dik olduklarını varsayalım (*Şekil 14*). Bir an aksini düşünerek bu düzlemleri *KL* hattı boyunca kesişene denk uzattığımızı varsayalım. *KL* hattı üzerindeki bir *M* noktasını *A* ve *B* noktalarıyla birleştiren *MA* ve *MB* hatlarını çektiğimizi düşünelim. Bu durumda *ABM* üçgeninde *A* ve *B* açılarının toplamı 180° olması gerekir ki bu yanlıştır ve bu nedenden önermenin doğruluğu, olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.



Şekil 14

***XV. Önerme*: Eğer iki farklı düzlemin birinde bir noktadan çekilmiş iki hat diğer düzlemde bir noktadan çekilmiş iki hatta paralelse, bu durumda düzlemler birbirlerine paraleldir.**

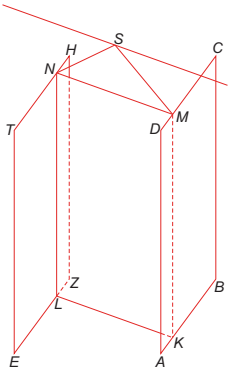
Farklı düzlemlerdeki *B* ve *H* noktalarından geçen hatların *AB*//*HT* ve *BC*//*HK* şeklinde paralel olduklarını varsayalım (*Şekil 15*). *B* noktasından *H* düzlemine *BE* dikini indirelim. Sonra *H* düzleminde *HT* hattına paralel olan *ED* ve *HK* hattına paralel olan *EZ* hatlarını çekelim. Bu durumda *ED*//*BA* ve *EZ*//*BC* olur. *BD* hattı *ED* ve *EZ* hatlarına dik olduğundan *BA* ve *BC* hatlarına ve bu nedenden dolayı her iki düzleme de diktir. Böylece önermede öngörüldüğü gibi bu iki düzlem birbirine paralel olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 15

***XVI. Önerme*: Herhangi bir düzlem iki paralel düzlemi kestiğinde oluşan kesişme hatları birbirine paraleldir.**

MKLN düzlemi birbirine paralel olan *ABCD* ve *EZHT* düzlemlerini *MK* ve *NL* hatları boyunca keser (*Şekil 16*). Bir an bu iki hattın *S* noktasında kesiştiğini varsayalım. Bu ise iki düzlem uzatıldığında aynı noktada kesişmesi gerektiği anlamına gelir ki bu paralel düzlemler nedeniyle mümkün değildir. Buna göre önerme hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

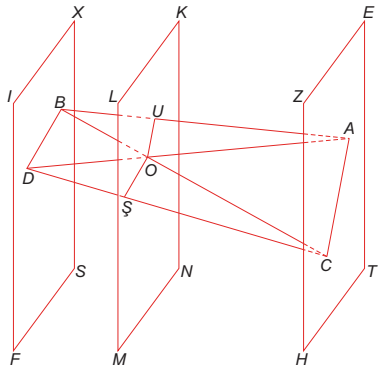


Şekil 16

***XVII. Önerme*: Paralel düzlemlerin kestiği iki doğrunun hisseleri aynı oranda kesilir.**

Örneğin birbirine paralel olan *XIFS*, *KLMN* ve *EZHT'* düzlemlerinin *AB* hattını *A*, *U* ve *B*, *CD* hattını *C*, *Ş* ve *D* noktalarında kestiğini varsayalım (*Şekil 17*). Bu durumda *BD*, *AC*, *AD* ve *BC* hatlarını çekelim. *BC* hattı *KLMN* düzlemini *T* noktasında kestiğini varsayalım, *TŞ* ve *TU* hatlarını çekelim.

EZHT' ve *KLMN* düzlemleri *ABC* üçgenini *AC* ve *UT* doğrularıyla kestiği için *UT*//*AC* ve benzer şekilde *KLMN* ve *XIFS* düzlemleri *CBD* üçgenini *BD* ve *ŞT* doğrularıyla kestiği için *BD*//*ŞT* olur.



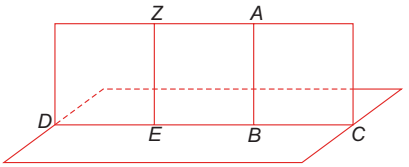
Şekil 17

Neticede önermenin öngördüğü şekilde benzer üçgen ilişkilerinden *AU*/*UB* = *CŞ*/*ŞD* oranlarının geçerli olduğu görülür.

***XVIII. Önerme*: Eğer bir doğru bir düzleme dikse, bu hattan geçen tüm düzlemler de aynı düzleme diktir.**

Örnek olarak, herhangi bir düzleme dik olan *AB* hattından bir düzlem geçirildiğini ve bu iki düzlem arakesit hattının *CD* olduğunu varsayalım (*Şekil 18*). *CD* arakesit hattı üzerindeki bir *E* noktasından geçen ve ikinci düzlem üzerinde *CD* hattına dik, bir *EZ* hattını göz önünde bulunduralım. Bu *EZ* hattı birinci düzleme dik olduğu gibi, aynı zamanda *E* noktasından geçirilen ve birinci düzlem üzerinde bulunan herhangi başka bir hatta da diktir. *CD* arakesit hattı üzerinde düşünülen herhangi bir noktadan bu

şekilde geçirilecek dik hatların tümü için de bunları söylemek mümkündür. Şu halde bu iki hat önermenin öngördüğü gibi bir dik açı altında kesişir.

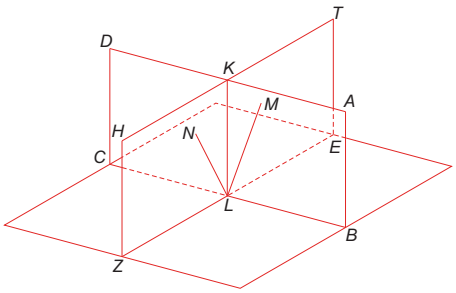


Şekil 18

Not: Diğer bir deyişle, herhangi bir düzlem başka bir düzleme dikse, bu düzlemlerin arakesit hattına çekilen bir dik o düzlemlerin biri üzerinde bulunur ve diğer düzleme de diktir.

***XIX. Önerme*: İki kesişen düzlem bir üçüncü düzleme dikse, iki düzlemin kesişme hattı da üçüncü düzleme diktir.**

ABCD ve *TEZH* düzlemlerinin kesişme hattı *KL* olduğunu varsayalım (*Şekil 19*). Eğer bu kesişme hattı düzleme dik değilse, bu durumda *L* noktasından *ABCD* düzleminde olmak koşuluyla *LM* diki, aynı şekilde *TEZH* düzleminde olmak koşuluyla *LN* diki çekilebilir. Ancak bu iki *LM* ve *LN* dik hattın bir üçüncü düzleme dik olması gerekir ki bu yanlıştır. Şu halde önerme gereği *KL* hattı üçüncü düzlemin kesişme hattına dik olduğundan kendisine de diktir.

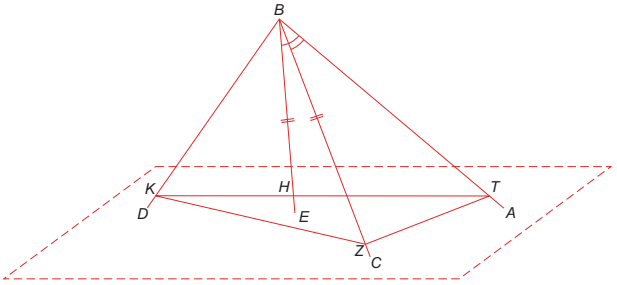


Şekil 19

***XX. Önerme*: Eğer üç düzlem açısı bir cisimsel açı oluşturuyorsa, herhangi ikisinin toplamı geri kalan üçüncü açıdan büyüktür.**

ABC, *ABD* ve *CBD* açılarının *B* cisimsel açısını oluşturduğunu varsayalım (*Şekil 20*). Eğer bu açılardan biri diğerine eşit olsa bu durumda önerme hükmü kesinlikle kanıtlanmış olur.

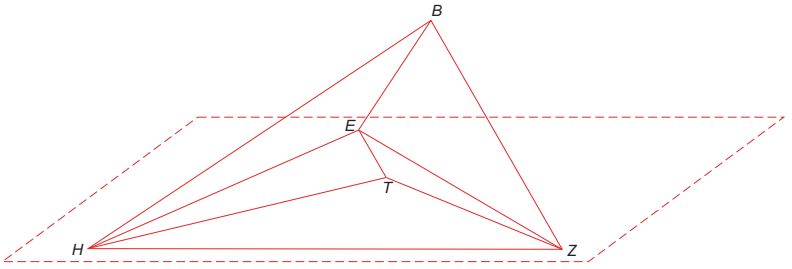
Bunun böyle olmadığını ve *ABD* açısında *ABC* açısına eşit olacak şekilde *ABH* açısını ayıralım. *BA* ve *BD* hatları üzerinde keyfi *T* ve *K* noktalarını alalım ve bu noktaları birleştirelim. Sonra *BH* hattına eşit *BZ* hattını oluşturalım, *ZT* ve *ZK* hatlarını çekelim. *BT* ortak, *BH* = *BZ* ve ∠(*TBH*) = ∠(*TBZ*) olduğundan Δ(*TBH*) = Δ(*TBZ*) ve *TZ* = *TH* olur. Ne var ki *TZ* ve *ZK* hatlarının toplamı *TK* hattından daha büyük olduğundan *ZK* hattı *HK* hattından daha büyüktür. Buna göre ∠(*KBZ*) > ∠(*KBH*) olduğundan, önermede öngörüldüğü gibi ∠(*ABC*) + ∠(*CBD*) > ∠(*ABD*) olduğu kanıtlanmış olur.



Şekil 20

***XXI. Önerme*: Bir cisimsel açıyı çevreleyen düzlem açılarının toplamı 4 dik açıdan ya da 360°'den küçüktür.**

Şekil 21'de *B* açısı *EBH*, *EBZ* ve *ZBH* açılarıyla çevrilidir. *EZ*, *ZH* ve *HE* hatlarını çekelim. Sonra *HEZ* üçgeni düzleminde herhangi bir *T* noktası göz önünde bulunduralım ve *ET*, *ZT*, *HT* hatlarını çekelim. Bu durumda elde edilen *ETZ*, *ZTH* ve *HTE* üçgenlerindeki bulunan 9 açının toplamı 6 dik açıya eşittir (3 × 180° = 6 × 90°). Bu 9 açının 6'sı ikişerden *E*, *Z* ve *H* noktalarındadır. Buna göre *HEZ* üçgeni açıları toplamı 2 dik açıya, *T* tepe noktasındaki açıların toplamı ise 4 dik açıya eşittir.



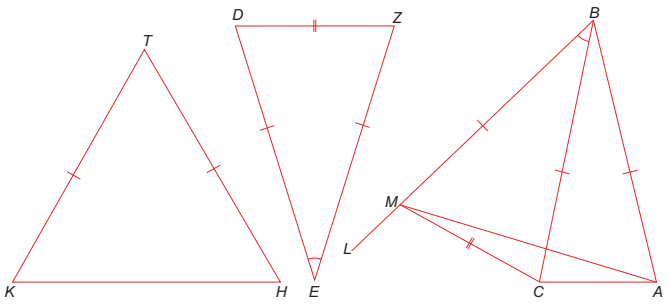
Şekil 21

EBH, *EBZ* ve *ZBH* üçgen açılarının toplamı 6 dik açıya eşit olduğundan, bu değer *E*, *Z* ve *H* açıları toplamından büyüktür. Geriye kalan ve tepeleri *B* noktası olan 3 açının toplamı, önermenin öngördüğü şekilde, tepeleri *T* noktası olan açıların toplamından, yani 4 dik açıdan küçüktür.

Not: Bu önermeyi kanıtlamak için *T* noktasına ve bu noktadan geçen hatlara ihtiyaç duyulmayabilir. *EBH*, *EBZ* ve *ZBH* üçgenlerine ilişkin 6 açının toplam değeri *E*, *Z* ve *H* açılarının toplam değerinden daha büyüktür. Ayrıca *E*, *Z* ve *H* açılarının toplamı 2 dik açıya eşittir. Böylece 9 açıdan geriye kalan 3 açının toplamı 4 dik açı olsa bile, sonuç değişmez.

***XXII. Önerme*: Eğer kenarları eşit üç düzlem açısı verilmiş ve bu açılardan ikisinin toplamı üçüncü açıdan büyükse, bu durumda kenar uçlarını birleştirerek bir üçgen oluşturmak mümkündür.**

ABC, *DEZ* ve *HTK* düzlem açılarında *BA*, *BC*, *EZ*, *ED*, *TH* ve *TK* açı kenarlarının eşit olduğu ve açı kenar uçlarını bileştiren *AC*, *ZD* ve *HK* kirişlerinin verildiği varsayılır (*Şekil 22*). Kirişlerin eşit olması halinde iki kirişin toplamı üçüncüden büyük olacağı açıktır. Lakin kirişlerin eşit olmaması, örneğin *HK* kirişinin en uzun olması halinde, *BC* hattının *B* noktasından *E* açısına eşit olan *CBL* açısı alınır ve bu hattın üzerinde *BC* hattına eşit olacak şekilde *BM* hattı ayrılır. *CM* ve *AM* hatları çekilir. Bu durumda *CM* kirişi *DZ* kirişine eşittir. Önerme varsayımı gereği $\angle(ABM) > \angle(T)$ olduğundan $(AC + CM) > AM$ ve $AM > HK$ olur. Açıların kenarları eşittir ve önermeye uygun olarak $(AC + CM) > HK$ elde edilir.

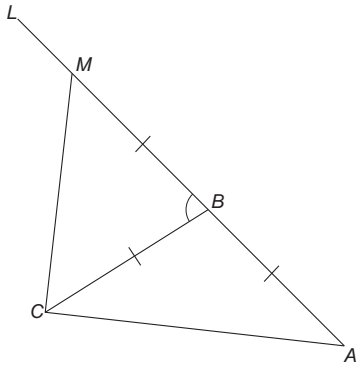


Şekil 22

Not: *AM* hattı farklı konumlar alabilir:

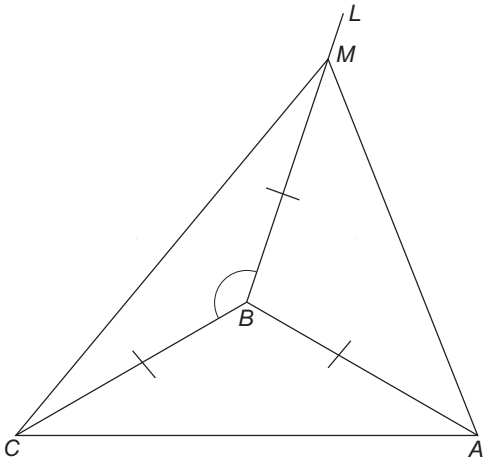
1- *AM* hattı *Şekil 22*'de olduğu gibi *AB* ve *BM* hatları arasına düşebilir. Yukarıda gösterildiği gibi bu durum *B* ve *E* açıları toplamının 2 dik açı = °180'den küçük olması halinde mümkündür.

2- *AM* hattı *AB* hattı üzerine düşebilir (*Şekil 23*). Bu durum *B* ve *E* açıları toplamının 2 dik açı = 180° olması halinde mümkündür.



Şekil 23

3- *AM* hattı ve *AB* ve *BM* hatları dışına düşebilir (*Şekil 24*). Bu durumda da *B* ve *E* açıları toplamının 2 dik açı = 180°'den büyük olması gerekir.



Şekil 24

Bu durumların hepsinde (*AC* + *CM*) > *AM* > *BM* olmalıdır.

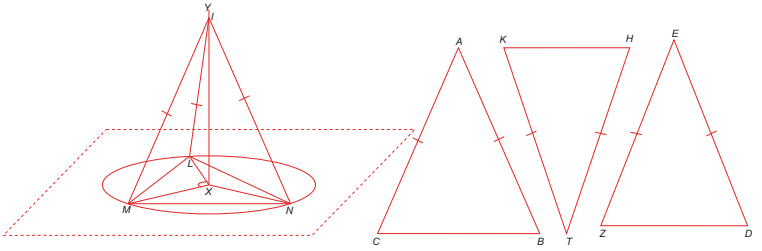
Bu üç açının toplamı dört dik açı ya 360°'den küçüktür ya da değildir.

Ayrıca üç açının toplamı altı dik açıdan küçük olduğundan her bir açı iki dik açıdan küçük olması gerekir. Bu ilk koşuldur, ancak bir ikinci koşul daha gereklidir. Bu da üç açıdan iki küçük açı toplamının 180°'den farkı, bu açı toplamının büyük açı farkından küçük olması gerekir: Buna göre eğer B ve H açıları küçükse $\{[\angle(B) + \angle(E)] - 180°\} < \{[\angle(B) + \angle(E)] - \angle(T)\}$ ya da $\{180° - [\angle(B) + \angle(E)]\} < \{[\angle(B) + \angle(E)] - \angle(T)\}$ ilişkileri geçerli olmalıdır.

Aksi halde iki küçük açının toplamı büyük açıdan büyük olamaz. İkinci koşul iki küçük açının toplamı 180°'den büyük olması ve üç açının toplamı ile 360° farkı, iki küçük açının toplamının 180°'den küçük olması için gereklidir. Aksi halde üçüncü açı ya 180°'ye eşit ya da 180°'den daha büyük olurdu ki bu mümkün değildir.

***XXIII. Önerme*: Toplamları 360°'den küçük, herhangi ikisinin toplamı geri kalan üçüncüden büyük olan üç düzlem açıdan bir cisimsel açının oluşturulması.**

A, *T* ve *E* açılarının kenarları birbirlerine eşit *AB*, *AC*, *HT*, *KT*, *ED* ve *EZ* hatlarından oluşur (*Şekil 25*). Bu açıların *BC*, *HK* ve *DZ* kirişlerinden *LM* = *BC*, *MN* = *HK* ve *LN* = *ZD* olmak üzere bir *LMN* üçgeni kurulur. Bu üçgene dıştan teğet *X* merkezli *LMN* dairesini ve *LX*, *MX* ve *NX* yarıçapları çizilir.



Şekil 25

Şu halde *BC* = *LM* olduğuna göre *AB* ve *AC* hatları için şunlar söylenebilir:

1- *AB* ve *AC* hatları *L X* ve *MX* hatlarına eşit olabilir: Bu durumda $\angle(A) = \angle(LXM)$ ve $\angle(T) = \angle(NXL)$ olması gerekir. Bu ise yanlıştır, çünkü bu

durumda verilen üç açının toplamı *X* noktasındaki açıların toplamına yani 4 dik açıya (360°'ye) eşit olur. Önermede ise *A*, *T* ve *E* açıları toplamı dört dik açı ya da 360°'den küçük kabul edilmişti.

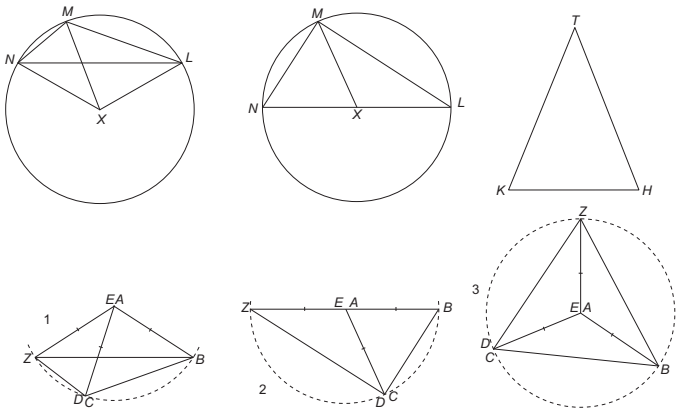
2- *AB* ve *AC* hatları *LX* ve *MX* hatlarından küçük olabilir: Bu durumda eğer *BC* hattı *LM* hattı üzerine konursa, *A* açısı *LXM* açısının içine düşer, kendi de *LXM* açısından büyük olur. Bu durum diğer açılar için de geçerlidir. Neticede açıların toplamı 4 dik açıdan ya da 360°'den büyük olur ki bu da önermenin ön koşulu gereği yanlıştır.

3- Buna göre *AB* ve *AC* hatları *LX* ve *MX* hatlarından büyük olmalıdır. Bu durumda *X* noktasından daire düzlemine *XY* diki çekilir. *XY* hattından *XI* parçası ayrılır ve *IL*, *IM* ve *IN* hatları çekilir. Bulunan *I* açısı aranan cisimsel açıdır. Çünkü onu çevreleyen üç açının taraf ve kirişleri verilen üç açının taraf ve kirişlerine eşittir. Diğer bir deyişle önerinin öngördüğü gibi $\angle(I) = [\angle(A) + \angle(T) + \angle(E)]$ koşulunu sağlar.

Not I: *AB* hattı *LXM* üçgeninin içine düşer. Zira *LX* ve *MX* hatları *AB* ve *AC* kenarlarına karşı düşer. Eğer *L* ve *M* merkez olmak üzere bu iki hattı yarıçap kabul ederek iki daire çizilirse, bu daireler *LXM* üçgeni içinde kesişir, aksi halde *LM* hattının uzunluğu (*AB* + *AC*) hattından küçük olmaz. Bu da yanlış olur.

Not II: Bu önermede *LMN* üçgeninin dar açılı olduğu varsayılmıştır (*Şekil 25*), ancak dik ya da geniş açılı olabilir. Burada *M* açısının dik ya da geniş açılı olduğunu varsayalım (*Şekil 26*). Açı kenarlarının yarıçaptan büyük olduğunu hatırlatarak, *A* ve *E* açılarında *AC* ve *ED* taraflarını ortak kabul edelim ve *ZB* hattını çekelim. Yukarıdaki üç halden birincisinde *BC* >*DZ* olur. Çünkü *BAZ* açısı *T* açısından büyük ve kenarları ise eşittir. İkinci durumda *BZ* = *BA* + *EZ* ve *HK* = *LN* olduğuna göre $\angle(LMN) < \angle(BCZ)$. *BCZ* açısı ise *BAC* ve *DEZ* üçgenlerinin tabanı üstünde iki açının toplamından oluşur.

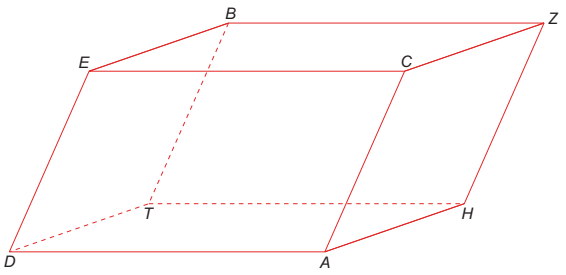
Kenarlar eğer yarıçapa eşitse bu durumda $\Delta(XLM) = \Delta(ABC)$ ve $\Delta(XMN) = \Delta(EDZ)$ ve bu durumda $\angle(C) + \angle(D) = \angle(LMN)$ olur. Eğer kenarlardan biri yarıçaptan küçük ise $\angle(C) < \angle(LMX)$ ve $\angle(D) < \angle(NMX)$ olacağından $\angle(C) + \angle(D) < \angle(LMN)$ olur ki bu yanlıştır.



Şekil 26

***XXIV. Önerme*: Bir paralel yüzlü cismin paralel yüzeyleri birbirine eşit paralel kenarlardan oluşur.**

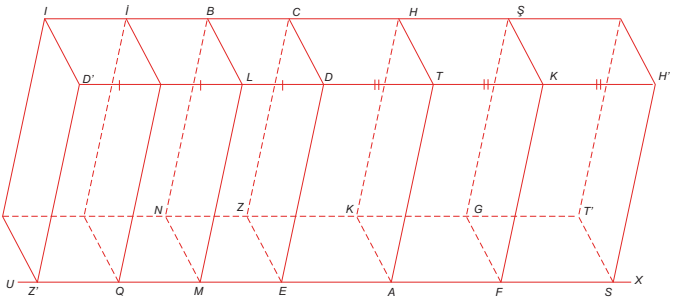
AB cisminde *ACED* ve *HZBT* yüzeylerinin paralel düzlemlerden oluştuğunu varsayalım (*Şekil 27*). *ACED* yüzeyi iki paralel *ZCAH* ve *BEDT* düzlemi arasında, bu iki yüzey ise *HTDA* ve *ZBEC* paralel düzlemleri arasında bulunduğundan *AC* ve *ED* hatları birbirlerine paraleldir. Aynı şekilde *AD*//*CE*, *BT*//*ZH* ve *HT*//*ZB* olduğu görülür. Ayrıca söz konusu yüzeyde kenarlar karşılıklı paralel ve uygun açılar karşılıklı eşit olduğundan bu cismin yüzeyi birbirine eşit paralelkenarlardan oluşur. Bu özellik cismin tüm yüzeyleri için geçerli olduğundan önerme hükmü kanıtlanmış olur.



Şekil 27

***XXV. Önerme*: Eğer bir paralel yüzlü cisim, paralel yüzeylerine paralel bir düzlemle kesilirse, kesilen parçaların oranı tabanların oranına eşittir.**

Örneğin *AB* paralel yüzlüsünün, *HTAK* ve *BLMN* paralel yüzlerine paralel olan bir *CDEZ* düzlemiyle kesildiğini varsayalım. Bu durumda *AC*/*EB* = *AZ*/*EN* oranının geçerli olduğunu kanıtlamamız gerekir (*Şekil 28*).

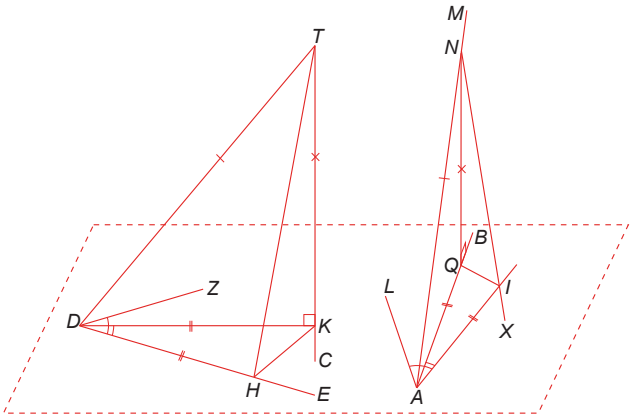


Şekil 28

AM hattının her iki *X* ve *U* yönünde uzatıldığını varsayalım. *AX* yönünde *EA* = *AF* = *FS* mesafelerini, *EU* yönünde *EM* = *MQ* = *QZ'* mesafelerini ayıralım ve gerekli olan hat, yüzey ve cisimleri oluşturalım. Eğer tamamlanan *SZ* paralelkenarı *ZZ'* paralelkenarına eşit ise, *SC* paralel yüzlü *CZ'* paralel yüzlüsüne eşit olur. Eğer bu tamamlanan paralel kenar diğerinden artık ya da eksik ise, bu durumda *SC* paralel yüzlü *CZ'* paralel yüzlüsünden artık ya da eksik olur. Böylece önermenin öngördüğü gibi iki tabanın oranı iki cismin oranına eşit olduğu kanıtlanmış olur.

***XXVI. Önerme*: Verilen bir hat ve onun üzerindeki bir noktaya, verilen bir cisimsel açıya eşit cisimsel açı oluşturulması.**

AB hattı üzerindeki bir *A* noktasında *CDE*, *CDZ* ve *ZDE* düzlem açılarından oluşan *D* cisimsel açısına eşit bir cisimsel açı oluşturulmak istenmektedir (*Şekil 29*). *DE* hattı üzerinde olan herhangi bir *T* noktasından *CDZ* düzlemine *TH* dikini indirip *DH* hattını çekelim. Sonra *CDZ* ve *CDH* açısına eşit *BAX* ve *BAI* açılarını oluşturalım. *AI* hattı üzerinde *DH* hattına eşit *AM* parçasını ayıralım ve *M* noktasından *BAX* düzlemine dik olan *MN* hattını çekelim. Bu dik üzerinde *TH* hattına eşit olan *MN* parçasını ayıralım ve *AN* hattını çekelim. Bu durumda *A* cisimsel açısı kurmak istediğimiz *D* cisimsel açıya eşittir.



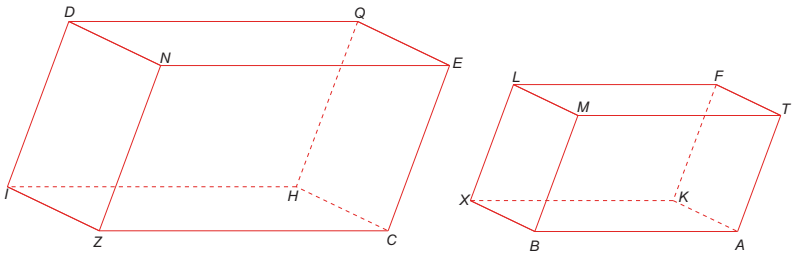
Şekil 29

Sonra *DC* hattı üzerinde olan herhangi bir *K* noktasını *H* ve *T* noktalarıyla birleştirelim, *DK* hattına eşit olan *AQ* parçasını ayıralım, *NQ* ve *MQ* hatlarını çekelim. Bu durumda *AM* = *DH*, *MN* = *HT*, *NMA* ve *THD* açıları dik olduğundan *AN* = *DT* ilişkisi geçerlidir. Ayrıca ∠(*BAI*) = ∠(*CDH*), *AN* = *DT* ve *AQ* = *DK* olduğundan *QM* = *KH* olur. Böylece *A* noktasını çevreleyen üçgenler uygun olarak *D* noktasını çevreleyen açılara, önermenin öngördüğü şekilde, eşit olur.

Not: Bu önermede *TH* diki yukarıda olduğu gibi *DC* ve *DZ* hatları arasına düşebileceği gibi iki hattın dışına, birinin üzerine ya da *D* noktasının üzerine de düşebilir. Her durumda uygulanacak yöntem aynıdır.

***XXVII. Önerme*: Verilen bir hat üzerindeki bir paralel yüze benzer bir paralel yüzlünün oluşturulması.**

Verilen *AB* hattının *A* noktası etrafında *C* cisimsel açısına eşit bir açı kurulur (*Şekil 30*). *AB*, *AT* ve *AK* hatları *AB*|*AT* = *AB*|*AK* = *CZ*|*CE* = *CZ*|*CH* oranları gerçekleşecek şekilde oluşturulur. *BT* düzlemi oluşturulur. *T*, *M* ve *B* noktalarından *AK* hattına eşit ve paralel *TF*, *ML* ve *BX* hatları çekilir. Sonra *FK*, *FL*, *KX* ve *XL* hatları çekilir. Oluşan *AL* cisminin verilen *CD* paralel yüzlüye benzer olduğu açıktır.

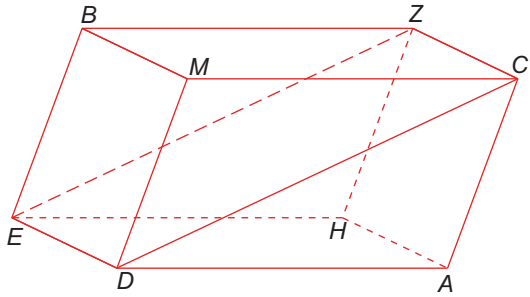


Şekil 30

***XXVIII. Önerme*: Herhangi bir paralel yüzlüde paralel yüzlerin köşegenlerinden geçen bir düzlem paralel yüzlüyü iki eşit prizmaya böler.**

AB paralel yüzlüde *AM* ve *HB* yüzlerinin *CD* ve *ZE* köşegeninden *CZED* düzlemi geçirilir (*Şekil 31*). Bunun sonucunda elde edilen iki prizmada karşılıklı yüzler eşit, bir yüz ortak, *ACD* ve *HZE* üçgenleri ise önermenin öngördüğü gibi eşittir.

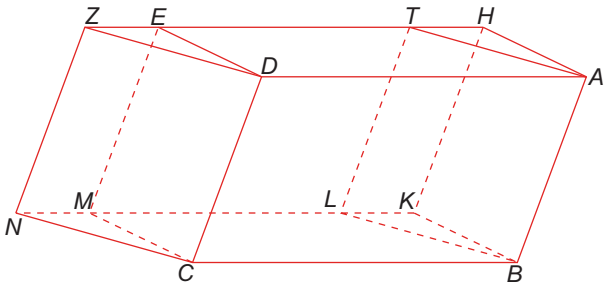
Not: Burada aksi önermenin de geçerli olduğu anlaşılır: Herhangi bir paralel yüzlüyü tamamlayan prizma paralel yüzlünün yarısıdır.



Şekil 31

***XXIX. Önerme*: Taban ve yükseklikleri aynı olan ve yan yüzeyleri aynı hatlar arasında olan tüm paralel yüzlülerin hacimleri eşittir.**

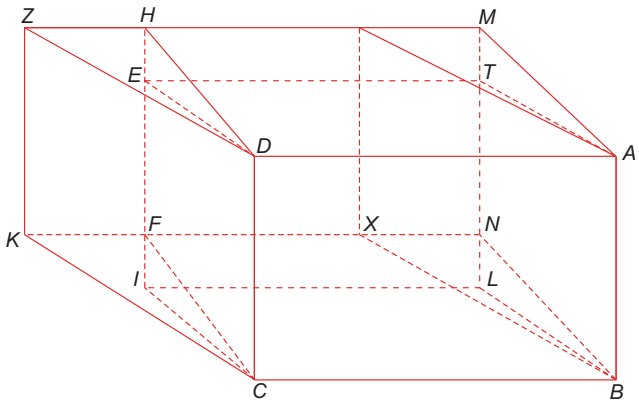
Yükseklikleri aynı olan *BE* ve *BZ* paralel yüzlüler aynı *ABCD* tabanına sahiptir (*Şekil 32*). Yan yüzeyleri ise *NK* ve *EH* hatları arasında yer alır. Bu nedenden dolayı $\Delta(DEZ) = \Delta(AHT)$, $\Delta(CMN) = \Delta(BKL)$, $EMNZ = HKLT$, $DCME = ABKH$ ve $DCNZ = ABLT$ olduğundan *AL* ve *DN* prizmaları eşittir.



Şekil 32

***XXX. Önerme*: Tabanları ve yükseklikleri aynı olan, lakin yüzeyleri aynı hatlar arasında olmayan paralel yüzlülerin hacimleri eşittir.**

Yükseklikleri ve *ABCD* tabanları aynı olan *BZ* ve *BE* paralel yüzlülerin, yan yüzeyleri *CZ* ve *CE* olarak verilmiş olup bunlar önceki önermede olduğu gibi aynı hat üzerinde değildir (*Şekil 33*). Önermeyi kanıtlamak için *KX* hattını *N* noktasına, *LT* hattını *M* noktasına ve *IE* hattını *H* noktasına kadar uzatıp *AM*, *BN*, *DH* ve *CF* hatlarını çekelim. Yeni oluşan *BH* paralel yüzlü diğer iki paralel yüzlüyle aynı tabanı paylaştığı ve yan yüzeyleri aynı hat üzerinde olduğu için önermenin öngördüğü gibi diğerlerine eşittir.

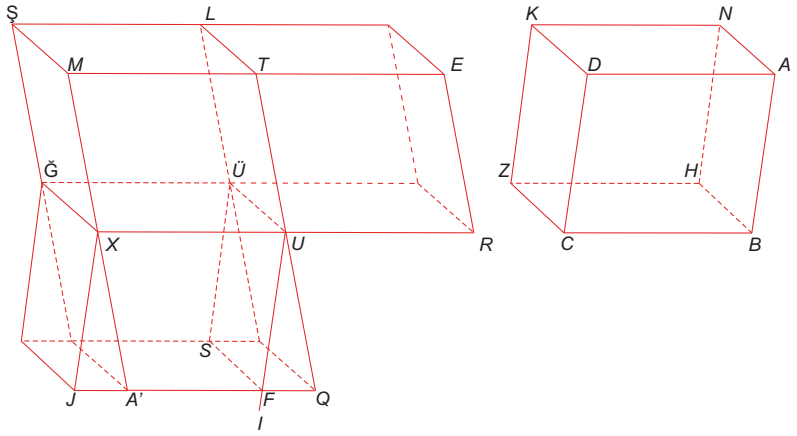


Şekil 33

***XXXI. Önerme*: Tabanları ve yükseklikleri aynı, ayrıtları tabana dik paralel yüzlüler eşittir.**[1]

1 Bu ve bir sonraki önerme Öklid'in özgün eserindekinde *XXXI. Önerme* olarak verilir.

BK ve *RL* paralel yüzlülerde *ABCD* ve *ERUT* tabanları birbirine eşittir (*Şekil 34*). Önermeyi kanıtlamak için *TU* ve *RU* hatlarını *UQ* = *TU* ve *UX* = *RU* olacak şekilde uzatalım. ∠(*XUI*) = ∠(*DAB*) ve *UF* = *AB* olacak şekilde *F* noktasını belirleyelim. Bu durumda *BK* ve *FĞ* paralel yüzlüler birbirine eşit olur. *GT'* = *TT'* = *AK* paralelkenarlar eşit olduğundan *BK* = *QG* = *FĞ* paralel yüzlüler de aynı *UĞ* tabanını paylaştıklarından önermenin öngördüğü gibi birbirine eşittirler.

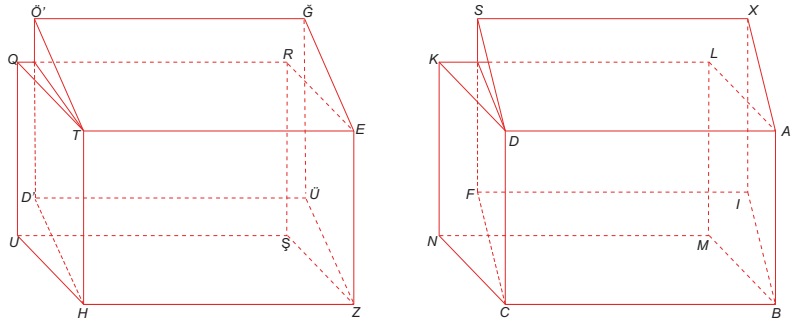


Şekil 34

***XXXII. Önerme*: Tabanları ve yükseklikleri aynı, ayrıtları tabana dik olmayan paralel yüzlüler eşittir.**[1]

BS ve *ZQ* paralel yüzlülerin *BD* ve *ZT* taban ve yükseklikleri eşittir (*Şekil 35*). *BD* tabanından *MK* düzlemine *AL*, *BM*, *CN* ve *DK* dikleri inilirse *BS* = *BK* ve aynı şekilde *ZT* tabanından *ŞQ* düzlemine *ER*, *XŞ*, *HU* ve *TQ* dikleri inilirse, bu durumda ve *EÖ'* = *ZQ* olur. Ayrıca önkoşul gereği *AC* = *EH* olduğuna göre önermenin öngördüğü şekilde *BS* = *ZÖ'* olduğu kanıtlanmış olur.

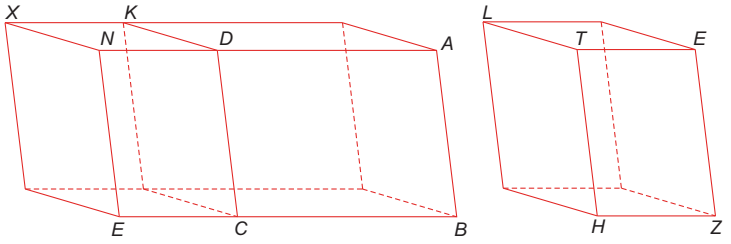
1 Önceki dipnota bakınız.



Şekil 35

***XXXIII. Önerme*: Yükseklikleri eşit olan paralel yüzlülerin oranı tabanlarının oranına eşittir.**

Yükseklikleri eşit olan *BK* ve *ZL* paralel yüzlülerin tabanları *BD* ve *ZT* olsun (*Şekil 36*). Önermeyi kanıtlamak için *CD* hattı üzerine yüzeyi *ZT* tabanına eşit olan *CN* tabanını kurup *CX* paralel yüzlüsünü oluşturalım. Bu durumda taban ve yükseklikleri aynı olduğundan *ZL* ve *CX* paralel yüzlüleri eşittir. Ancak *XXV. Önerme* gereği *BK* ve *CX* paralel yüzlülerinin oranı tabanları oranına eşittir. Şu halde *ZL* ve *CZ* paralel yüzlülerinin oranı da önermenin öngördüğü gibi tabanları oranına eşittir.



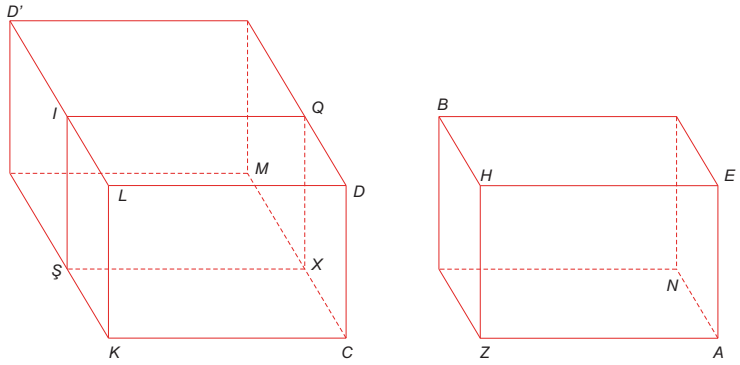
Şekil 36

***XXXIV. Önerme*: Ayrıtları tabana dik olan iki paralel yüzlünün tabanlarıyla yükseklikleri ters orantılıdır; aksine eğer iki paralel yüzlünün tabanları yükseklikleriyle ters orantılıysa ayrıtları eşittir.**[1]

AB ve *CD'* paralel yüzlülerinin tabanları *AH* ve *CL* olsun (*Şekil 37*). Eğer *LD'* ayrıtı *HB* ayrıtına eşitse, bu durumda paralel yüzlüler birbirine eşit olduğundan onların tabanları da birbirine eşit olur.

1 Bu ve bir sonraki önerme, Öklid'in özgün eserinde *XXXIV. Önerme* olarak verilir.

Eğer *LD'* ve *HB* ayrıtları eşit değilse, bu durumda *LD'* üzerine *HB* ayrıtına eşit olan *LI*, aynı şekilde *HB* ayrıtına eşit *CX* parçası ayrılır ve *XQ*, *XŞ*, *ŞI*, *QI* hatları çekilir. Bu durumda *AB* ve *CI* paralel yüzlülerin ayrıtları eşit olur. Şu halde ayrıtların oranı tabanların oranına eşit olur.



Şekil 37

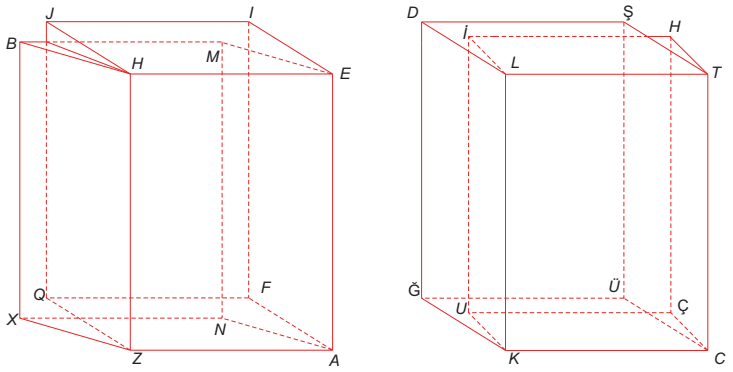
Şimdi eğer *DD'* ve *DI* yüzleri *CD'* ve *CI* paralel yüzlülerin tabanı olarak alınırsa, bu iki cismin yükseklikleri aynı olur. Diğer bir deyişle *CD'* ve *CI* paralel yüzlülerin oranı *DD'* ve *DI* tabanlarının oranına eşit olur.

Eğer *AB* ve *CD'* paralel yüzlüleri eşit olsa, onların *CI* paralel yüzlüsüne oranı *AH* tabanının *CL* tabanına, *LD'* hattının *LI* hattına ya da *HB* hattı oranına eşit olur. Böylece ters oran gerçekleşmiş olur. Eğer *AH* tabanının *CL* tabanına oranı, *LD'* ayrıtının *HB* ayrıtı oranına eşit olsa, bu iki paralel yüzlü önermede öngörüldüğü gibi eşit olurdu.

***XXXV. Önerme*: İki eşit paralel yüzlünün tabanlarıyla yükseklikleri ters orantılıdır; aksine tabanlarıyla yükseklikleri ters orantılı iki paralel yüzlü eşittir.**[1]

Eşit *AB* ve *CI* paralel yüzlülerinin tabanları *AH* ve *CL* olsun (*Şekil 38*). Her iki tabanın köşelerinden *FJ* ve *ÜD* düzlemlerine *AF*, *ZQ*, *HJ*, *EI* ve *CÜ*, *KĞ*, *LD*, *TŞ* diklerini inelim. Böylece *AB* ve *CI* paralel yüzlülere eşit *AJ* ve *CD* paralel yüzlüleri elde edilir. Bu iki paralel yüzlüde önerme hükmü geçerli olduğuna göre tabanları ve yükseklikleri eşit olan *AB* ve *CI* paralel yüzlüleri için de geçerlidir.

1 Önceki dipnota bakınız.



Şekil 38

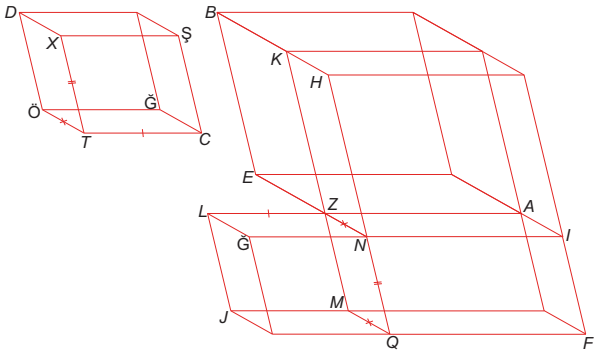
***XXXVI. Önerme*: Benzer paralel yüzlülerin oranı uygun ayrıtların küpleriyle orantılıdır.**[1]

Benzer *AB* ve *CD* paralel yüzlülerin verildiğini varsayalım (*Şekil 39*). Bu durumda $AZ/CT = KZ/XT = EZ/HT$ olduğunu göstermemiz gerekir.[2]

Önermeyi kanıtlamak için *EZ* hattını uzatalım ve üzerinde *ÖT* hattına eşit olan *ZN* parçasını işaretleyelim. İkinci olarak *KZ* hattını uzatalım ve üzerinde *XT* hattına eşit *ZM* parçasını işaretleyelim. Nihayet *AZ* hattını uzatalım ve onun üzerinde *CT* hattına eşit *ZL* parçasını işaretleyelim. *IK*, *FZ* ve *QL* paralel yüzlülerini oluşturalım. Bu dört paralel yüzlüden herhangi ikisi yok edilse bile, bunları birbirinden karşılıklı paralel iki yüzeyin ayırdığı görülür.

Neticede açıları ve boyutları eşit olduğundan *QL* paralel yüzlüsü *CD* paralel yüzlüsüne eşittir. AB paralel yüzlüsünün IK paralel yüzlüsüne oranı *ZH* ayrıtının *ZN* ayrıtı oranına; *FZ* paralel yüzlüsünün *QL* paralel yüzlüsüne oranı *AZ* ayrıtının *ZL* ayrıtı oranına eşittir. Sonuçta *AB* paralel yüzlüsünün *CD* paralel yüzlüsüne oranı önermede öngörüldüğü gibi bu ayrıt oranlarından birinin küpü oranında eşittir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXXIII. Önerme* olarak verilir.
2 Bu önerme $V(AB)/V(CD) = (AZ \times KZ \times EZ)/(CT \times XT \times HT) = (AZ/CT)^3$ anlamına gelir.



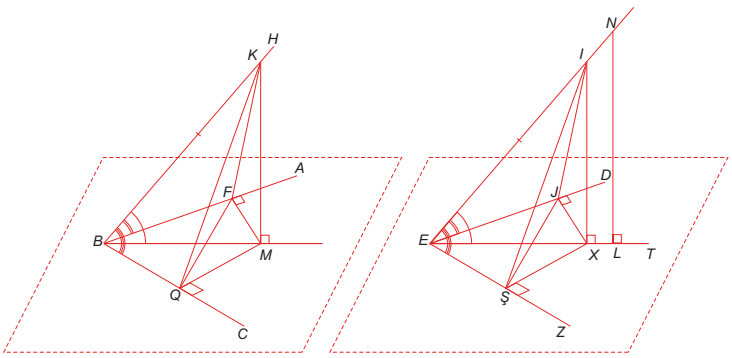
Şekil 39

***XXXVII. Önerme*: Eğer eşit iki düzlem açısı verilir, iki açının tepe noktasından açı kenarıyla belirli açılar yaparak düzlemin dışına çıkan iki hat çekilir ve bu hatların üzerindeki herhangi bir noktadan açı düzlemine bir dik inilirse, bu noktayı açı tepe noktasına bağlayan hatla düzlem dışına çıkan hat arasındaki açılar eşittir.**[1]

Düzlemsel ve eşit *ABC* ve *DEZ* açılarının verildiğini ve bu açıların *B* ve *E* tepe noktalarından $\angle(ABM) = \angle(DET)$ ve $\angle(CBM) = \angle(ZET)$ olacak şekilde düzlem dışına çıkan *BH* ve *EN* hatlarının çekildiğini varsayalım (*Şekil 40*). Söz konusu *BH* ve *EN* hatlarının üzerinde keyfi *K* ve *N* noktalarından *ABC* ve *DEZ* düzlemlerine *KM* ve *NL* dikleri inilir ve bu diklerin düzlemi kestiği *M* ve *L* noktalarından *MB* ve *LE* hatları çekilirse, $\angle(MBH) = \angle(TEN)$ olduğunu kanıtlamamız gerekir.

Önermeyi kanıtlamak için $BK < EN$ olduğunu varsayalım ve *EN* hattı üzerinde $EI = BK$ olacak şekilde *I* noktasını belirleyelim ve bu noktadan *DEZ* düzlemine *IX* dikini inelim. Bu dik *EL* hattı üzerine düşer, çünkü *L*, *X* ve *E* noktaları *NL* ve *IX* diklerinin bulunduğu *TEN* düzlemiyle *DEZ* düzleminin arakesiti *ET* hattı üzerinde bulunur.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXXV. Önerme* olarak verilir.



Şekil 40

Sonra *M* ve *X* noktalarından *AB* ve *ED* hatlarına *MF*, *XJ* diklerini, *BC* ve *EZ* hatlarına *MQ* ve *XŞ* diklerini indirip *FQ*, *JŞ*, *KF*, *IJ*, *KQ* ve *IŞ* hatlarını çekelim. Bu durumda $BK^2 = (KM^2 + BM^2)$ ve $BM^2 = (MF^2 + BF^2)$ olduğundan $BK^2 = (KM^2 + MF^2 + BF^2)$ ve ayrıca $KF^2 = (KM^2 + MF^2)$ olduğundan $BK^2 = (KF^2 + BF^2)$ yazılabilir. Buna göre *KF*2 hattı *AB* hattına diktir. Aynı şekilde *KQ* hattının *BC* hattına, *IJ* hattının *ED* hattına ve *IŞ* hattının *EZ* hattına dik olduğu gösterilebilir. Ayrıca $\angle(B) = \angle(E)$, $\angle(F) = \angle(J) = 90°$ ve $BK = EI$ olduğundan $\Delta(BFK) = \Delta(EJI)$, $BF = EJ$ ve $KF = IJ$ olduğu anlaşılır.

Aynı şekilde $BQ = EŞ$ olduğundan $\Delta(BFG) = \Delta(EJŞ)$ ve $FQ = JŞ$ olduğu görülür. Bu iki hattın üzerinde açılar uygun olarak eşittir. *MFQ* ve *XJŞ* üçgenlerinde $FM = JX$ ve ayrıca $FK = JI$ olduğuna göre *FK* ve *JI* hatlarının karelerinden *FM* ve *JX* kareleri çıkarılırsa $KM^2 = IX^2$ olduğu görülür. Aynı şekilde KM^2 ve IX^2 karelerinden birbirine eşit olan BK^2 ve EI^2 kareleri çıkarılırsa $BM^2 = EX^2$ olduğu görülür. Buna göre *BKM* ve *EIX* üçgenleri uygun olarak eşit olduğundan önermenin önerdiği gibi *MBH* ve *TEN* açıları eşittir.

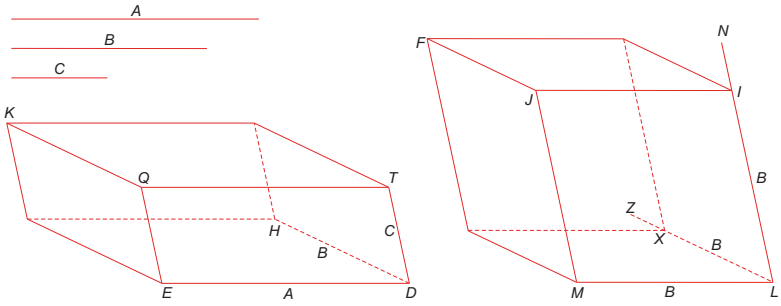
Not: Bu önermede çeşitli durumlarla karşılaşılabilir. *KM* diki *B* noktası üzerine, açı kenarları üzerine ya da açının dışına düşebilir. Her durumda önerme yukarıda verilen yol izlenerek kanıtlanabilir.

***XXXVIII. Önerme*: Uygun açıları eşit olan iki paralel yüzlünün birinde bir cisimsel açıyı oluşturan üç ayrıt uygun orantılı, diğeri ise orta orana eşitse[1], bu paralel yüzlüler eşittir.[2]**

1 Eğer *A, B* ve *C* uygun oranlı hatlarsa, ikinci paralel yüzlü ayrıtlarından biri *B* hattına eşit bir paralel yüzlüdür.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXXVI. Önerme* olarak verilir.

A, *B* ve *C* verilmiş olan uygun orantılı üç hat olsun: Buna göre *A*/*B* = *B*/*C* ilişkisi geçerlidir (*Şekil 41*). Bu durumda *ED* = *A* alıp, *D* noktasında herhangi bir cisimsel açı oluşturalım, *DH* = *B*, *DT* = *C* olduğunu varsayalım ve *DK* paralel yüzlüsünü oluşturalım. Sonra bir *L* noktası etrafında *D* cisimsel açısını ∠(*MLN*) = ∠(*EDT*), ∠(*MLZ*) = ∠(*EDH*) ve ∠(*NLZ*) = ∠(*TDH*) alarak oluşturalım. Nihayet *LX* = *LI* = *B* alarak *LF* paralel yüzlüsünü oluşturalım.

Bu iki paralel yüzlüde *DH* = *LX* = *B* olduğundan yükseklikler eşittir. Paralel yüzlülerin oranı *DQ* ve *LJ* tabanları oranına eşittir. Ayrıca ∠(*MLI*) = ∠(*EDT*) ve oran gereği *A* × *C* = *B*2 olduğundan tabanlar ve önermede öngörüldüğü gibi paralel yüzlüler eşittir.

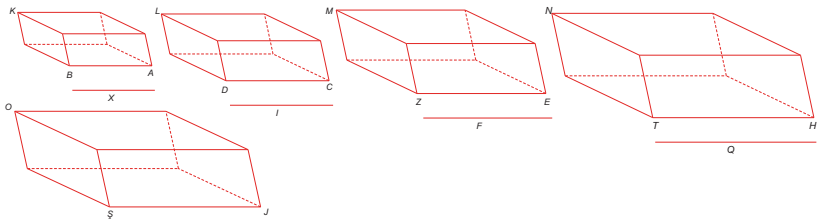


Şekil 41

***XXXIX. Önerme*: Verilen dört hattın ikisi üzerinde benzer iki paralel yüzlü, diğer ikisi üzerinde de başka benzer iki paralel yüzlü bulunur; eğer hatlar uygun orantılıysa, paralel yüzlüler de uygun orantılıdır. Aksine uygun orantılı benzer paralel yüzlülerin ayrıtları da uygun orantılıdır.**[1]

Önerme gereği *AB*, *CD*, *X*, *I* ve *EZ*, *HT*, *F*, *Q* hatlarının orantılı olduklarını varsayalım (*Şekil 42*). Bu durumda *AB*/*CD* = *EZ*/*HT* ya da *AB*/*F* = *EZ*/*Q* yazılabilir. Ancak *XXXVI. Önerme* gereği V(*AK*)/V(*CL*) = *AP*/*I* ve V(*EM*)/V(*HN*)] = *EZ*/*Q* ya da önermede öngörüldüğü gibi V(*AK*)/V(*CL*) = V(*EM*)/V(*HN*) yazılabilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXVII:. Önerme* olarak verilir.

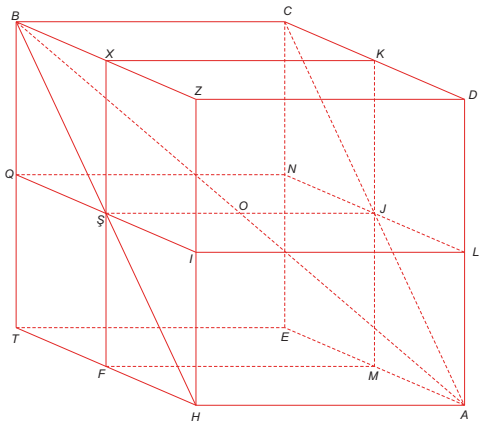


Şekil 42

Aksine eğer paralel yüzlüler orantılıysa *EM* ve *HN* paralel yüzlü ile aynı orantıdaki *JO* paralel yüzlüsünün ayrıtı *JŞ* olmak üzere *EZ*/*HT* = *HT*/*JŞ* ilişkisinin geçerli olduğu kanıtlanmalıdır. Bu durumda V(*AK*)/V(*CL*) = V(*EM*)/V(*JO*) yazılabileceğinden V(*JO*) = V(*AK*) olmalıdır. Şu halde yüzleri ve ayrıtları da eşit olması gerektiğinden *HT* = *JŞ* ya da *CD*/*EZ* = *HT*/*JŞ* yazılabilir.

***XL. Önerme*: Eğer bir küpün iki karşılıklı yüzeyinde ayrıtlar yarıya bölünür ve bu noktalardan küpü iki kısma bölen iki kesişen düzlem geçirilirse, bu iki düzlemin kesişme hattıyla küpün köşegeni birbirlerini ikiye bölerler.**[1]

Verilen *AB* küpünün karşılıklı *AC* ve *HB* yüzlerine ilişkin ayrıtları *K*, *L*, *M*, *N* ve *X*, *I*, *F*, *Q* noktalarında ikiye bölelim, bu noktalardan *LQ* ve *KF* düzlemlerini geçirelim (*Şekil 43*). Bu düzlemlerin ara kesiti *JŞ* ve *AB* doğrusu küpün köşegenidir. Amaç bu iki doğrunun *O* orta noktasında kesiştiğini ya da *ŞT* = *OJ* olduğunu kanıtlamaktır.



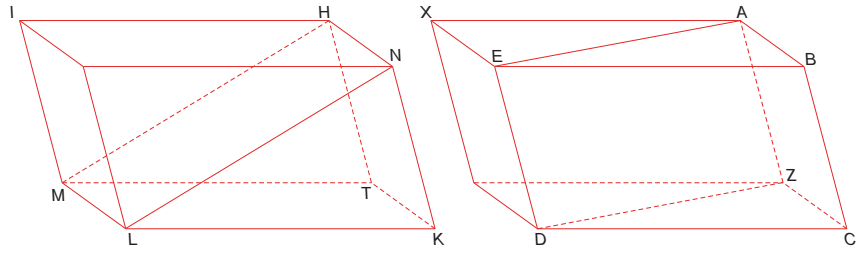
Şekil 43

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XVIII. Önerme* olarak verilir.

Eğer *GŞ*, *ŞH* hatları çekilirse, benzer *BQŞ* ve *ŞFH* üçgenlerinden *BŞ* = *ŞB* olduğu ve *GH* hattının bir düz hat olduğu görülür. Benzer şekilde *CA* hattı da bir düz hat olup *GH*//*CA* olduğundan ∠(*BGT*) = ∠(*EDT*) yazılabilir. Ayrıca ∠(*BTŞ*) = ∠(*AOJ*) olduğundan *BŞO* ve *AJO* üçgenleri eşittir. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi *ŞO* = *OJ* olduğundan *ŞJ* ve *BA* doğruları *O* orta noktasında kesişir.

***XLI. Önerme*: Yükseklikleri aynı olan iki prizmanın birinin tabanı bir üçgen, diğerinin ise bir paralelkenardır. Eğer paralelkenarın yüzeyi üçgenin iki katına eşitse prizmalar eşit olur.**[1]

HNKTLM ve *ABCZDE* prizmalarının tabanları *KLMT* paralel kenar ve *CDZ* üçgeni olarak verilmiştir (*Şekil 44*). Önermeyi kanıtlamak için *CDZ* üçgenini paralelkenara tamamlayalım. Bu durumda paralelkenarın yüzeyi üçgen yüzeyinin iki katına eşit olduğundan, *AD* ve *HL* paralel yüzlüler birbirine eşit olur. Neticede bunların yarısına eşit olan prizmalar da önermede öngörüldüğü gibi birbirine eşit olur.



Şekil 44

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde *XXXIX. Önerme* olarak verilir.

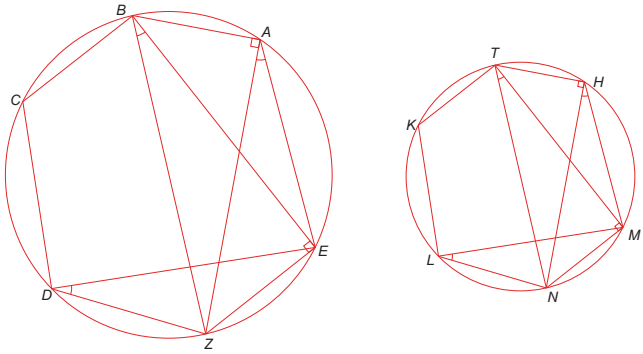
ON İKİNCİ MAKALE

Bu makale 15 önermeden oluşur.[1]

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Bir daireye içten teğet benzer iki çokgen alanlarının oranı daire çaplarının kareleriyle orantılıdır.**

ABCDE ve *HTKLM* benzer iki çokgen, *BZ* ve *TN* bu çokgenlere dıştan teğet dairelerin çaplarını ifade etsin (*Şekil 1*). Önermeyi kanıtlamak için *AZ*, *BE*, *HN* ve *TM* hatlarını çekelim. Benzer çokgenler nedeniyle $\angle(BAE) = \angle(THM)$ ve $\angle(BAZ) = \angle(THN) = 90°$ olduğundan, $\angle(ZAE) = \angle(NHM)$ ve ayrıca kenarları orantılı olduğundan *AEZ* ve *HMN* üçgenleri benzerdir. Şu halde, $\angle(ABE) = \angle(HTM)$ olduğundan, *ABZ* ve *HTN* üçgenleri de benzerdir ve $\angle(EBZ) = \angle(MTN)$ yazılabilir. Bu durumda $AB/HT = BE/TM$ ilişkisi geçerlidir. Ancak *6. Makale 19. Önerme* gereği benzer çokgen yüzeylerinin birbirlerine oranı, uygun kenarlarının birbirlerine olan oranın karesine eşittir. Buna göre $S(ABCDE)/S(HTKLM) = (AB/DT)^2$ olduğuna göre önermede öngörüldüğü gibi $S(ABCDE)/S(HTKLM) = (BZ/TN)^2$ ilişkisi geçerlidir.



Şekil 1

1 Öklid'in özgün eserinde 12. Makale'de 18 Önerme bulunur. Tûsî'de *VI, XIII ve XIV Önermeler* eksiktir.

***II. Önerme*: İki daire alanının oranı, daire çaplarının kareleri oranına eşittir.**

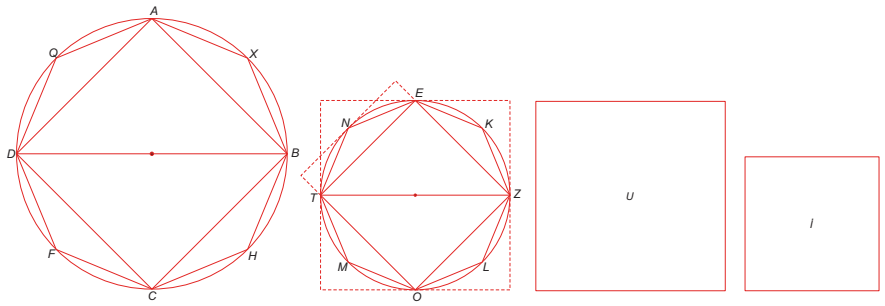
AC ve *EO* dairelerinin çapları *BD* ve *ZT* olarak verilmiş olsun. Bu durumda S(*AC*)/S(*EO*) = BD^2/ZT^2 olduğunu kanıtlamamız gerekir (*Şekil 2*).

Bir an S(*AC*)/S(*EO*) ≠ BD^2/ZT^2 olduğunu, diğer bir deyişle *AC* dairesi alanının *EO* dairesi alanları oranının ya daha küçük ya da daha büyük bir alanın oranına eşit olduğunu varsayalım.

1- İlkin *AC* dairesi *EO* dairesine oranlanırken *EO* alanının daha küçük bir *I* alanına eşit olduğunu varsayalım. *EO* dairesinde *TEZ* ve *ZOT* kavislerini *E* ve *O* noktalarında yarıya bölerek *TE*, *EZ*, *ZO* ve *OT* hatlarını çekelim. Eğer *E*, *Z*, *O* ve *T* noktalarından ayrıca daireye teğet çizilirse, yukarıda elde edilen içten teğet *EZOT* karesinin dıştan teğet *EZOT* karesinin yarı alanına eşit olacağından, içten teğet kare alanının yarı *TZ* dairesinden daha büyük olduğu görülür. Aynı şekilde daire üzerindeki dört kavsi *N*, *K*, *L* ve *M* noktalarında yarıya bölelim ve kirişleri çekelim. Bu durumda elde edilen *TNE*, *EKZ*, *ZLO* ve *OMT* üçgen alanların her biri, elde edilen dört daire keseği alanları yarısından daha büyüktür. Bu işi üçgenlerin alanları keseklerin alanlarından daha büyük oluncaya kadar bu şekilde sürdürürsek neticede *KM* çokgeninin alanı *I* alanından büyük olur.

Bu durumda eğer *AC* dairesinde bu çokgene benzer bir *XF* çokgenini oluşturulursa S(*XF*)/S(*KM*) = BD^2/ZT^2 ifadesi yazılabilir. Ancak bu durumda S(*AC*)/S(*I*) = BD^2/ZT^2 olduğu sonucuna ulaşıldığına göre S(*AC*)/S(*I*) = S(*XF*)/S(*KM*) olması gerekir. Ne var ki varsayım gereği S(*AC*) > S(*I*) olduğundan S(*XF*) > S(*KM*) olması gerekir ki bu bir çelişkidir.

2- İkinci olarak *AC* dairesi *EO* dairesine oranlanırken *EO* alanının daha büyük bir *U* alanına eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda da ZT^2/BD^2 oranı *EO* dairesinden büyük bir alanın *AC* dairesinin alanına oranı gibi olur. Diğer bir deyişle FT^2/BD^2 oranı *EO* dairesinin *AC* dairesinden daha küçük bir alana oranı gibi elde edilir. Bu da yanlış olduğundan önermenin öngördüğü hükmün doğru olduğu sonucuna varılır.



Şekil 2

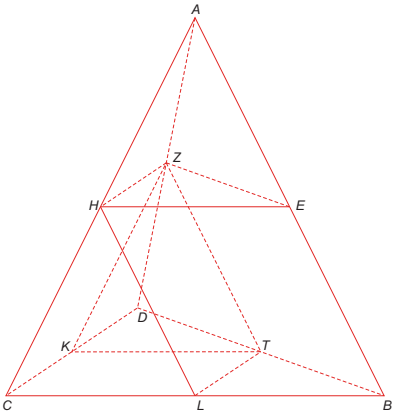
Not: Kesekler içine çizilen üçgenlerin keseklerin yarısından büyük olmaları şu şekilde açıklanabilir: eğer üçgenlerin tepelerinden keseklerin kirişlerine paralel hatlar çizilirse, elde edilen paralelkenar alanları keseklerin alanından daha büyük olur. Bu durumda paralelkenarların yarısı olan üçgenler keseklerin yarısından daha büyüktür.

***III. Önerme*: Üçgen tabanlı herhangi bir piramit ona benzer iki piramit ve onun yarısından büyük olan iki eşit hacimli prizmaya ayrılabilir.**

Tabanı *ABC* ve tepesi *D* olan bir *ABCD* prizmasının verildiğini varsayalım (*Şekil 3*). Piramidin ayrıtlarını *L*, *K*, *T*, *Z*, *E* ve *H* noktalarında ikiye bölelim. *HE*, *EZ*, *HZ*, *ZT*; *ZK*; *HL*, *TL* ve *KT* hatlarını çekelim. Böylece önermede söz konusu edilen piramitler elde edilmiş olur. *AEHZ* ve *ZTKD* piramitlerinin üçgen yüzeyleri, büyük piramidin ayrıtları yarıya bölünerek elde edildiğinden, uygun olarak eşittir. Aynı nedenden büyük piramit ile küçük piramitler benzerdir.

Şimdi Büyük piramitten bu iki küçük piramit çıkarıldığında geriye kalan *ZHLT* yüzeyleri müşterek, yükseklikleri eşit olan, *ZKTHCL* ve *ZTHEBL* prizmalarını göz önünde bulunduralım. İlkinin *HCL* tabanı üçgen, ikincisinin *HEBL* tabanı ise bir paralelkenardır. *BL* = *LC* ve *EH*//*BC* olduğundan, *HEBL* paralelkenar alanı *HCL* üçgen alanının iki katına eşit olduğundan *ZKTHCL* ve *ZTHEBL* prizmalarının hacimleri eşittir. Lakin tabanı *HCL* olan prizma *ZTKD* piramidinden büyüktür. Çünkü her ikisinin tabanı ve yüksekliği eşit olmakla birlikte birinin tepesi *D* noktası diğerinin

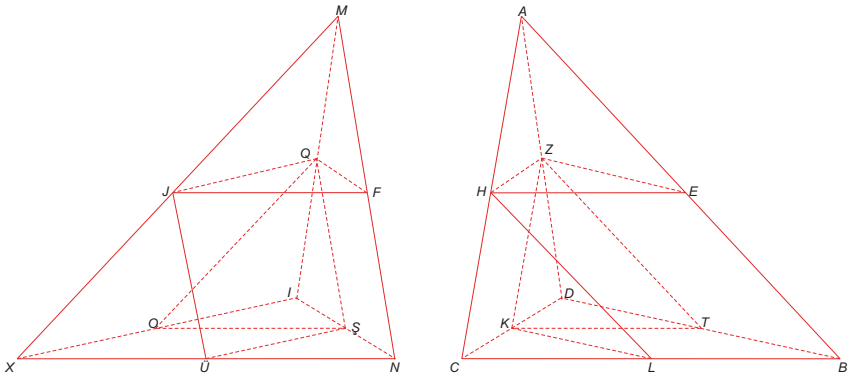
ise *ZKT* üçgendir. Sonuç olarak önermenin öngördüğü gibi bu iki prizma birbirine eşit ve ikisi birlikte büyük piramidin yarısından büyüktür.



Şekil 3

***IV. Önerme*: Üçgen tabanlı ve eşit yükseklikli herhangi iki piramit, iki benzer piramit ve iki eşit hacimli prizmaya bölünürse, piramitlerden birinin tabanının diğerine oranı birinin iki prizmasından birinin diğerinin iki prizmasından birinin oranı kadardır.**

Verilmiş olan üçgen tabanlı ve eşit yükseklikli *ABCD* ve *MNXI* piramitleri önceki önermede olduğu gibi iki benzer piramit ve eşit hacimli prizmaya ayrıldığını varsayalım (*Şekil 4*). Bu durumda S(*ABC*)/S(*MNX*) oranının *ABCD* piramidiyle *MNXI* piramidi iki prizması oranına eşit olduğunu kanıtlamamız gerekir. *BC*/*LC* = *NX*/*ÜX* olduğuna göre BC^2/LC^2 oranı *6. Makale 18. Önerme gereği* S(*ABC*)/S(*HLC*) oranına ve $NX^2/ÜX^2$ oranı da S(*MNX*)/S(*JÜX*) oranına eşittir. Şu halde S(*ABC*)/S(*MNX*) = S(*HLC*)/S(*JÜX*) yazılabilir. Buna göre *ABC*/*MNX* oranı, tabanı *HLC* üçgeni olan prizmanın tabanı *JÜX* olan prizmanın oranı gibidir. Her ikisinin yüksekliği eşit olduğu gibi her biri paralel yüzlünün yarısına eşit olduğundan oranları da eşittir. Şu halde tabanı *HLC* üçgeni olan prizmanın, tabanı *JÜX* üçgeni olan prizmaya oranı, birincinin iki mislinin, ikinciye iki misline olan oranı gibidir. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi piramit tabanlarının oranı, iki prizmanın iki prizmaya oranı gibidir.



Şekil 4

Sonuç: Eğer bu dört piramidin her biri iki piramit ve iki prizmaya bölünür ve bu işlem sonsuza kadar sürdürülürse, bu durumda bir tabanın uygun tabana olan oranı uygun prizmaların oranı gibidir. Birleşik oranlarda birinci hattın ikinci hatta oranı, birinci hatlar toplamının bütün ikinci hatlar toplamına eşit olması kuralı gereği *ABC* tabanının *MNX* tabanına olan oranın, birinci piramitteki sonsuz sayıda tüm piramitler toplamının, ikinci piramitteki sonsuz sayıdaki tüm piramitler toplamı oranına eşittir.

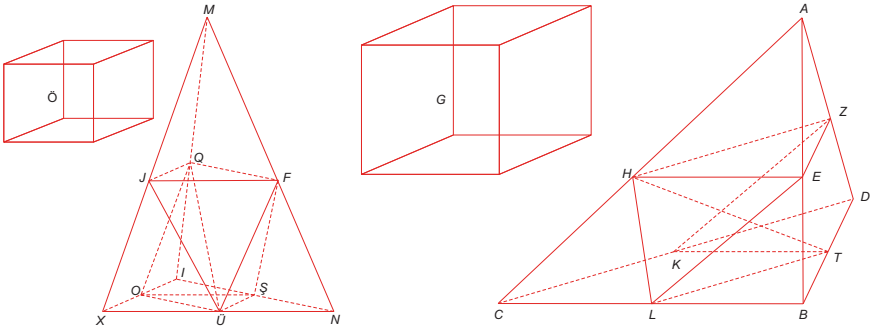
***V. Önerme*: Üçgen tabanlı eşit yükseklikli iki piramitte hacimler oranı tabanlar oranına eşittir.**[1]

Üçgen tabanlı ve eşit yükseklikli *ABCD* ve *MNXI* piramitlerinin verildiğini, S(*ABC*)/S(*MNX*) oranının V(*ABCD*)/V(*MNXI*) oranından küçük, büyük ya da eşit olduğunu varsayalım (*Şekil 5*).

1- Küçük cismin *O* ve V(*MNXI*) - *O* = *G* olduğunu varsayalım. *MNXI* piramidini *3. Önerme*de olduğu gibi iki piramit ve iki prizmaya ayıralım. Daha sonra elde edilen iki piramidi de iki piramit ve iki prizmaya ayıralım. Bu işlemi *O* cisminden küçük bir piramitle karşılaşıncaya kadar sürdürelim. Bu durumda prizmalar *G* cisminden büyük olurlar.

1 Bu önermenin doğruluğu, piramit taban alanı *A* ve yüksekliği h olmak üzere hacmi $V = A.h/3$ ilişkisi gereği, piramitlerin yükseklikleri eşit olduğundan ($h_1 = h_2 = h$), $V_1/V_2 = A_1/A_2$ ilişkisinden kolayca görülebilir.

Aynı şekilde *ABCD* piramidini de piramit ve prizmalara ayıralım. Bu durumda S(*ABC*)/S(*MNX*) taban yüzeyleri oranı V(*ABCD*)/V(*MNXI*) prizma hacimlerine eşit olur. Ancak varsayın gereği S(*ABC*)/S(*MNX*) oranı V(*ABCD*)/V(*O*) prizma hacimleri oranına eşit olur. Oran değiştirildiğinde V(*MNXI*)/V(*O*) prizma hacimleri oranına eşit olmalıdır. Ancak *MNXI* > *O* olduğuna göre *ABCD* prizmaları *ABCD* piramidinden büyük olması gerekir ki bu yanlıştır.



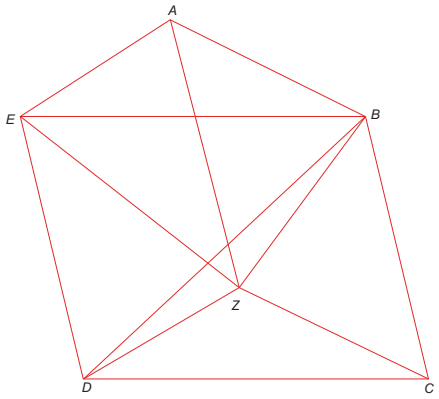
Şekil 5

2- Aynı şekilde piramit tabanları oranı *ABCD* piramidinin *MNXI* piramidinin büyük cisimleri oranına eşit olduğu varsayılabilir. Bu durumda S(*MNX*)/S(*ABC*) tabanları oranı V(*MNXI*)/V(*O*) hacimler oranına eşit olması gerekir ki bu da yanlıştır. Böylece önermenin hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.

***VI. Önerme*: Üçgen tabanlı herhangi bir prizma, üçgen tabanlı üç eşit piramide bölünebilir.**[1]

Üçgen *ZCD* tabanlı *ABEZCD* prizmasının verildiğini varsayalım (*Şekil 6*). Eğer *BD*, *BZ* ve *EZ* hatları çekilirse prizma önermenin öngördüğü gibi üç üçgen tabanlı eşit piramide ayrılmış olur. İlki tabanı *BCD* ve tepesi *Z* olan piramit, ikincisi ilkine eşit *EBD* tabanlı ve tepesi yine *Z* olan piramittir. *ABEZ* piramidi ise, her ikisinin tepesi *B* ve *ZAE* ile *EZD* tabanları eşit olan ikinci piramide eşittir.

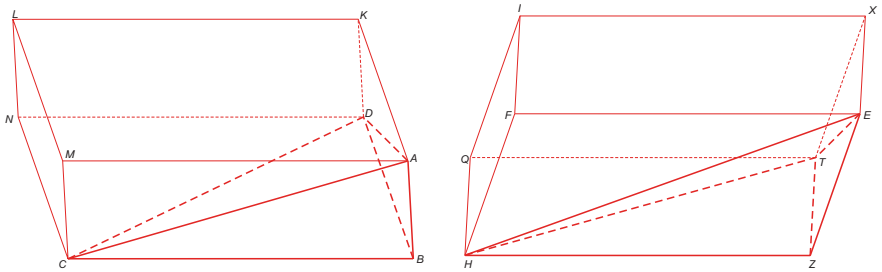
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *VII. Önerme* olarak verilir.



Şekil 6

***VII. Önerme*: Üçgen tabanlı eşit hacimli piramitlerde taban alanlarının oranı yükseklikle ters orantılıdır; aksine taban alanları ters orantılı piramitler birbirine eşittir.**[1]

Üçgen tabanlı, eşit hacimli *ABCD* ve *EZHT* piramitlerinin verildiğini varsayalım (*Şekil 7*). Önermeyi kanıtlamak için piramitleri iki eşit paralel yüzlüye dönüştürelim. Her üçgen tabanlı prizma 3 piramit hacmine eşit olduğundan, bir paralel yüzlü hacmi bir piramit hacminin 6 katına eşittir. Buna göre oluşan *BL* ve *EQ* paralel yüzlüler birbirine eşittir. Ancak *11. Makale*, *34. Önerme* gereği eşit hacimli paralel yüzlülerde tabanların oranı yükseklikle ters orantılıdır ve bu önermenin tersi de geçerlidir. Şu halde paralel yüzlüler için geçerli olan önerme piramit tabanlarının oranı ve tersi için de geçerlidir.



Şekil 7

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *IX. Önerme* olarak verilir. Bir piramidin hacmi *V*, taban alanı A ve yüksekliği h olduğundan, bu önermenin doğruluğu iki piramit hacmi eşitlenerek $V = A_1.h_1/3 = A_2.h_2/3$ ya da $A_1/A_2 = h_2/h_1$ ilişkisinden görülür.

***VIII. Önerme*: Üçgen tabanlı iki benzer piramidin hacim oranı uygun piramit ayrıtı oranının küpüne eşittir.**[1]

ABCD ve *EZHT* üçgen tabanlı iki benzer piramit verilmiş olsun (*Şekil* 7). Bu iki piramidi benzer *AL* ve *EI* paralel yüzlüler oluşacak şekilde tamamlayalım. Piramitlerin hacmi paralel yüzlülerin 1/6 oranına eşit olduğundan piramit hacimlerinin oranı paralel yüzlülerin oranına eşittir. *11. Makale 36. Önerme* gereği benzer paralel yüzlülerin oranı uygun ayrıtların küpleriyle orantılı olduğundan benzer piramitlerin oranı da uygun ayrıtların küpüyle orantılıdır.

***IX. Önerme*: Bir koninin hacmi eşit taban ve yükseklikteki bir silindirin üçte birine eşittir.**[2]

Bir an bunun böyle olmadığını varsayalım:

1- Koni hacminin silindirin üçte birinden küçük olduğunu ve silindir hacminin 3 katından *Q* hacmi kadar daha büyük olduğunu varsayalım (*Şekil 8*). Silindir ve koni tabanı *ABCD* dairesiyle verilmiş olsun. Daireye içten teğet *ABCD* karesini çekelim ve bu karenin üzerine yüksekliği silindirin yüksekliğine eşit olan bir paralel yüzlü oluşturalım. Bu paralel yüzlünün hacmi silindirin yarı hacminden büyüktür. Sonra dairenin dört kavsini *E*, *Z*, *H* ve *T* noktalarında yarıya bölüp üçgenler oluşturalım. Bu üçgenlerin üzerine yükseklikleri silindirin yüksekliğine eşit prizmalar oluşturalım. Bu prizmaların her biri geriye kalan kısmın yarısından büyüktür. Bu işlemi silindirin geriye kalan kısmı *Q* hacminden küçük oluncaya kadar sürdürelim. Bu durumda prizma hacimlerinin toplamı koni hacminden üç misli daha büyük olur. Sonra prizmaların tabanları üzerine yüksekliği silindir ve koni yüksekliğine eşit olan bir piramit kuralım. Bu piramidin içinde aynı sayıda piramit ve prizma bulunabilir. Bu prizmaların üç katı koniğin üç katından büyük olan prizmalara eşittir. Böylece koniğin içinde yer alan piramit koniden büyük olur ki bu yanlıştır.

2- Koninin silindirin üçte birinden büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda silindir koninin üç katından küçük olur. Yukarıda olduğu gibi,

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *VIII. Önerme* olarak verilir.

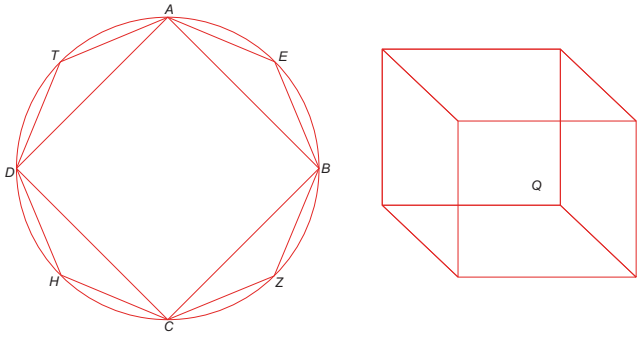
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *X. Önerme* olarak verilir. Eğer *R* taban yarıçapı ve *h* yükseklik olarak alınırsa silindir hacmi $V_s = \pi R^2 h$, koni hacmi $V_k = \pi R^2 h/3$ olduğundan $V_k/V_s = 1/3$ olduğu görülür.

koninin içine aynı yükseklikte bir piramit yerleştirilir. Bu durumda silindirden üç misli büyük olur. Sonra piramidin tabanı üzerine aynı yükseklikte prizmalar yerleştirilir. Bu prizmalar piramidin üç misline eşittir ve silindirden büyüktürler. Böylece silindirin içinde bulunan prizma silindirden büyük olur. Bu yanlış olduğundan önerme kanıtlanmış olur.

Not-1: Burada şöyle bir kural göz önünde bulundurulur. Silindir ve koninin yan yüzeyinde yer alan ortak noktalı iki hat yüzeyin içinde kalmak zorundadır. Bu ise çevredeki iki noktayı birleştiren teğet hattın kesinlikle daire dâhilinde kalmasını sağlatmak anlamına gelir.

Not-2: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. Silindirin üçte birinden küçük olan herhangi bir cisim onun konisinden küçüktür. Bu nedenden dolayı silindirin üçte birinden büyük olan bir cisim de koniden büyüktür:

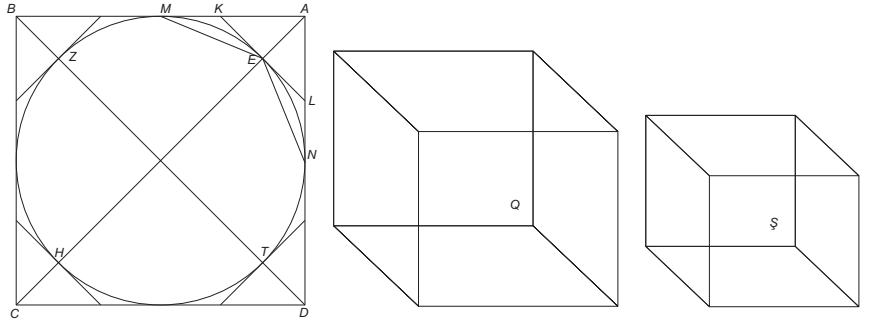
1- Koni hacminin üç katı silindir hacminin *Q* hacmi kadar küçük olduğunu varsayalım (*Şekil 8*). Bunun için verilen silindirin içinde kalan bölgede *Q* hacminden küçük ve toplamı küçük cismin üç mislinden büyük olan prizmalar oluşturulur. Sonra bu koniğin içinde bu prizmanın tabanları üzerine bir piramit kuralım. Bu piramitler koniden küçük ve prizmanın 1/3'üne eşittir. Ne var bu prizmalar küçük cisimden büyüktürler. Böylece silindirin 1/3'ünden küçük olan bu cisimler koniden daha çok küçüktür.



Şekil 8

2- Koni hacminin üç katı silindir hacminin *Q* hacmi kadar büyük olduğunu varsayalım (*Şekil 9*). Taban dairesi dışında *ABCD* karesini oluşturalım ve bu karenin üzerine silindir yüksekliğine eşit bir prizma oluşturalım. Bu prizma önceki cismin üç katından ya büyüktür ya da büyük değildir. Eğer

büyük ise, bu durumda silindirle prizmanın farkı *Ş* cisminden büyük olur. Bu farkın *Q* cismine eşit olduğunu varsayalım. Sonra kare köşegenlerini çekelim. Bu hatlar daire çevresini *E*, *T*, *H* ve *Z* noktalarında keser. Bu noktalardan daireye teğet hatlar çekelim. Bu teğetler silindirle prizma farkının yarıdan çok kısmını silindirden ayırır. Bu husus şu şekilde açıklanabilir: *AB* ve *AD* hatları daireye *M* ve *N* noktalarında teğettir. Daireye *H* noktasında teğet olan *KL* hattı, *AB* ve *AF* hatlarını *K* ve *L* noktalarında keser. *EM* ve *EN* hatlarını çekelim. Simetri nedeniyle *AM* = *AN* ve *KE* = *EN* olur. *AKE* dik üçgeninde *AK* > *KE* olduğuna göre *AK* > *KM* ve S(*AKE*) > S(*KEM*) ve benzer şekilde S(*ALE*) > S(*LEN*) olduğu görülür. Şu halde S(*ALK*) alanı *A* köşesi etrafındaki farkın yarısından büyüktür. Bu işlemi o kadar kez sürdürelim ki geriye kalan prizma ile silindir hacim farkı *Ş* hacminden küçük olsun ve neticede geriye toplamı büyük cismin üç katından büyük olmayan, lakin hacmi silindirden büyük olan bir cisim kalsın. Sonra bu cismin tabanı üzerine onun 1/3'üne eşit olan bir piramit kuralım. Bu silindirin 1/3'ünden büyük olan cisim silindirin koniğinden büyük olur. Bu mümkün olmadığından, konik hacminin silindir hacminin 1/3 olması gerektiği, olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.



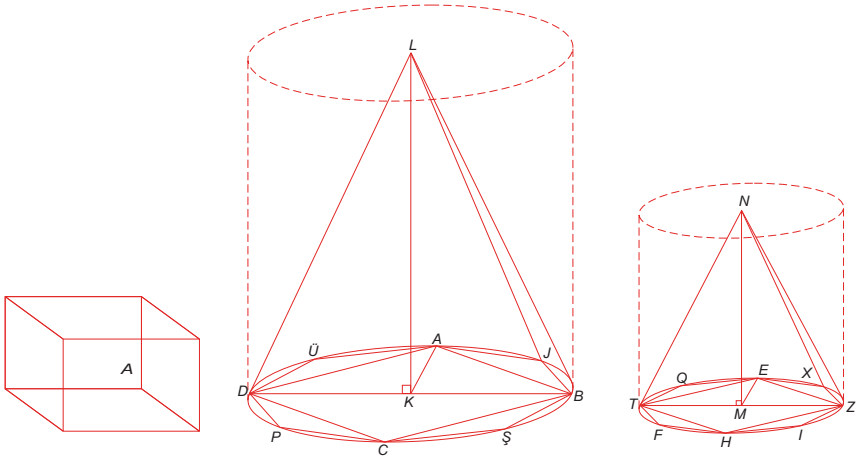
Şekil 9

***X. Önerme*: Benzer silindir ya da konilerin hacim oranı taban çaplarının küpüyle orantılıdır.**[1]

İki benzer silindir ya da koninin tabanı *ABCD* ve *EZHT*, çapı *BD* ve *ZT*, ekseni ise *KL* ve *MN* olarak verilmiş olsun (*Şekil 10*). Bir an *ABCDL*

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *XII. Önerme* olarak verilir. Eğer *R* taban yarıçapı, *D* taban çapı ve h yükseklik olarak alınırsa silindir hacmi $V_s = \pi R^2 h$, koni hacmi $V_k = \pi R^2 h/3$ ve benzer silindir ve konilerde $R_1/R_2 = h_1/h_2$ olduğundan benzer silindir ve konilerin hacim oranının $V_1/V_2 = R_1^3/R_2^3 = D_1^3/D_2^3$ olduğu görülür.

silindir ya da koniğin *EZHTN* silindir ya da koniğe olan oranın BD^3/ZT^3 oranına eşit olmadığını düşünelim. Çaplar küpünün oranı birinci koni ile ikinci koni hacminden daha küçük ya da büyük bir cismin oranına eşit olduğunu varsayalım.



Şekil 10

1- İlkin, taban çapları küpü oranının, birinci koniğin ikincisinden *A* hacmi kadar küçük olan bir koniğin oranına eşit olduğunu varsayalım. İkinci koniğin taban dairesi içine içten teğet *EZHT* karesini çizelim ve sonra bu karenin üzerine, yüksekliği birinci koni yüksekliğine eşit olan bir piramit oluşturalım. Geriye kalan alanlara ilişkin yayları ikiye bölelim ve bunların üzerine birer piramit oluşturalım. Bu işlemi *EXZIHFTQ* hacminden geriye kalan fark hacim *A* hacminden küçük oluncaya kadar sürdürelim. Sonra *ABCD* dairesinin içine bu tabana benzer *AJBŞCPDÜ* tabanını oluşturup üzerine koni tepesiyle eşleşen bir piramit oluşturalım.

Koniler benzer olduğundan bu iki piramit de benzerdir ve $LK/BD = NM/ZT$ ilişkisi yazılabilir. Ayrıca $JK/XM = LK/NM = BK/ZM$ ilişkileri geçerlidir. *M* ve *K* açıları dik ve kenarlar uygun orantılı olduğundan *BKL* ve *ZMN* üçgenleri de benzerdir. Şu halde BL/ZN ve JL/XN oranları da yukarıdaki oranlara eşittir. Ayrıca $\angle(BKJ) = \angle(ZMX)$ ve uygun kenarlar orantılı olduğundan *BJL* ve *ZXN* üçgenleri de benzerdir. Neticede *BJKL* ve *ZXMN* piramitlerinin tüm üçgenleri benzer olduğundan kendileri de

benzerdir. İki uygun eksen etrafında yer alan piramitlerin tümü benzerdir. Bu piramitlerden her birinin karşılıklı hacim oranı, ayrıtlarının küpü, hatta BD^3/ZT^3 oranına eşittir. Bu oran *ABCDL* konisinin *EZHTN* konisinden küçük piramide oranı olarak alınmıştı. Şu halde *ABCDL* içindeki piramidin ana koniye oranı, *EZHTN* konisi içindeki piramidin küçük cisme olan orana eşittir. Ne var ki bu sonuncu piramit küçük cisimden büyüktür. Bu durumda *ABCDL* içindeki cisim koniden ya da kendisinden büyük olması gerekir ki bu yanlıştır.

2- Çap küpleri oranının birinci koni hacminin ikinciden büyük bir cisme olan oranına eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda bu oranın tersi olan ZT^3/BD^3 oranı *EZHTN* konisinin *ABCDL* konisinden küçük bir cisme olan oranına eşit olur ki bunun da yanlış olacağı açıktır. Benzer silindir hacimlerinin oranı için de aynı sonuca ulaşılacağından, önerme hükmü kanıtlanmış olur.

***XI. Önerme*: Yükseklikleri aynı olan koni ya da silindirlerin hacim oranı taban alanlarının oranına eşittir.**[1]

Yükseklikleri $MN = KL$ eşit, ancak *ABCD* ve *EZHT* taban daireleri farklı iki koni ya da silindirde hacimlerin oranı taban dairelerinin oranına eşittir (*Şekil 10*).

1- Taban oranının birinci koninin ikinci koniden küçük bir cismin oranına eşit olduğunu varsayalım. Yukarıda gösterildiği gibi ikinci koni içinde bu cisimden büyük bir piramit oluşturalım. Birinci koni içinde de böyle bir piramit kuralım. Bu durumda her iki piramidin yüksekliği eşit olduğundan hacimlerin oranı $BF^2/ET^2 = S(ABCF) = S(HEDT)$, başka bir deyişle yüksekliği *KL* olan koniğin küçük cisim hacmi oranına eşit olmalıdır. İkinci piramit küçük cisimden büyük olduğundan birinci piramidin kendi konisinden büyük olması gerekir ki bu yanlıştır.

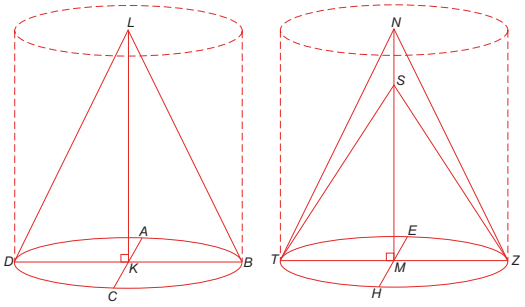
2- İkinci olarak taban oranının birinci koninin ikinci koniden büyük bir cismin oranına eşit olduğunu varsayalım. Bu varsayımın da yanlış olduğu

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *XI. Önerme* olarak verilir. Eğer A taban alanı ve h yükseklik olarak alınırsa silindir hacmi $V_S = Ah$, koni hacmi $V_K = Ah/3$ olduğundan eşit yükseklikteki koni ya da silindirlerin hacim oranı $V_1/V_2 = A_1/A_2$ olarak elde edilir.

yukarıdaki mantık silsilesi yürütülerek gösterilebilir. Böylece önerme hükmünün doğruluğu kanıtlanmış olur. Aynı önerme hacmi eşit yükseklikteki üç koni hacmine eşit olan silindirler için de geçerlidir.

***XII. Önerme*: Hacimleri eşit koni ya da silindirlerde taban alanlarıyla yükseklikleri ters orantılıdır. Aksine taban alanlarıyla yükseklikleri ters orantılı koni ya da silindirler eşittir.**[1]

Birinci koninin tabanı *ABCD* dairesi yüksekliği *KL*, ikinci koninin tabanı *EZHT* dairesi yüksekliği ise *MN* olsun (*Şekil 11*). Eğer iki yükseklik eşitse, bu durumda tabanlar da eşittir. Bu durumda önerme kanıtlandığı gibi aksi önerme de kanıtlanmış olur.



Şekil 11

Yüksekliklerin farklı, *MN* > *KL* olduğunu varsayalım. Bu durumda *MN* üzerinde *KL* hattına eşit *MS* hattı ayrılır. *ABCDL* ve *EZHTN* konilerinin eşit olduğunu varsayalım. Ancak bu koninin *HEDTS* konisine oranı aynıdır. Ne var ki bu konilerden birinin *HEDTS* konisine oranı tabanların oranı kadardır. Diğer koninin ise bu koniye oranı *MN*/*MS* oranına eşittir. *ABCD* dairesinin *HEZT* dairesine oranı *MN*/*MS* oranına eşittir. *MS* = *KL* olduğundan önerme kanıtlanmış olur.

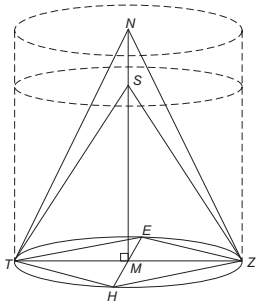
Aksi önermeyi kanıtlamak için böyle bir ters oranın verilmiş olduğunu varsaymak gerekir. Bu durumda *ABCDL* ve *HEZTN* konilerinin *HEZTS'* konisine oranı olacağından üç koninin hacimleri de eşit olur. Aynı şekilde önermenin silindirler için de geçerli olduğu kanıtlanabilir.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *IV. Önerme* olarak verilir. Eğer A taban alanı ve h yükseklik olarak alınırsa silindir hacmi $V_S = Ah$, koni hacmi $V_K = Ah/3$ olduğundan hacimleri eşit koni ya da silindirlerde $A_1h_1 = A_2h_2$ ilişkisinden $A_1/A_2 = h_2/h_1$ oranı elde edilir.

Not: Burada *HEZTN* konilerinin *HEZTS* konisine olan oranı *MN* yüksekliğinin *MS* yüksekliğine olan oranı olarak alınmış, ancak bu yaklaşımın geçerliği açıklığa kavuşturulmamıştır.

Bir an *MN*/*MS* oranının *ETN* konisinin *ETS* konisine olan oranına eşit olmadığını ve *MN*/*MS* oranının *ETN* konisinin *ETS* konisinden büyük veya küçük bir cismin orana eşit olduğunu varsayalım.

1- İlkin *MN*/*MS* oranının *ETN* konisinin *ETS* konisinden küçük bir *A* cismine eşit olduğunu varsayalım (*Şekil 12*). Bu durumda *ETS* konisi içinde *A* cisminden büyük olan bir piramit oluşturalım. *ETN* içinde de aynı tabanlı başka bir piramit oluşturalım. Bu iki piramidin içinde aynı sayıda tabanı üçgen olan ve onları çevreleyen piramitler vardır. Üçgen tabanlı bu piramitlerden her birinin hacmi temel piramide oranı tamın tama olan oranı kadardır. Ne var ki onlardan biri olan *HTM*N piramidinin karşılığı olan *HTMS*' piramidine oranı S(*HMN*)/S(*HMS*) oranına eşittir. Onda ise uzun piramidin kısa piramide oranı *MN*/*MC'* oranına eşittir. Bu orantı değiştirilirse, uzun piramidin kendi koniğine oranı, küçük piramidin küçük cisme olan orana eşittir. Ne var ki küçük cisim küçük piramitten büyük olduğu için, piramidin onu çevreleyen temel koniden büyük olması gerekir. Bu ise yanlıştır.



Şekil 12

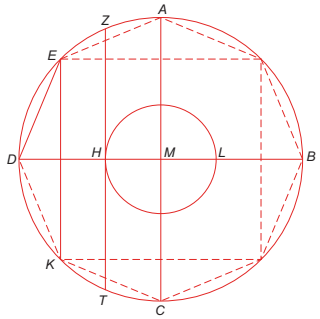
2- Aynı şekilde *MN*/*MS* oranının *ETN* konisinin *ETS* konisinden büyük bir *A* cismine eşit olamayacağı da kanıtlanabilir. Şu halde *MN*/*MS* oranı söz konusu konilerin oranına eşittir.

Diğer bir kanıtlama yöntemi: Silindirden başlayarak *NTE* silindiri ve *MN* ekseninin, aynı şekilde *ETS* silindiri ve *MS* ekseninin aynı sayıda bir

katını alalım. *NTE* silindiri *ETS* silindirine oranı, *MN* ekseni *MS* ekseninin oranına eşittir. Buna göre *NTE* silindirinin üçte biri, *ETS* silindiri üçte birine oranı, yani koninin koniye oranı *MN*/*MS* oranına eşittir.

***XIII. Önerme*: Verilen müşterek merkezli iki dairenin büyüğü içine, küçük daireye dokunmamak koşuluyla, eşit kenarlı bir çokgen yerleştirilmesi.**[1]

Müşterek *M* merkezli *ABCD* ve *HL* daireleri verilmiş olsun (*Şekil 13*). *AC* ve *BD* dik açıyla kesişen iki çap olduğunu varsayalım. *H* noktasında *HL* dairesine teğet olacak şekilde bir *ZHT* hattını çizelim. Bu teğet büyük dairenin *AMC* çapına paraleldir. Sonra *AD* yayını yarıya bölelim. Bu yarıyı da iki eşit kısma bölelim. Bu işlemi *ED* yayından daha küçük bir *EZ* yayı elde edinceye kadar sürdürelim.[2] Sonra *ZT* hattına paralel olan *EK* hattını çekelim. Bu hat *HL* dairesine değmez. Nihayet büyük daire çevresini *ED* hattına eşit olan yaylara bölelim ve kirişleri çekelim Böylece istediğimiz eşit kenarlı çokgeni elde etmiş oluruz.



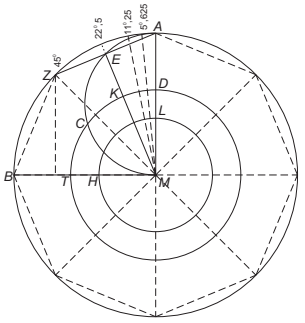
Şekil 13

Not: Burada istenildiği kadar küçük bir büyüklüğü elde etmek için büyük büyüklüğü gerektiği kadar yarıya bölme işlemi uygulanmıştır.

Bu önerme kanıtlamanın başka bir yolu daha vardır. Tepesi *M* merkezinde bulunmak üzere *AMB* dik üçgenini oluşturalım (*Şekil 14*). *AM* hattı üzerinde *ACM* yarı dairesini çizelim. Sonra *AM* hattı üzerinde herhangi bir *D* noktası alalım. *M* noktası merkez, *MD* yarıçaplı bir *DCT* çeyrek dairesi

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *XVI. Önerme* olarak verilir.
2 Burada 2'ci yarıya bölmede *EZ* < *ED*

çizelim. *AMB* açısını *B* noktasından *A* noktasına doğru ardışık yarıya bölelim (45°; 22,5°; 11,25°; 5,625°; …). Bu açı noktaları yatay eksene izdüşürülür ve *M* merkezine bağlanarak tam bölen hatları elde edilir. İzdüşümün iç daireyi kestiği son tam bölen hattı *DCT* yayını *K* noktasında keser. *KM* aranan tam bölen hattını tanımlar. *KM* hattı *ACM* yayını *E* noktasında keser. *AE* hattı büyük daireyi *Z* noktasında kesinceye kadar uzatılır. *ME* > *MK* = *MD* > *ML* olduğundan *AZ* hattı *HL* dairesine dokunmaz. *AZ* yayı ise daire ölçüsündedir, diğer bir deyişle *AZ* yayına tam bölünür. Çünkü *AZ* yayının yarısı dik açının ardışık olarak yarıya bölünmesinden elde edilir.



Şekil 14[1]

Buna göre eğer büyük daire *AZ* yayının eşit kısımlarına bölünürse, bu bölümlere ilişkin kirişler kurmayı amaçladığımız eşit kenarlı çokgeni oluşturur.

***XIV. Önerme*: Verilen müşterek merkezli iki kürenin büyüğü içine, küçük küreye dokunmamak koşuluyla, düzgün bir çokyüzlü cismin yerleştirilmesi.**[2]

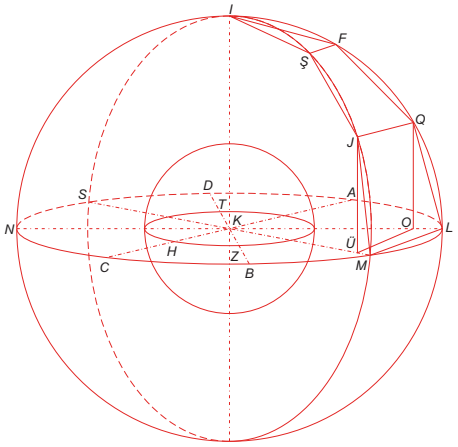
K eş merkezli *DB* ve *TZ* kürelerinin verildiğini varsayalım. Amaç *DB* küresine içten teğet olan ancak *TZ* küresine temas etmeyen bir çokyüzlü elde etmektir (*Şekil 15*).

Eğer küreler merkezden geçen herhangi bir düzlemle kesilirse, yarıçapları küre yarıçaplarına eşit olan birer büyük daire elde edilir. Burada *ABCD* dış küreye ilişkin bir büyük daire olduğunu ve *AKC* ve *BKD* hatlarının bu

1 Özgün eserde bu çizim şekil hatalıdır

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *XVII. Önerme* olarak verilir.

dairenin içinde birbirine dik iki çapı ifade ettiğini varsayalım. Amacımız *ABCD* dış dairesinin içine içten teğet olan, merkezdeki daireye temas etmeyen ve çift sayıda kenardan oluşan düzgün bir çokgenin elde edilmesidir. Bu tür bir düzgün çokgene ilişkin kirişler, *AB* dörtte bir dairesi için, *AL*, *LM* ve *MB* olarak verilmiş olsun.[1] *LK* ve *MK* hatlarının çekildiğini ve dairenin diğer tarafındaki *N* ve *S* noktalarına kadar uzatıldığını düşünelim. Büyük dairenin *K* merkezinden *ABCD* büyük dairesine dik *IKH* çapını çekelim. *IKH* çapı ile *LKN* ve *MKS* çaplarını ikişerden kapsayan düzlemler küreyi *LINH* ve *MISH* büyük daireleri boyunca keser. Bu büyük daireler üzerinde *ABCD* büyük dairesine dik *LIN* ve *MIS* yarı dairelerini göz önünde bulunduralım. *AB*, *IL* ve *IM* çeyrek daireleri birbirine eşittir. Şu halde *IL* ve *IM* çeyrek dairelerindeki kiriş sayısı, *AB* çeyrek dairesindeki *AL*, *LM* ve *MB* kiriş sayıları kadar olmak zorundadır. *LQ*, *QF*, *FI* ve *MJ*, *JŞ*, *ŞI* kirişlerini ve *QJ*, *FŞ* hatlarını çekelim. Son olarak *Q* ve *J* noktalarından *ABCD* büyük dairesine *QO* ve *JÜ* diklerini inerek *OÜ* hattını çekelim.



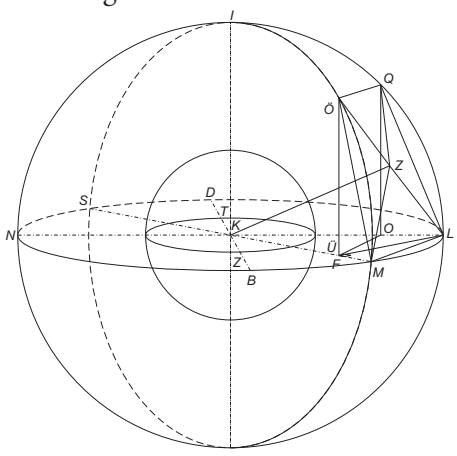
Şekil 15

Çizim gereği *QL* = *JM* ve *QO* = *JÜ* olduğundan *OL* = *ÜM*, ayrıca *KL* = KM olduğundan geri kalan *KO* = *KÜ* kısımlar da eşittir ve neticede *OÜ* ile *LM* hatları paraleldir. Buna göre *QLMJ* ikizkenar yamuğu bir düzlemde yer alır. Benzer şekilde *FQJŞ* ikizkenar yamuğu ve *IFŞ* ikizkenar üçgeni de bir

1 Çizimde her çeyrek daire 3 kısma bölündüğünden çevrede 30°'lik 12 adet kiriş bulunur.

düzlemde yer alır. Şu halde eğer *L*, *M*, *Q*, *J*, *F*, *Ş* ve *I* noktaları *K* merkezine birleştirilirse, *LI* ve *MI* çeyrek daireleri arasında, tabanları *LQJM*, *QFŞJ* ve *FIŞ* tepeleri *K* olan piramitlerin bileşiminden oluşan, yarı dilim şeklide çok yüzlü bir cisim ortaya çıkar. Bu işlem *AL* ve *MB* yayları ile diğer üç kadrana ve kürenin alt yarsına da uygulanırsa, önermede amaçlanan çok yüzlü cisim elde edilmiş olur.

Elde edilen bu çokyüzlünün *K* merkezindeki küçük küre yüzeyine temas etmediğini kanıtlamaya çalışalım (*Şekil 16*). Eğer *K* merkezinden çokyüzlünün *LMÖQ* yüzeyine bir dik inilirse bu dik yüzeyi *Z* noktasında keser. *ZL* ve *ZM* hatlarını çekelim. Bu durumda *KZ* hattı *ZL* ve *ZM* hatlarına diktir. Ayrıca $KL = KM$, $KL^2 = KZ^2 + ZL^2$ ve $KM^2 = KZ^2 + ZM^2$ olduğundan $ZL = ZM$ olduğu görülür. Benzer şekilde $ZQ = Z\ddot{O}$ ve her birinin *ZL* ve *ZM* mesafesine eşit olduğu da kanıtlanabilir. Buna göre merkezi Z noktası ve yarıçapı *ZM* olan bir daire *L*, *Ö* ve *Q* noktalarından da geçer ve *LMÖQ* daireye içten teğet bir dörtgendir.



Şekil 16

Burada $ML > \ddot{U}O$ ve $\ddot{U}O = \ddot{O}Q$ olduğundan $ML > \ddot{O}Q$ yazılabilir. Ancak *ML* kirişi *MÖ* ve *LQ* kirişlerine eşit olduğundan, bu hatların her biri de *ÖQ* hattından büyüktür. Şu halde *LZ* daire yarıçapı olduğundan $ML^2 > 2.LZ^2$ ilişkisi geçerlidir.[1]

1 Eğer Şekil 16.1'de olduğu gibi *ML* kirişini kenar kabul eden bir kare oluşturulur ve bu kareye dıştan teğet dairenin yarıçapı a kabul edilirse, $a > ZL$ olduğundan $ML^2 = 2.a^2 > 2.ZL^2$ olduğu görülür.

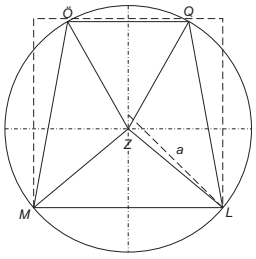
LF hattını *KM* hattına dik olacak şekilde çekelim.[1] Ancak *SM* < 2.*SF* olduğuna göre *SM*/SF = (*SM*×*FM*)/(*SF*×*FM*) < 2 ya da (SM×*FM*) < 2.(*SF*×*FM*) yazılabilir. Ayrıca *LSM* üçgeninde (SM×*FM*) =LM^2 = LZ^2 ve .(*SF*×*FM*) = LF^2 olduğundan LZ^2 < 2.LF^2 yazılabilir.

Ayrıca *LF* < *LM* < *LZ* olduğundan LF^2 > LZ^2 ve *KM* = *KL* olduğundan KM^2 = KL^2 geçerlidir. *FKL* ve *ZKL* dik üçgenlerinde LZ^2 + KZ^2 = KL^2 ve LF^2 + KF^2 = KL^2 olduğundan LZ^2 + KZ^2 = LF^2 + KF^2 yazılabilir. Burada LZ^2 > LF^2 olduğundan KZ^2 > KF^2 = KO^2 ya da KZ^2 > KO^2 veya KZ > *KB* = *KD* olduğu açıkça görülür.

***XV. Önerme*: Küre hacimlerinin oranı küre çaplarının küpüyle orantılıdır.[2]**

Çapları *BD* ve *ZT* olan *AC* ve *EH* kürelerinin verildiğini ve V(*AC*)/V(*EH*) hacim oranının BD^3/ZT^3 çap oranına eşit olmadığını varsayalım (*Şekil 17*).

1- İlkin BD^3/ZT^3 çap oranının *AC* küresinin *EH* küresinden küçük *A* cismi oranına eşit olduğunu düşünelim. *EH* küresinin içine eş merkezli ve hacmi *A* cismine eşit olan bir *KM* küresi yerleştirelim. Sonra *EH* küresinin içine küçük küreye dokunmayan çokyüzlü bir cisim yerleştirelim. *AC* küresinin içine de bu çokyüzlü cisme benzer başka bir cisim yerleştirelim. Bu durumda BD^3/ZT^3 oranı *AC* küresi içindeki çokyüzlünün *EH* küresi içindeki çokyüzlünün oranına eşit olur. Ne var ki bu oran *AC* küresinin *A* küresine olan orana eşitti. Bu nedenden dolayı *AC* küresindeki çokyüzlünün



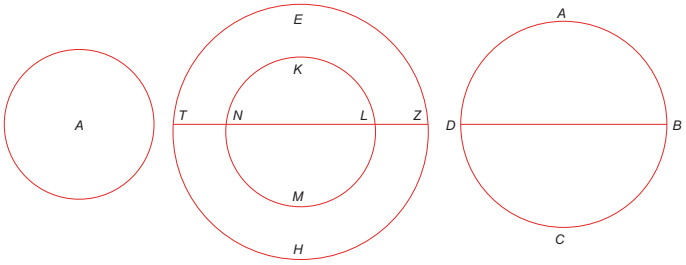
Şekil 16.1

1 Eğer *SIM* yarı dairesi *SM* ekseni etrafında çevrilerek *SLM* dairesi üzerine yatırılırsa *Ü* ve *F* noktalarının çakışması gerektiği açıkça görülür. Şu halde *LF* = *ÖÜ* ilişkisi geçerlidir.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserinde 12. Makale, *XVIII. Önerme* olarak verilir. Bir kürenin hacmi, *R* yarıçap ve *D* = 2*R* çap olmak üzere $V = 4\pi R^3/3 = \pi D^3/6$ olarak verilir. Buna göre $V_1/V_2 = D_1^3/D_2^3$ ilişkisi geçerlidir.

EH küresindeki çokyüzlüye oranı, *AC* küresinin *KM* küresine olan orana eşit olmalıdır. Bu oranı değiştirirsek, *AC* çokyüzlüsünün öz küreye oranı, *EH* çokyüzlüsünün *KM* küresine olan orana eşit olmalıdır. Ne var ki *KM* küresi *EH* küresindeki çokyüzlüden küçük olduğu için *AC* küresi öz çokyüzlüsünden küçük olması gerekir ki bu yanlıştır.

2- İkinci olarak BD^3/ZT^3 çap oranının *AC* küresinin *EH* küresinden büyük bir kürenin oranına eşit olduğunu düşünelim. Oranlar değiştirilirse, ZT^3/BD^3 oranı *EH* küresinin *AC* küresinden küçük olan *A* küresi oranına eşit olmalıdır ki bu da yanlıştır. Böylece önerme hükmü olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanmış olur.



Şekil 17

Not: Eş merkezli olmak koşuluyla, *A* küresine eşit olan bir *KM* küresini *EH* küresi içine yerleştirmek mümkündür. *ZT* çapı *A* çapının *EH* küresinin merkezine getirilir ve küre çapın etrafında çevrilerek gerçekleştirilir ve böylece *A* küresine eşit bir küre elde edilmiş olur. Ne var ki Öklid'in "Çapın çapa olan oranın küpü, küre hacminin küreye olan oranına eşit değildir. Diğer bir deyişle BD^3/ZT^3 çap oranının *AC* küresinin *EH* küresinden küçük veya büyük küreye olan oranına eşittir" tümlecine dikkat etmek gerekir.

Bu hüküm birinci küre, ikinci küreden küçük ya da büyük olan bir cismin oranına eşittir şeklinde de yorumlanabilir. Bu durumda, varsayılan herhangi bir cisme eşit bir kürenin varlığı kanıtlanmamıştır sonucu, Öklid'in bu önermeyi reddettiği anlamına gelir. Bu çelişkiyi mühendisler arasında çözene rastlanmamıştır. Bu konuya dikkatimizi Apollonius koyutları çekmiştir. Ancak burada onlardan bahsetmek yersiz olur kanısındayız.

ON ÜÇÜNCÜ MAKALE

Bu makale 21 önermeden oluşur.[1]

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Altın orana göre bölünmüş herhangi bir doğrunun büyük kısmıyla yarısının toplam karesi, o doğrunun yarı karesinin beş katına eşittir.[2]**

Herhangi bir AB hattı C noktasında $AC^2 = (AB \times BC)$ altın orana göre, $AC > BC$ olmak üzere, AC ve BC kısımlarına ayrılmıştır (*Şekil 1*).[3] AC hattına AB hattının yarısına eşit olan AD hattı ilave edilmiştir. Burada amaç $CD^2 = (AC + AD)^2 = 5.AD^2$ olduğunu kanıtlamaktır.

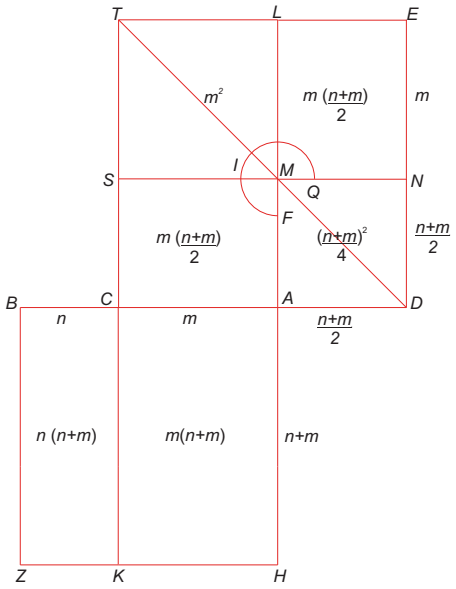
Bunun için CD üzerinde CE karesini, AD üzerinde AN karesini oluşturup AL hattını $AH = AB$ olacak şekilde H noktasına kadar uzatılır. Bu durumda $AH = 2.AD$ olur. Şu halde $S(AK) = 2.S(AS)$ yazılabilir. AB hattı altın orana göre bölündüğünden $AC^2 = (AB \times BC)$ ilişkisi geçerlidir. $CK = AB$ olduğundan $S(BK) = (CK \times BC) = (AB \times BC) = AC^2$, $S(AK) = (CK \times AC) = (AB \times AC) = AC^2$ bulunur. Ancak $S(AZ) = [S(BK) + S(AK)] = 2.AC^2 = S(LS)$ ve ayrıca $S(AZ) = [S(BK) + S(AK)] = AB^2 = (2.AD)^2 = 4.AD^2$ yazılabilir. Gnomon alanı $G(QIF) = [2.S(AS) + S(LS)] = [2.AC^2 + AC^2] = 3.AC^2 = 4.AD^2$ olduğundan aranan $CD^2 = S(CE) = [S(AN) + G(QIF)] = [AD^2 + 4.AD^2] = 5.\ AD^2$ bulunur ve önerme hükmü kanıtlanmış olur.

---

1 Tûsî bu makalede bir önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanmasını kendi başına bir önerme kabul ederek şu ana kadar uyguladığı yöntemden ayrılır ve 18 önermeden oluşan özgün Öklid numaralamasını 3 artırarak Tûsî 21'e ulaşır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *I. Önerme*'ye karşı düşer.

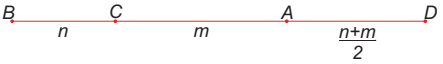
3 Altın oranda $AB/AC = AC/BC = m/n = 1{,}818$ ilişkisi geçerlidir.



Şekil 1

***II. Önerme*: Önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanması.**[1]

Eğer $(AB \times BC) = AC^2$ altın oran ilişkisinin her iki tarafına $(AB \times AC)$ çarpımı eklenirse $[(AB \times BC) + (AB \times AC)] = [AC^2 + (AB \times AC)]$, bu durumda $AB^2 = [AC^2 + (AB \times AC)]$ elde edilir. Ancak $AB = 2.AD$ olduğuna göre (*Şekil 2*), bu ifade $4.AD^2 = [AC^2 + (2.AD \times AC)]$ anlamına gelir. Eğer bu ilişkinin her iki tarafına AD^2 ilave edilirse, önermede öngörüldüğü gibi $5.AD^2 = [AC^2 + (2.AD \times AC) + AD^2] = (AC + AD)^2 = CD^2$ elde edilir.



Şekil 2

***III. Önerme*: Bir hat, bir kısmının karesinin beş katı, tüm hattın karesine eşit olacak şekilde ikiye bölünmüştür. Eğer hattın ikinci kısmına, birinci hattın iki katına eşit olacak şekilde bir hat ilave edilirse, bu durumda birinci kısma ilave edilen hat altın oranı sağlar ve birinci kısım ikinci kısımdan daha büyüktür.**[2]

1 Öklid'in özgün eserinde bulunmayan bu önermede *I. Önerme* başka bir yol izlenerek kanıtlanır.

2 Bu önerme önceki ilk iki önermenin aksi niteliğindedir. Öklid'in özgün eserinde *II* 'ye karşı düşer.

DC hattı, 5 $AD^2 = CD^2$ ve $AB = 2.AD$ olacak şekilde, *A* noktasıyla iki kısma bölünmüş ve *AC* hattına *CB* hattı eklenmiştir (*Şekil 2*). Bu durumda *AB* hattı *C* noktasıyla altın oran nispetinde bölünür ve $AC > BC$ ilişkisi geçerlidir.

Önermeyi kanıtlamak için *Şekil 1*'i göz önünde bulunduralım. Gnomon alanı $G(QIF) = [S(CE) - S(AN)] = (CD^2 - AD^2) = (5.AD^2 - AD^2) = 4.AD^2 = AB^2$ olarak hesaplanır. Ayrıca $S(AK) = 2.S(MC) = [S(ME) + S(MC)]$ olduğu görülür. Ancak $S(AZ) = [S(AK) + S(BK)]$ ve $S(BK) = (AB \times BC)$ olduğundan, $S(AZ) = AB^2 = [S(AK) + S(BK)] = \{[G(QIF) - AC^2] + S(BK)\} = [(AB^2 - AC^2) + (AB \times BC)]$ ya da önermede öngörüldüğü gibi $AC^2 = (AB \times BC)$ altın oran ilişkisi elde edilir.

***IV. Önerme*: Önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanması.[1]**

Şekil 2'de doğruluğu açıkça görülen $CD^2 = (AD + AC)^2 = [AD^2 + 2(AD \times AC) + AC^2]$ ifadesinin her iki tarafından AD^2 çıkarılır ve koşul gereği $DC^2 = 5\ DA^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa $CD^2 - AD^2 = 5\ AD^2 - AD^2 = 4\ AD^2 = [2(DA \times AC) + AC^2]$ elde edilir. Koşul gereği ayrıca $AB = 2.AD$ olduğundan. $DA^2 = AB^2 = [2.(DA \times AC) + AC^2] = [(AB \times AC) + AC^2]$ elde edilir. Bu sonuncu ifadenin her iki tarafından $(AB \times BC)$ terimi çıkarılırsa, $[AB^2 - (AB \times BC)] = [AC^2 + (AB \times AC) - (AB \times BC)]$ ya da $[AB \times (AB - BC)] = AC^2 + (AB \times AC) - (AB \times BC)$ ilişkisi elde edilir. Sadeleştirilirse önermenin öngördüğü gibi $AC^2 = (AB \times BC)$ altın oran ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

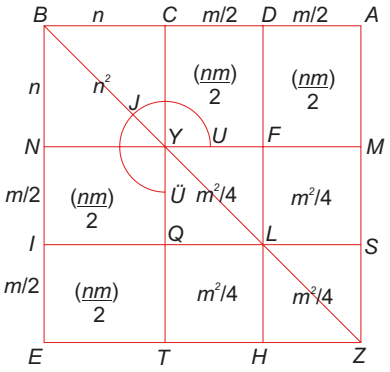
***V. Önerme*: Altın orana göre bölünmüş herhangi bir hatta yarı büyük kısımla küçük kısmın toplam karesi yarı büyük kısım karesinin beş katına eşittir.[2]**

AB hattının verildiğini ve $AC^2 = (AB \times BC)$ altın oran gereği, $AC > BC$ olmak üzere *AC* ve *BC* kısımlarına bölündüğünün varsayalım (*Şekil 3*). Büyük kısmın yarısını $CD = AC/2$ olarak tanımlanmış olsun. Burada amaç $BD^2 = 5.CD^2$ olduğunu kanıtlamaktır.

---

1 Öklid'in özgün eserinde bulunmayan bu önermede *II. Önerme* başka bir yol izlenerek kanıtlanır.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *III*'ye karşı düşer.

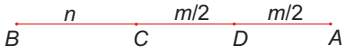


Şekil 3

Bunun için *AB* hattı üzerinde *AE* karesini kurup *BZ* köşegenini, *EZ* hattına paralel *NM* ve *IS* hatlarını çekerek şekli tamamlayalım. Ayrıca *EI* = *IN* olduğuna göre S(*IT*) = S(*NQ*) ve S(*YL*) = S(*QH*) olur. Bu sonuncu iki alan karedir. Buna göre altın oran ilişkisi nedeniyle AC^2 = (*AB* × *BC*) = S(*AN*) = G(*UJÜ*) yazılabilir. Ancak AC^2 = S(*MT*) = 4.S(*FQ*) olduğu görülür. Bu ilişkiler eşitlenirse S(*MT*) = G(*UJÜ*) = 4.S(*FQ*) olur, bu alana S(*FQ*) ilave edilirse S(*ID*) = [G(*UJÜ*) + S(*FQ*)] = [4.S(*FQ*) + S(*FQ*)] = 5.S(*FQ*) elde edilir. Ne var ki S(*ID*) = BD^2 ve S(*FQ*) = CD^2 olduğundan BD^2 = 5.CD^2 önerme hükmü kanıtlanmış olur.

***VI. Önerme*: Önermenin başka bir yol izlenerek kanıtlanması.**[1]

Altın oran koşulundan hareketle AC^2 = (*AB* × *BC*) = [(*AC* + *BC*) × *BC*] = (*AC* × *BC*) + BC^2 = (2.*CD* × *BC*) + BC^2 ve *Şekil 4* gereği AC^2 = $(2.CD)^2$ = 4.CD^2 ifadeleri elde edilir. Eşitlenir ve her iki tarafa CD^2 ilave edilirse önermede öngörüldüğü gibi 5.CD^2 = [2.(*CD* × *BC*) + BC^2 + CD^2] = (*CD* × *BC*)^2 = BD^2 ilişkisi bulunur.



Şekil 4

Not: Bu önermenin aksi şu şekilde ifade edilebilir: *Farklı uzunlukta iki kısma ayrılan bir hatta eğer yarı büyük kısımla küçük kısım toplamının karesi*

1 Öklid'in özgün eserinde bulunmayan bu önermede *V. Önerme* başka bir yol izlenerek kanıtlanır.

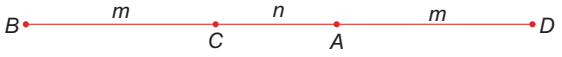
yarı büyük kısım karesinin beş katına eşitse bu hat altın oran nispetinde bölünmüştür.[1]

Koşul gereği $BD^2 = 5.CD^2$ olmak üzere *BD* hattına *AD* ilave edilmiştir. Amaç *AB* hattının *C* noktasıyla altın oran nispetiyle bölündüğünü kanıtlamaktır.

5. Önermede S(*ID*) = 5.S(*FQ*) = 5. CD^2olduğu gösterilmişti (*Şekil 3*). Eğer ortak S(*FQ*) = CD^2 atılırsa geriye kalan G(*UJÜ*) = (*AB* × *BC*) = 4. CD^2 = AC^2 olduğundan aksi önermede öngörüldüğü gibi AC^2 = (*AB* × *BC*) altın oran ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.

***VII. Önerme*: Eğer altın orana göre bölünen bir doğruya büyük kısım ilave edilirse, elde edilen yeni doğru da altın oran oranında bölünür ve büyük kısım ilk verilen doğruya karşı düşer.**[2]

AB doğrusu, *BC* > *AC* olmak üzere, *C* noktasında altın oran oranında bölündüğünden *AB*/*BC* = *BC*/*AC* ya da BC^2 = (*AB* × *AC*) ilişkisi geçerlidir (*Şekil 5*). *AB* doğrusuna *AD* = *BC* hattı ilave edildiğine ve *BD* = (*AB* + *AD*) olduğuna göre (*BD* × *AD*) = [(*AB* + *AD*) × *BC*] = [(*AB* + *BC*) × BC^2] = [(*AB* × *BC*) + (*AB* × *AC*)] = [*AB* × (*BC* + *AC*)] = AB^2 yazılabilir. Şu halde önermede öngörüldüğü gibi *BD* hattı *A* noktasıyla altın oranda bölünmüştür: *BD*/*AB* = *AB*/*AD*.



Şekil 5

Not: Bu önermenin aksi şu şekilde ifade edilebilir: *Altın oran nispetinde bölünmüş hattın uzun kısmında kısa kısma eşit bir kısım ayrılsa, onun uzun kısmı da altın oran oranında bölünmüş olur. Bu hattın uzun kısmı ise ayırdığımız kısımdır*.

BD hattı *A* noktasıyla *AB* ve *AD* kısımlarına, *AB* > *AD* olmak üzere, altın oran oranında bölündüğü varsayılır (*Şekil 5*). Eğer *BD* hattının uzun

1 Burada önceki önermeden farklı olarak aksi nitelikli bu önermeye ayrı bir sayı öngörülmemiştir.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *V. Önerme*'ye karşı düşer.

kısmı, C noktasıyla $BC = AD$ olacak şekilde iki kısma ayrılırsa, bu durumda $AB = CD$ olduğundan $(AB \times AC) = (CD \times AC) = AD^2 = BC^2$ yazılabildiğinden C noktası AB hattını önermenin öngördüğü şekilde altın oran oranında böldüğü görülür.

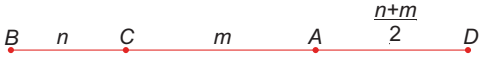
***VIII. Önerme*: Altın orana göre bölünmüş herhangi bir hattın ve kısa kısmın kareleri toplamı, uzun kısım karesinin üç katına eşittir.[1]**

$BC^2 = (AB \times AC)$ altın oran ilişkisi gereği iki kısma ayrılan AB hattının kısa kısmı AC olsun (*Şekil 6*). Bu durumda önermede öngörüldüğü gibi $(AB^2 + AC^2) = [(AC + BC)^2 + AC^2] = [BC^2 + 2.(AC \times BC) + 2.AC^2] = \{BC^2 + 2.[AC \times (AC + BC)]\} = [BC^2 + 2.(AC \times AB)] = [BC^2 + 2.BC^2] = 3.BC^2$ koşulunun sağlandığı kanıtlanır.

Şekil 6

***IX. Önerme*: Altın orana göre bölünmüş herhangi bir hat irrasyonel hisselere ayrılır.[2]**

AB hattının uzun kısmı AC hattıdır (*Şekil 7*). AB hattına $AD = AB/2$ hattı ilave edilince *1* ve *II. Önerme* gereği $CD^2 = (AC + AD)^2 = 5.AD^2$ ilişkisi yazılabilir. Böylece CD ve AD kısımlarının kareleri oranı $CD^2/AD^2 = 5$ rasyonel ve uzunlukça oranı $CF/AF = \sqrt{5}$ şeklinde irrasyoneldir.



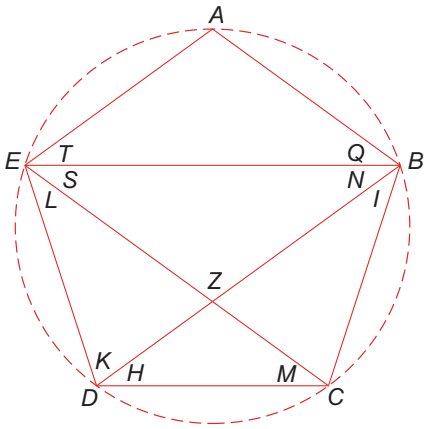
Şekil 7

***X. Önerme*: Eğer eşkenar beşgenin herhangi üç aşısı eşitse açıların tümü eşittir.[3]**

1- Verilen bir eşkenar $ABCDE$ beşgeninde ilkin komşu olmayan A, C ve D açılarının birbirine eşit olduğunu varsayalım (*Şekil 8*). BE ve BD hatlarını çekelim. Bu durumda $\angle(A) = \angle(C)$ ve bu açıların kenarları eşit olduğundan $\Delta(BAE)$ ve $\Delta(BCD)$ üçgenleri eşittir. Buna göre $\angle(T) = \angle(H)$, BE

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *IV. Önerme*'ye karşı düşer.
2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *VI. Önerme*'ye karşı düşer.
3 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *VII. Önerme*'ye karşı düşer.

= *BD* ve eşit kirişlere ilişkin olduğundan ∠(*BED*) =∠(*BDE*) olur. Şu halde Δ(*DEB*) bir ikizkenar üçgen olduğundan ∠(*E*) ve ∠(*D*) açıları eşittir. Aynı şekilde ∠(*C*) = ∠(*B*) olduğu gösterilebilir.



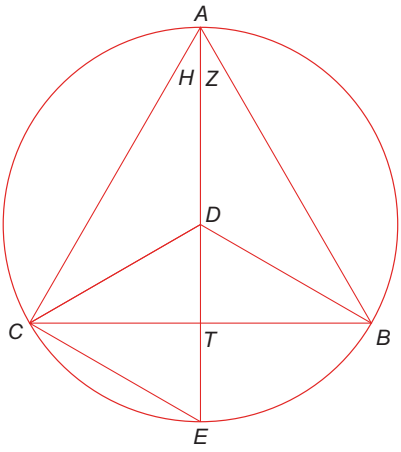
Şekil 8

2- İkinci olarak eşkenar *ABCDE* beşgeninde komşu *C*, *D* ve *E* açılarının eşit olduğunu varsayalım. *EC* hattını çekelim. *C* ve *D* açılarının kenarları eşit olduğundan Δ(*BCD*) üçgeni Δ(*ECD*) üçgenine eşittir. Buna göre ∠(*L*) =∠(*I*), *BD* = *EC* ve ∠(*H*) =∠(*M*) olduğundan *DZ* = *CZ* olduğu gibi geriye kalan *EZ* ve *BZ* hatları da eşittir. Böylece ∠(*B* = ∠(*E*) ve aynı şekilde ∠(*A*) = ∠(*C*) olduğu kanıtlanabilir.

***XI. Önerme*: Bir daireye içten teğet bir eşkenar üçgende bir kenarın karesi yarıçap karesinin üç katına eşittir.**[1]

ABC eşkenar üçgeninin *D* merkezli daireye içten teğet olduğunu varsayalım (*Şekil 9*). *ADE* ve *CE* hatlarını çekelim. *ACE* yayı dairenin yarısına, *AC* yayı 1/3'ne, *CE* yayı ise 1/6'sına eşittir. *ACE* dik üçgeni için $AE^2 = (AC^2 + CE^2)$ ya da *CE* = *DE* = *AD* olduğundan, $4.AD^2 = (AC^2 + AD^2)$ yazılabildiği için, önermede öngörüldüğü gibi $AC^2 = 3.AD^2$ olduğu kanıtlanır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XII. Önerme*'ye karşı düşer.



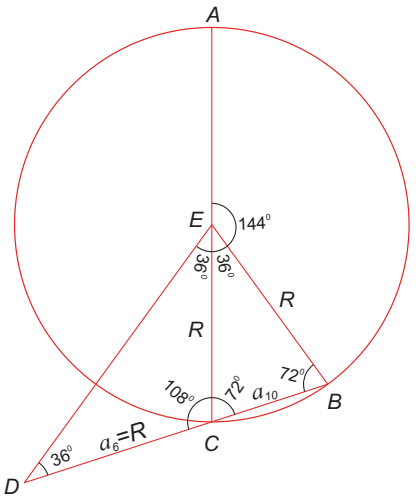
Şekil 9

Not: Özgün eserde önerme *BD* ve *CD* hatları çekilerek kanıtlanır. Kenarlar eşit olduğundan Δ(*ACD*) = Δ(*ABD*), ∠(*H*) = ∠(*Z*) ve *CE* yayı *EB* yayına eşittir. Böylece *CE* yayı çevrenin 1/6'sına eşittir ve *DC* = *CE* yazılabilir. Ayrıca *AE* hattı *BC* hattına dik olduğundan, üçgen yüksekliği çapın 3/4'üne ve *DT* = *AE*/4'e eşittir.

***XII. Önerme*: Aynı daireye içten teğet bir eşkenar altıgen ve ongenin kenar uzunluklarının toplamından oluşan bir düz hat, bu kenarlar tarafından altın oran oranında bölünür. Büyük kısım altıgen kenarına karşı düşer.**[1]

ABC dairesine içten teğet ongenin kenarı a_{10} = *BC* ve altıgenin kenarı ise a_6 = *CD* olarak verilmiş olsun (*Şekil 10*). *AB* yayı *BC* yayının 4 katına eşit olduğundan [∠(*BEC*) = 36°, ∠(*AEB*) = 144°], ∠(*AEB*) açısı ∠(*BE*C) açısının 4 katına eşittir. Ancak *CD* = *CE* olduğundan ∠(*AEB*) = 2.∠(*BCE*) ve ∠(*BCE*) = 2. ∠(*D*) = 72° ya da eşitlenirse ∠(*AEB*) = 4.∠(*D*) = 144° olduğu görülür. ∠(*BEC*) = ∠(*BDE*), ∠(*B*) ortak olduğundan Δ(*BEC*) ve Δ(*BDE)* üçgenleri benzerdir. Bu durumda *DE*/*EB* = *EB*/*BC*, *DE* = *DB* ve *EB* = *EC* = *DC* olduğundan, önermede öngörüldüğü gibi *DB*/*DC* = *DC*/*BC* altın oranın geçerli olduğu anlaşılır.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *IX. Önerme*'ye karşı düşer.



Şekil 10

***XIII. Önerme*: Bir daireye içten teğet eşkenar beşgen kenarının karesi, aynı daireye içten teğet eşkenar altıgen ve ongen kenar karelerinin toplamına eşittir.**[1]

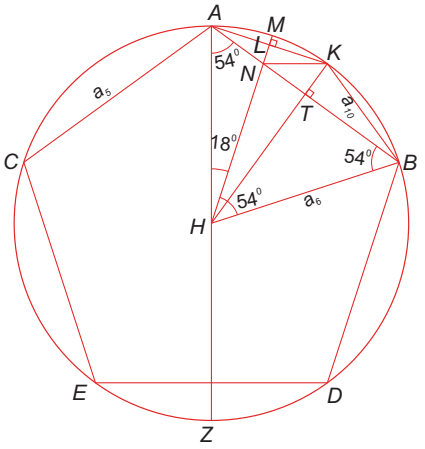
H merkezli daireye içten teğet *ABDEC* eşkenar beşgenin bir kenarı *AB* olsun (*Şekil 11*). *AZ* yarıçapını çekelim, *H* daire merkezini *B* noktasına birleştirelim. *H* noktasından *AB* hattına *HTK* dikini indirelim, *KA* ve *KB* hatlarını çekelim. Sonra *AK* hattına *HL* dikini indirip *M* noktasına kadar uzatalım, *KN* hattını çekelim. *BM* yayı çevrenin 3/20 (= 54°/360°)hissesine, *BZ* yayı ise 3/10 (= 108°/360°) hissesine karşı düştüğünden ∠(*BHZ*) = 2.∠(*BHM*) ve ∠(*BHZ*) = 2. ∠(*BAH*) olduğu görülür. ∠(*BHN*) = ∠(*BAH*) ve ∠(*ABH*) ortak olduğundan *DHN* ve *BHA* üçgenleri benzerdir. Bu durumda *AB*/*BH* = *BH*/*BN* ya da (*AB* × *BN*) = BH^2 yazılabilir. Burada *BH* = *AH* (= a_6) altıgenin kenarına eşittir.

Aynı şekilde *HL* hattı *AK* hattına dik olduğundan *AK* hattı *L* noktasında ikiye bölünür. *NA* = *NK* olduğundan *KNA* üçgeninde ∠(*NAK*) = ∠(*NKA*) olur. Aynı şekilde *BAK* üçgeninde ∠(*ABK*) = ∠(*KAB*). Ayrıca ∠(*KAB*) ortak olduğundan Δ(*KAB*) ve Δ(*NKA*) üçgenleri benzerliğinden *AB*/*AK* = *AK*/*AN* ya da (*AB* × *AN*) = AK^2 yazılabilir. Burada *AK* (= a_{10})

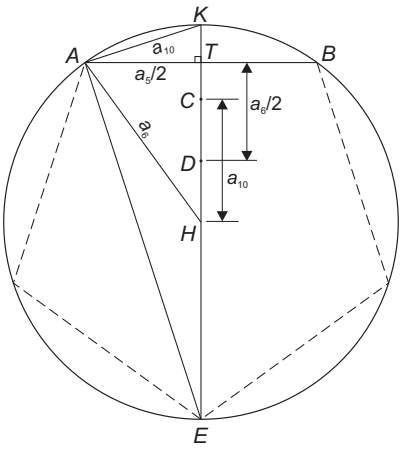
1 Bu önerme Öklid'in özgün eserindeki *X. Önerme*'ye karşı düşer.

ongenin kenarına eşittir. Ancak $AB^2 = (AB \times AB) = [AB \times (AN + NB)] = [(AB \times AN) + (AB \times BN)] = (AK^2 + AH^2)$ elde edilir.

Böylece önermede öngörüldüğü gibi eşkenar beşgen kenar karesinin eşkenar altıgen ve ongen kenar karelerinin toplamına eşit olduğu kanıtlanmış olur ($a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$).



Şekil 11



Şekil 12

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır: *AB* hattının *AB* beşgeninin bir kenarı ve *KTE* hattının ona dik, beşgene dıştan teğet *H* merkezli dairenin çapı olduğunu varsayalım. *AH* ve *AK* hatlarını çekelim. *HK* üzerinde $HC = AK (= a_{10})$ ongen kenar uzunluğu kadar bir mesafeyi ayıralım (*Şekil 12*). Bu durumda *12. Önerme* gereği *EC* hattı *H* noktasıyla altın oran nispetiyle bölünmüş olur. Diğer bir deyişle $EC/EH = EH/CH$ ya da $EC/EH = KH/CH$ yazılabilir, bu ilişkide pay payda farkı alındığında $(EC - EH)/EH = (KH - CH)/CH$ ya da $CH/EH = KC/CH$ diğer bir deyişle $(EH \times KC) = CH^2 = AK^2$ elde edilir. Ayrıca $\Delta(AKE)$ bir dik üçgen olduğundan $AK^2 = (EK \times KT)$ yazılabilir. Eşitlenirse $(EK \times KT) = (EH \times KC)$ ya da $(KC/KT) = (EK/EH) = ½$ ifadesinden *KC* hattının *T* noktasıyla yarıya bölündüğü görülür.

$TH^2 = (TC + CH)^2 = [TC^2 + CH^2 + 2.(TC \times CH)] = [TC^2 + CH^2 + (KC \times CH)]$ yazılabildiği, ayrıca $2.TC = KC$ ve önceki paragraftan $CH^2 = (EH \times KC)$ olduğu bilindiğine göre, $TH^2 = [TC^2 + (EH \times KC) + (KC \times CH)] = [TC^2 + (KC \times CE)]$ olduğu görülür. Ayrıca $\Delta(AKE)$ üçgeninde $AT^2 = (TK$

$\times$ *TE*) olduğuna göre yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına KT^2 ilave edilir ve $KT = TC$ cinsinden ifade edilirse, $(TH^2 + KT^2) = [(KC \times CE) + TC^2 + KT^2] = (2KT^2 + 2.KT^2) = 2.AT^2$ olduğu gösterilebilir.

Ayrıca $AK^2 = (AT^2 + KT^2)$ ve $AH^2 = (AT^2 + TH^2)$ olduğuna göre bu iki ilişki taraf tarafa toplanırsa $(AK^2 + AH^2) = (2.AT^2 + TH^2 + KT^2) = 4.AT^2 = AB^2$ bulunur. Böylece $AB^2 = (AK^2 + AH^2)$ ile $a_5{}^2 = (a_{10}{}^2 + a_6{}^2)$ önerme hükmü kanıtlanmış olur.

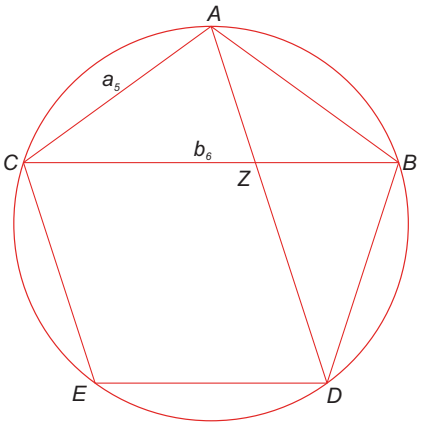
Bununla ilişkili ilerde gerekli olacak bir özelliği daha belirtelim. Eğer eşkenar altıgenin kenar uzunluğuna eşit olan KH $(= a_6)$ yarıçapı, $CH = AK$ $(= a_{10})$ ongen kenar uzunluğuna eşit olacak şekilde, *C* noktasıyla iki kısma ayrılırsa, bu durumda yukarıda kanıtlandığı gibi $(EH \times KC) = (KH \times KC) = CH^2$ ilişkisi yazılabilir ve dairenin *KH* yarıçapı C noktasıyla altın oran oranında bölünmüş olur. Eğer *CH* hattı *D* noktasıyla iki eşit kısma ayrılırsa bu durumda DH $(= a_{10}/2)$ ongen kenarının yarısına, $TD = (TC + CD) = \{(a_6 - a_{10})/2 + a_{10}/2\} = a_6/2$ altıgen kenarının yarısına eşit olur. Böylece daire merkezinden beşgen kenarına inilen dik altıgen ve ongen kenarları toplamının yarısına eşittir: $TH = (TD + DH) = (a_6 + a_{10})/2$.

***XIV. Önerme*: Bir daireye içten teğet eşkenar beşgenin köşegenleri birbirlerini altın oran nispetinde keser. Uzun parça beşgenin kenar uzunluğuna (= a_5) eşittir.**[1]

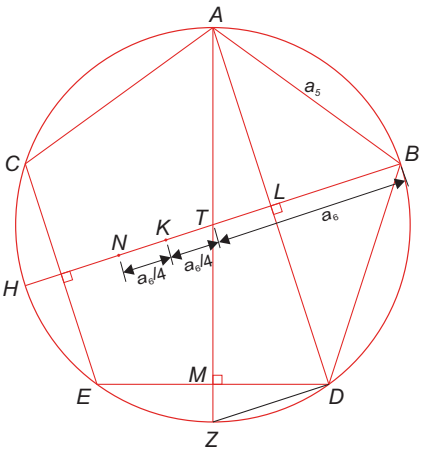
Bir eşkenar *ABDEC* beşgeninde *AD* ve *BC* köşegenlerinin *Z* noktasında kesiştiğini varsayalım (*Şekil 13*). Bu durumda $\angle(BAZ) = \angle(BCA)$ ve $\angle(ABC)$ ortak olduğundan *ABZ* ve *BAC* üçgenleri benzerdir. Buna göre $CB/AB = AB/BZ$ ya da $CB/AC = AC/BZ$ yazılabilir.

Benzer şekilde $\angle(ZAB) = \angle(ZBA)$ olduğundan $\angle(CZA) = 2.\angle(ZAB)$ ilişkisi geçerlidir. Ayrıca *BD* yayının iki katı *CED* yayına eşit olduğundan $\angle(CAZ) = 2.\angle(ZAB)$ yazılabilir. Buna göre $\angle(CZA) = \angle(CAZ)$ ve $AC = CZ$ ilişkileri geçerlidir. Buna göre *BC* hattı *Z* noktasıyla önergenin öngördüğü gibi altın oran nispetinde kesilir $CB \times BZ = CZ^2$ ve uzun parça beşken kenar uzunluğuna eşittir: $CZ = AC = a_5$.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *VIII. Önerme*'ye karşı düşer.



Şekil 13



Şekil 14

***XV. Önerme*: Eğer eşkenar bir beşken çapı rasyonel bir daireye içten teğetse, bu durumda beşgen kenarı rasyonel olmayan küçük (*minör*) bir doğruya eşittir.**[1]

T merkezli *ABDEC* dairesine içten teğet eşkenar beşgende, *AZ* ve *BH* çapları ve *AD* köşegeni çekilmiştir (*Şekil 14*). *DH* hattı üzerinde $TK = BT/4$ $(= a_6/4)$ olacak şekilde *TK* hattını ayıralım. $\angle(ZAD)$ ortak, $\angle(L) = \angle(M) = 90°$ olduğundan *ALT* ve *AMD* üçgenleri benzerdir. Bu durumda $TL/AT = MD/AD$, ancak $AT = BT$ olduğundan $TL/BT = MD/AD$ ya da $AD = 2.LD$ olduğundan $TL/(BT/4) = (2.DM)/LD$, ayrıca $KT = BT/4$ ve $DE = 2.DM$ nedeniyle, $LT/KT = DE/LD$ yazılabilir. Toplam kuralı uygulanırsa $(LT + KT)/KT = (DE + LD)/LD$ ya da $KL/KT = (DE + LD)/LD$ bulunur. Karesi alınırsa $KL^2/KT^2 = (DE + LD)^2/LD^2$ elde edilir.

Burada *AD* eşkenar beşgenin köşegeni, $DE = a_5$ ise eşkenar beşgen kenarıdır. Buna göre $(LD + DE) = (AD/2 + a_5)$ anlamına gelir. Ancak 14. Önerme gereği eşkenar beşken köşegenleri altın orana göre kesişir ve büyük parça beşken kenarına eşittir. Ayrıca 1. Önerme gereği altın orana göre

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XI. Önerme*'ye karşı düşer. Buna göre birim yarıçaplı bir dairede eşkenar beşken kenarı $a_5 = (½)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ olarak elde edilir ve bu ilişki 10. Makale *LXXXVIII. Önerme* gereği $\rho = \sqrt{5/2}$ ve $k = 2$ olmak üzere, irrasyonel küçük (minör adı verilen) bir ilişkiyle ifade edilebileceği anlamına gelir:

$$x - y = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} - \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

bölünmüş herhangi bir doğrunun büyük kısmı ile doğrunun yarısının toplam karesi, o doğrunun yarı karesinin beş katına eşit olduğuna göre ($LD + DE)^2/LD^2 = 5$ ilişkisini sağlar. Şu halde yukarıdaki oran gereği $KL^2 = 5.\ KT^2$ ilişkisi yazılabilir.

Koşul gereği $AT = BT$ daire yarıçapı, $KT = BT/4$ ve $BK = KT + TB = 5\ KT$ rasyonel birer sayıdır. Buna göre KT^2 ve $KL^2 = 5.\ KT^2$ olduğundan KL de rasyonel bir sayıdır.

Ancak koşul gereği $BK = 5\ KT$ olduğundan, $BK^2 = 25\ KT^2$ yazılabilir. Ancak $KL^2 = 5.\ KT^2$ olduğundan $BK^2 = 5\ KL^2$ ilişkisi geçerlidir. Buna göre $BK/KL = \sqrt{5}$ nedeniyle BK ve KL rasyonel sayılarının oranı irrasyonel olmakla birlikte karelerinin oranı rasyoneldir. Rasyonel BK hattından rasyonel KL hattı çıkarılır ve bu iki hattın sadece karelerini oranlamak mümkünse, bu durumda kalan BL hattı 73. Önerme gereği bir yarıçap (*apotem*) ve LK ise bu hattın ekidir (*aneks*).

KT ve TB oranlanabilir sayılardır, bu durumda toplamları $(KT + TB) = BK$ ve TB sayıları da oranlanabilir. Ayrıca BT ve BH oranlanabildiğine göre BK da BH ile oranlanabilir. Ancak $BK^2 = 5\ KL^2$ olduğundan $BK^2/KL^2 = 5/1$ ilişkisi yazılabilir. Eğer $BK^2 > LK^2$ ve bu durumda kareler arasındaki farkın $N^2 = BK^2 - KL^2$ olduğu varsayılır ve fark alınırsa $BK^2/N^2 = 5/4$ nedeniyle BK ve N sayılarının oranlanamadığı görülür. Şu halde BL sayısının bir 4. Yarıçap olduğu kanıtlanmış olur.

Neticede 94. Önerme gereği BL sayısı bir 4. Yarıçap olduğundan $BA^2 = HB \times BL$ çarpımı yazılabilir ve BA küçük (*minör*) rasyonel bir doğruya karşı düşer.[1]

Not: Bu önermeyi kanıtlamanın bir yolu daha vardır. *Şekil 14*'te DZ hattı çekilir. $DZ // TL$ olduğundan $\angle(ADZ) = 90°$ diğer bir deyişle ALT, ADZ üçgenleri benzerdir. Şu halde $AT/AZ = LT/DZ$ ilişkisi ve $AT/AZ = ½$ olduğundan $LT/DZ = 1/2$ yazılabilir. Burada $DZ\ (= a_{10})$ ongen kenarına eşittir. Sonra

1 Burada $AT = r$ alınırsa, $KT = r/4$ olduğundan, $KL^2 = 5\ KT^2$ nedeniyle $KL^2 = 5r^2/16$ ya da $KL = \sqrt{5}r/4$ bulunur. Ayrıca $BK^2 = 5\ KL^2$ nedeniyle $BK = 5r/4$ ve $BL = BK - LK = 5r/4 - \sqrt{5}r/4$ yazılabilir. Neticede $BA^2 = HB \times BL = 2r(5r/4 - \sqrt{5}r/4)$ olduğundan $BA = (r/2)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = (r/2)\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - (r/2)\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ bulunur.

eğer $NK = KT = a_6/4$ alınırsa, bu durumda $NT = NK + KT = a_6/2$ olur ve 13. Önerme gereği NL hattı T noktasıyla altın oran nispetinde bölünür. Şu halde 1. Önerme gereği $KL^2 = 5.KT^2$ ve koşul gereği $BK = 5\ KT$ ilişkileri geçerlidir. Şu halde ikinci ifadenin karesi alınırsa ve ilk ifade göz önünde bulundurulursa $BK^2 = 25.KT^2 = 5.KL^2$ elde edilir.

Kanıtın devamı yukarıda olduğu gibi sürdürülür.

***XVI. Önerme*: Verilen bir küreye içten teğet bir dörtyüzlünün yerleştirilmesi ve küre çapı karesinin dörtyüzlü ayrıtı karesinin bir buçuk katı olduğunun gösterilmesi.**[1]

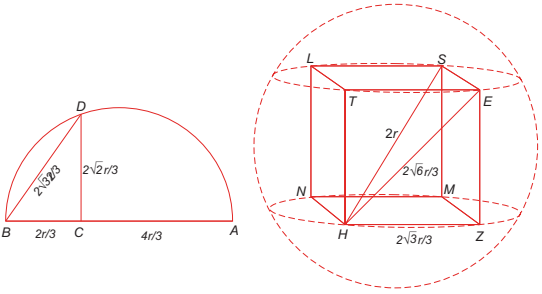
Verilen AB küre çapını $BC/AC = 1/3$ ya da $AC = 2.BC$ olacak şekilde C noktasıyla iki kısma ayıralım (*Şekil 15*). AB çaplı bir yarım daire oluşturalım, AB hattına dik CD hattını ve AD hattını çizelim.

Merkezi Z ve yarıçapı $ZK = CD$ olan bir daire ve onun içine de KLM eşkenar üçgeni çizilir. Z daire merkezinden geçen ve KML düzlemine dik EZH hattı oluşturulur. Bu EZH diki üzerinde $ZN = AC$ olacak şekilde N noktası belirlenir ve NK, NL, NM hatları çekilerek önermede öngörülen düzgün $NKLM$ dörtyüzlüsü elde edilmiş olur.

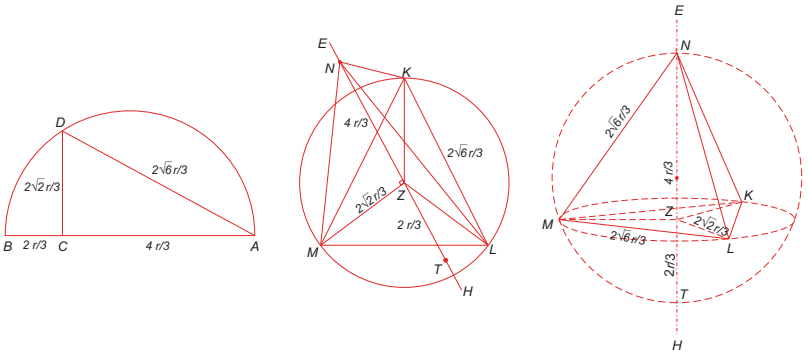
Kanıtı: ADB yarım dairesinde $AD^2 = (AB \times AC)$ ve $DC^2 = (BC \times AC)$ olduğundan, ifadeler taraf tarafa oranlanırsa $AD^2/DC^2 = AB/BC$ elde edilir. Ayrıca $AB = 3.BC$ olduğundan $AD^2 = 3.DC^2 = 3.KZ^2$ yazılabilir. Ayrıca $AD = KL = ML = KM = KN = LN = NM$ olduğundan $\Delta(ADC) = \Delta(NZK) = \Delta(NZL) = \Delta(NZM)$ ilişkileri geçerli ve elde edilen dörtyüzlü bir eşyüzlüdür: $\Delta(KML) = \Delta(NKL) = \Delta(NML) = \Delta(NMK)$. Eğer HZD hattı üzerinde $ZT = BC$ ayrılırsa $NT = AB$ olur. Nihayet NT üzerinde bir yarım daire oluşturulur ve NT etrafında döndürülürse $CD = ZM = ZL = ZK$ olduğundan yarım daire M, L ve K noktalarından geçer. Böylece dörtyüzlünün küre içinde kaldığı gösterilmiş olur. $AB^2/AF^2 = AB^2/(AB \times AC) = AB/AC = (3.BC)/(2.BC) = 3/2$ olduğundan küre çapının karesi dörtyüzlü ayrıtı karesinin 1,5 katı olduğu kanıtlanmış olur.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XIII. Önerme*'ye karşı düşer.

$AB^2/AD^2 = AB^2/(AB \times AC) = AB/AC = 3.BC/2.BC = 3/2$ olduğundan küre çapının karesi dörtyüzlü ayrıtı karesinin 1,5 katı olduğu kanıtlanmış olur.[1] Bu da cisim olarak "Ateş"e nispet edilir



Şekil 15 Solda ve ortada özgün şekil, sağda açıklayıcı şekil



Şekil 16

***XVII. Önerme*: Verilen bir küreye içten teğet bir küpün yerleştirilmesi ve küre çapı karesinin, küp ayrıtı karesinin üç katı olduğunun gösterilmesi.[2]**

Verilen *AB* küre çapını *BC*/*AC* = 1/3 ya da *AC* = 2.*BC* olacak şekilde *C* noktasıyla ikiye ayıralım ve sonra *AB* hattı üzerinde *ADB* yarı dairesi ile *CD* ve *BD* hatlarını çizelim (*Şekil 16*). Sonra *HZ* = *BD* hattını çizelim, bunun üzerine *ZT* karesini ve *ZL* küpünü oluşturalım. Bu, önermede kürenin içine yerleştirilmesi öngörülen küptür.

1 Eğer küre yarıçapı r ise, dörtyüzlü ayrıtı $NM = AD = b_4 = 2\sqrt{6}r/3$, dörtyüzlü yüksekliği $NZ = AC = 4r/3$ bulunur.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XV. Önerme*'ye karşı düşer.

Kanıtı: *ZT* karesinin *HE* ve *ZL* küpünün *HS* köşegenini çizelim. Bu durumda $HS^2 = (SE^2 + HE^2)$ ve $HE^2 = (EZ^2 + HZ^2)$ yazılabilir. Küpün ayrıtları eşit olduğundan denklemler eşitlenirse $HS^2 = 3.HZ^2$ elde edilir. Ayrıca $BD^2 = (AB \times BC)$ olduğundan $AB^2/BD^2 = AB^2/(AB \times BC) = AB/BC = 3.BC/BC = 3$ ya da $AB^2 = 3.BD^2 = 3.HZ^2 = HS^2$ diğer bir deyişle $AB = HS$ olduğu görülür. Nihayet *HS* üzerinde bir yarım daire oluşturulur ve *HS* etrafında döndürülürse küpün ayrıtları eşit olduğundan, yarım daire *E*, *Z*, *N* ve *L* noktalarından geçer. Böylece küpün küre içinde kaldığı gösterilmiş olur.

Son olarak $AB^2 = 3.HZ^2$ nedeniyle, önermede öngörüldüğü gibi küre çapı karesinin küp ayrıtı karesinin üç katı olduğu da kanıtlanmış olur.[1] Bu da cisim olarak "Toprağa" nispet edilir.

***XVIII. Önerme*: Verilen bir küreye içten teğet yüzeyleri eşkenar üçgenlerden oluşan bir düzgün sekizyüzlünün yerleştirilmesi ve küre çapı karesinin sekizyüzlü ayrıtı karesinin iki katı olduğunun gösterilmesi.[2]**

AB küre çapının verildiğini, bu hattın *D* noktasıyla ikiye bölünerek üzerine *CD* yarıçaplı bir *ACB* yarım dairesinin ve *CD* hattının çizildiğini varsayalım (*Şekil 17*). Sonra *EH* = *BC* alınarak üzerine bir *KEZH* karesi oluşturulur, bu karenin *T* noktasında kesişen *EH* ve *KZ* köşegenleri çizilir. Kare düzleminde bulunan *T* noktasından bu düzleme dik *LTM* hattı çizilir. Bu hattın üzerinde *TN* = *TS* = *AD* olacak şekilde *N* ve *S* noktaları belirlenir ve *NE*, *NK*, *NH*, *NZ*, *SE*, *SK*, *SH*, *SZ* hatları çekilir. Elde edilen *NEKHZS* cismi önermede kurulması öngörülen muntazam sekizyüzlüdür.

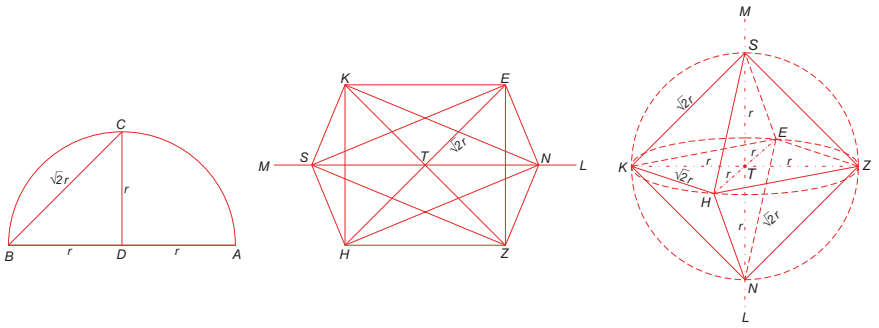
Kanıtı: Burada $BC^2 = (BD^2 + CD^2)$ ve *BD* = *CD* (= *r*). Ayrıca *BC* = *EH* (= $\sqrt{2}r$) ve $EZ^2 = (TT^2 + TZ^2)$ ile *BD* = *TE* = *TZ* = *TH* = *TK* = *TN* = *TS* (= *r*) olduğu görülür. Böylece karenin köşeleriyle *N* ve *S* noktaları arasındaki bütün hatlar eşit olduğundan sekizyüzlünün eşkenar eşit üçgenlerden oluştuğu anlaşılır. Şimdi *AB* = *NS* üzerinde bir yarım daire oluşturulur ve etrafında çevrilirse diklerin tümü *BD* mesafesine eşit olduğundan bu yarım daire karenin köşelerinden geçer. Buna göre sekizyüzlü küreye içten teğettir.

---

1 Eğer küre yarıçapı *r* ise, küpün ayrıtı $HZ = BD = b_6 = 2\sqrt{3}r/3$, küpün köşegeni $HS = AB = 2r$ bulunur.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XIV. Önerme*'ye karşı düşer.

Ayrıca $AB^2 = 2.BC^2$ olduğundan, önerme gereği küre çapı karesi de, sekizyüzlü ayrıtı karesinin iki katına eşittir. Bu da cisim olarak "Hava"ya nispet edilir.[1]



Şekil 17 (*Solda özgün çizim, sağda açıklayıcı çizim*).

***XIX. Önerme*: Yüzeyleri eşkenar üçgenlerden oluşan bir düzgün yirmiyüzlünün verilen bir küreye içten teğet yerleştirilmesi. Eğer rasyonel küre çapının kökü alınabilirse diğer bir deyişle rasyonelse, yirmiyüzlünün ayrıtı irrasyonel küçük (*minör*) adı verilen bir doğruya eşittir.[2]**

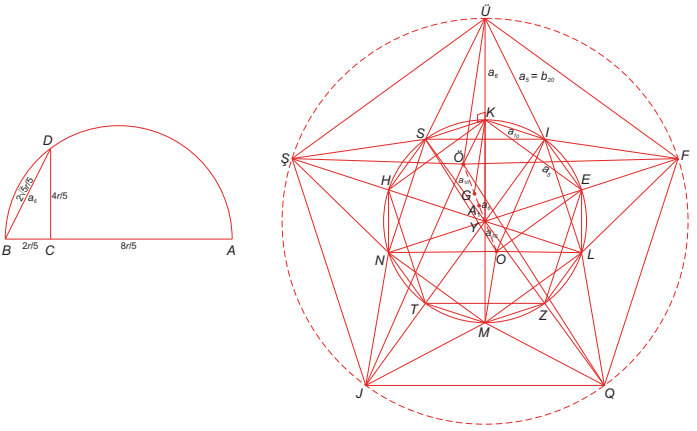
AB küre çapının verildiğini, bu hattın $BC = AB/5$ olacak şekilde *C* noktasıyla bölündüğünü varsayalım (*Şekil 18*). *AB* hattının üzerine *ADB* yarım dairesini, *DC* dikini ve *BD* hattını çizelim. Yarıçapı $KY = BD\ (= a_6)$ olan bir daire ve bu daireye içten teğet bir *KEZTH* beşgenini çizelim. Bu beşgenin etrafındaki yayları *I*, *L*, *M*, *N* ve *S* noktalarında yarıya bölerek ongenin kenarlarını oluşturalım. Sonra *I*, *L*, *M*, *N*, *S* noktalarını birleştirerek *ILMNS* beşgenini elde edelim.

Daire yüzeyine dik, daire yarıçapı (a_6) uzunluğundaki *KÜ*, *EF*, *ZQ*, *TJ*, *HŞ* hatlarını dikelim. Bu hatların tümü aynı yüzeye dik olduklarından birbirlerine eşit ve paraleldir. Sonra *ÜŞ*, *ŞJ*, *JQ*, *QF*, *FÜ*, *ÜS*, *SŞ*, *ŞN*, *NJ*, *JM*, *MQ*, *QL*, *LF*, *FI*, *IÜ* hatlarını çekelim. Dik hatların uçları birleştirilirse *ÜŞJQF* eşkenar beşgeni oluşur. Böylece tabanları *ILMNS* beşgeniyle eşleşen 5 adet *ÜSI*, *FIL*, *QLM*, *JMN*, *ŞNS* eşkenar üçgen ve *KEZTH* beşgeniyle

1 Eğer küre yarıçapı r ise, sekiz yüzlü ayrıtı $KH = BD = b_8 = \sqrt{2}r$, sekiz yüzlü köşegeni ya da yüksekliği $AB = SN = 2r$ bulunur.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XVI. Önerme*'ye karşı düşer.

eşleşen 5 adet *ÜFI*, *FQL*, *QJM*, *JŞN*, *ŞÜS* eşkenar üçgen elde edilir.[1] *ÜKI* dik üçgeninde $\ddot{U}I^2 = (KI^2 + \ddot{U}K^2)$ ve *KI* hattı ongen ($= a_{10}$), *ÜK* hattı altıgen ($= a_6$) kenar uzunluğuna eşit olduğundan *ÜI* hattı *13. Önerme* gereği daire içindeki beşgenin kenar uzunluğuna eşittir ($a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$). Buna göre elde edilen 10 adet eşkenar üçgenin kenarları eşkenar beşgen ($= a_5$) kenarına eşittir.



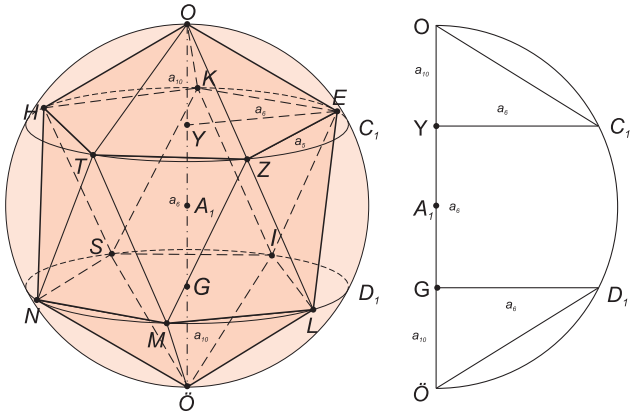
Şekil 18 (*Özgün çizim*).

Y daire merkezinde düzleme dik *ÖGYO* hattının üzerinde, bir tarafta altıgen kenarına eşit *YG* ($= a_6$) ve bunu takiben ongen kenarına eşit bir *GÖ* ($= a_{10}$) kısmını, diğer tarafta ongen kenarına eşit bir *YO* ($= a_{10}$) kısmını ayıralım.[2] *O* noktasıyla beşgenin *K*, *E*, *Z*, *T* ve *G* noktaları birleştirilerek eşkenar üçgenler oluşturulur. Aynı şekilde daire içindeki ikinci beşgen *I*, *L*, *M*, *N*, *S* noktaları da *Ö* noktasıyla birleştirilir ve neticede şekil tamamlanmış olur. *YOM* ve Δ(*GÖI*) üçgenlerinde de *Y* ve *G* açıları dik, *YM* ve *GK* hatları altıgen kenarına eşit ($= a_6$), $YO = G\ddot{O} = a_{10}$ ongen kenarına eşit olduğundan *OM* ve *Öİ* hatları *XII. Önerme* gereği a_5 beşgen kenarına eşittir. Buna göre Δ(*OKE*), Δ(*OEZ*), Δ(*OZT*), Δ(*OTH*), Δ(*OHK*) ve Δ(*ÖSİ*), Δ(*ÖİL*), Δ(*ÖLM*), Δ(*ÖMN*), Δ(*ÖNS*) üçgenleri de a_5 kenarlı eşkenar üçgenlerdir.

1 Burada *ÜSI, FIL, QLM, JMN, ŞNS* eşkenar üçgenleri *KSI, EIL, ZLM, TMN, HNS* eşkenar üçgenlerinin düzleme yatırılmış halini, buna karşın IÜF, LFQ, MQJ, NJŞ, SŞÜ eşkenar üçgenleri ise *IKE, LEZ, MZT, NTH, SHK* eşkenar üçgenlerinin çarpıtılarak düzleme yatırılmış haline karşı düşer. Diğer bir deyişle *KEZTH* ve *ÜFQJŞ* aynı beşgenin farklı iki gösterimini ifade eder.

2 Şekilde *ÖGYO* hattı kesik çizgilerle gösterilmiştir.

Böylece elde edilen 20 eşkenar üçgenden oluşan eşyüzlünün bir küre tarafından kapsandığını ya da bir küreye içten teğet olduğunu da göstermek gerekir. *YÖ* hattı *G* noktasıyla *12. Önerme* gereği altın oran oranında bölündüğü ve *YG* büyük kısım olduğundan için $YÖ \times GÖ = YG^2$ ayrıca $YG = YI$ $(= a_6)$ ve $GÖ = YO$ $(= a_{10})$ olduğundan $YÖ \times YO = YI^2$ yazılabilir. Şu halde $\angle(IYÖ) = \angle(IYO) = 90°$ nedeniyle, eğer *IÖ* hattı çekilirse, *OIÖ* ve *YIÖ* üçgenlerinin benzerliğinden, *OIÖ* açısının dik olduğu görülür. Aynı şekilde *OKÖ* açısının da dik olduğu gösterilebilir. Şu halde *OÖ* çapının tanımladığı yarı daire, *OÖ* ekseni etrafında çevrilirse, oluşan küre *K*, *I* ve diğer tüm yirmi eşyüzlü köşe noktalarından da geçer.



Şekil 18- 1 (Açıklayıcı şekil)

Son olarak yarıçapı rasyonel olarak verilen küreye içten teğet olan 20 yüzlüye ilişkin ayrıtın rasyonel olmayan *küçük* (*minör* adı verilen) bir doğruya eşitliğini göstermek gerekir. Eğer *Y*G hattının A_1 noktasıyla iki eşit kısma bölündüğü varsayılırsa, *G* noktası *ÖY* hattını altın oran oranında kestiğinden, 5. Önerme gereği $(ÖG + GA_1)^2 = ÖA_1{}^2 = 5\, A_1G$ ilişkisi yazılabilir (*Şekil 18-1*). Ayrıca $ÖO = 2ÖA_1$, $YG = 2A_1G$ olduğundan $OÖ^2 = 5YG^2$ geçerlidir. Ancak tanım gereği (*Şekil 18*) $AC = 4BC$ ve $AB = 5BC$ olduğuna göre, ayrıca $AB/BC = AB^2/(AB \times BC) = AB^2/BD^2 = 5$ ya da $AB^2 = 5BD^2$ ilişkisi geçerlidir. Yukarıda $OÖ^2 = 5YG^2$ ve $DB = YG = a_6$ olduğu bilindiğine göre $AB = OÖ$ ile *OÖ* hattının önermede verilen küre çapına eşit olduğu anlaşılır.

AB küre çapının rasyonel bir sayı olduğunu varsayalım. $AB^2 = 5BD^2$ olduğuna göre *KEZTH* dairesinin *BD* yarıçapı ve 2*BD* çapı da rasyoneldir. Ancak 15. Önerme gereği, eğer eşkenar bir beşken çapı rasyonel bir daireye içten teğetse, bu durumda beşgen kenarı rasyonel olmayan küçük (*minör*) bir doğruya eşittir. *KEZTH* beşgen kenarı eşyüzlü yirmiyüzlünün ayrıtına eşit olduğundan yirmiyüzlünün ayrıtı önermede öngörüldüğü gibi irrasyonel *küçük* (*minör* adı verilen) bir doğruya eşittir.[1]

Not: Burada çevre dairesi bir tepe noktası yerine (örneğin *E*) bir C_1 noktasından geçirilmiştir (*Şekil 18-1*). Bu nedenden dolayı a_6 beşgen yarıçapı, normalde olması öngörülen *r* küre yarıçapından, daire yarıçapların oranı nispetinde daha küçük bir sayı olarak elde edilir ($a_6 = \frac{2\sqrt{5}r}{5} = 0{,}89r < r$). Bu da cisim olarak "Su"ya nispet edilir.

***XX. Önerme*: Yüzeyleri eşkenar beşgenlerden oluşan bir düzgün oniki yüzlünün verilen bir küreye içten teğet yerleştirilmesi. Eğer rasyonel küre çapının kökü alınabilirse diğer bir deyişle rasyonelse, onikiyüzlünün ayrıtı irrasyonel *apotome* adı verilen bir doğruya eşittir.[2]**

Bir küreye içten teğet bir küpün birbirine dik karesel S(*ADCZ*) ve S(*AEBZ*) yüzeylerinin verildiğini varsayalım (*Şekil 19*). Küpün bu iki yüzeyine ilişkin kenarların *L*, *K*, *H*, *T*, *M*, *N* ve *S* noktalarında ikiye bölelim. Sonra bu noktaları kenarlara paralel *HL*, *KT*, *LN* ve *SM* hatlarıyla birleştirelim. Bu hatlar *ADCZ* yüzeyinde *F* ve *AEBZ* yüzeyinde *I* noktalarında kesişir.

TF, *KF* ve *LI* hatlarını *Q*, *J* ve *Ş* noktalarıyla altın oran nispetinde bölelim. Bölünen hatların uzun kısımları *FQ*, *FJ*, *IŞ* olsun. Sonra *Q*, *J* ve *Ş* noktalarından *QF* hattına eşit ve iki yüzeye dik *QU*, *JÖ* ve *ŞO* hatlarını, son olarak *AU*, *UÖ*, *ÖZ*, *ZO*, *OA* ve *AQ* hatlarını çekelim.

8. Önerme gereği altın orana göre bölünmüş[3] herhangi bir hatla kısa kısım kareleri toplamı, uzun kısım karesinin üç katına eşit olduğundan,

---

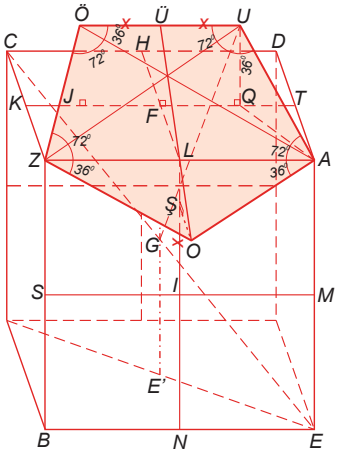
1 Eğer daire çapı $AB = 2r$ ise, bu durumda beşgen dairesinin yarıçapı $YE = a_6 = 2.r/\sqrt{5}$, *YE* yarıçaplı dairenin içinde ongen kenarı $a_{10} = KI = r.(\sqrt{5}-1)/\sqrt{5}$ ve yirmi yüzlünün ayrıtı beşgen kenarına eşittir $b_{20} = a_5 = \ddot{U}I = \sqrt{UK^2 + KI^2} = \left|r\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\right|/5$.

2 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XVII. Önerme*'ye karşı düşer.

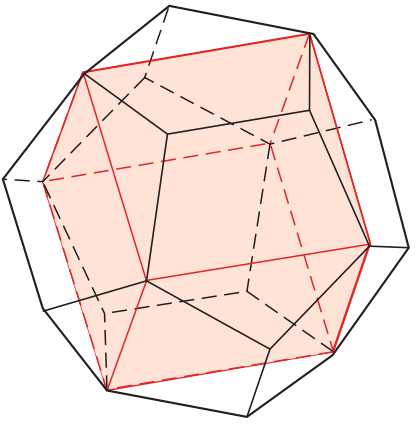
3 Altın oran nispetinde ayrılan bir hatta eğer $m > n$ hattın bölünen iki parçası ise, bu durumda $(m + n)/m = m/n$ ya da $\Phi = m/n = (1+\sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$ altın oran ilişkisi geçerlidir.

burada $(TF^2 + TQ^2) = 3.QF^2$ ya da $TF = AT$ ve $QF = QU$ olduğundan $(AT^2 + TQ^2) = 3.QU^2$ ilişkisi yazılabilir. Ancak $\Delta(ATQ)$ dik üçgeninde $(AT^2 + TQ^2) = AQ^2$ olduğundan $AQ^2 = 3.QF^2$ ya da $(AQ^2 + QF^2) = 4.QF^2$. Ayrıca $\Delta(AUQ)$ dik üçgeninde $(AQ^2 + QU^2) = (AQ^2 + QF^2) = AU^2$ olduğundan $AU^2 = 4.QF^2$ ya da karekökü alınırsa $AU = 2.QF$ bulunur. Ayrıca $2QF = QJ = UÖ$ ilişkileri nedeniyle $AU = UÖ$ olduğu görülür. Aynı şekilde, AO, OZ, $ÖZ$ doğrularının da AU, $UÖ$ doğrularına eşitliği gösterilebileceğinden, $AUÖZO$ beşgeninin eşkenar olduğu kanıtlanmış olur.

Sonra F noktasından QU ve $JÖ$ hatlarına paralel $FÜ$ hattı, $ÜL$ ve LO hatları çekilir. LI hattı varsayım gereği $Ş$ noktası tarafından altın oran nispetinde kesildiği ve $IŞ$ büyük kısım olduğundan $LI/IŞ = IŞ/ŞL$, burada $LI = LF$ ve $IŞ = ŞO = FÜ$ olduğundan $LF/FÜ = ŞO/ŞL$ oranları geçerlidir. Ayrıca $LF//ŞO$ ve $FÜ//ŞL$ olduğundan, $ÜFL$ ve $LŞO$ dik üçgenlerinin benzerliği nedeniyle $ÜLO$ bir düz hat üzerinde yer alır. Şu halde $AUÖZO$ eşkenar beşgeni ayrıca ALZ ve $ÜLO$ hatlarından oluşan bir düzlem üzerinde yer alır.



Şekil 19



Şekil 19-1(açıklayıcı şekil)

Varsayım gereği TF hattı Q noktasıyla altın oran nispetinde bölünür ve FQ uzun parçaya karşı düşer. $FQ = FJ$ olduğundan TJ hattı da F noktasıyla altın oran nispetinde bölünür. Yine *8. Önerme* gereği $(TJ^2 + FJ^2) = 3.TF^2$ ya da $FJ = JÖ$ ve $TF = AT$ olduğundan, $(TJ^2 + JÖ^2) = 3.AT^2$ yazılabilir. Bu

eşitliğin her iki tarafına AT^2 ilave edilirse, $(TJ^2 + J\ddot{O}^2 + AT^2) = 4.AT^2$ elde edilir. Ancak $\Delta(ATJ)$ ve $\Delta(AJ\ddot{O})$ dik üçgenleri nedeniyle eşitliğin sol tarafı $A\ddot{O}^2$ anlamına geldiğinden, bu ifade $A\ddot{O}^2 = 4.AT^2$ olarak yazılabilir. Ayrıca *AEBZ* ve *AZCD* karesel yüzeylerinde $AZ^2 = 4.AL^2 = 4.AT^2$ ve beşgen köşegenlerinin eşitliği nedeniyle $A\ddot{O} = AZ = ZU$ yazılabilir. Buna göre $\Delta(AZ\ddot{O})$ ve $\Delta(ZAU)$ üçgenleri ikizkenar olduğundan $\angle(AZ\ddot{O}) = \angle(Z\ddot{O}A) = \angle(ZAU) = \angle(ZUA)$ açıları eşittir. Buna göre *AUÖZO* beşgeninde kenar ve açılar eşittir. Benzer şekilde, küpün her bir ayrıtı üzerinde, eşkenar beşgenler kurulabilir.

Son olarak *ÜF* hattını küpün merkezine doğru küpün *CE* köşegenini *G* noktasında kesinceye kadar uzatalım. *G* noktası küpün *FE'* eksenini ikiye böler. Bu durumda *GÜ* hattı *F* noktasıyla altın oran nispetiyle bölünmüş olur ve $(G\ddot{U}^2 + F\ddot{U}^2) = 3.GF^2$ yazılabilir. Ayrıca $\Delta(G\ddot{U}\ddot{O})$ dik üçgeninde $G\ddot{O}^2 = (G\ddot{U}^2 + \ddot{O}\ddot{U}^2) = (G\ddot{U}^2 + F\ddot{U}^2)$ yazılabildiğine göre $G\ddot{O}^2 = 3.GF^2$ olduğu görülür. Buna göre *GÖ* küre yarıçapının karesi, *GF* yarı küp ayrıtı yarı karesinin üç katına eşittir ($r^2 = 3.b_6/2$). Böylece beşgen köşelerini *G* noktasına bağlayan hatların eşit oldukları kanıtlanmış olur.

Buna göre küpü çevreleyen küre oluşturulan onikiyüzlüyü de çevreler. Beşgenin kenar uzunluğu ($a_5 = b_{12}$) küp ayrıtının (b_6) altın oran nispetinde bölünen iki kısmından uzununa eşittir. Şu halde onikiyüzlünün ayrıtı (b_{12}) önerme gereği irrasyonel *apotome* adı verilen bir doğruya eşittir.

Not: Kurulan oniki yüzlünün ayrıtı ancak küpün kenarına ilişkin değer (b_6) rasyonelse belirlenebilir. Ne var ki burada küre çapının kökü söz konusudur. Ancak çapın karesi küp kenarı karesinin üç katına eşittir ve kökün bulunabilmesi için, bu sayının rasyonel bir sayı olması gerekir ($r^2 = 3.b_6/2$).

Biri uzunluk, diğeri kuvvet bakımından rasyonel olan iki hat, altın oran nispetinde bölündüğünde, diğer bir deyişle hatların uygun hisselerinin oranı ortak oranlı olması halinde, hattın parçaları bu koşulu sağlar. Sonuçta kurulan cismin ayrıtı ortak oranlı ayrılmış olur. İlerde açıklanacağı gibi, bu husus hatlar altın oran nispetinde bölündüğünde, parçaların da uygun oranda birbirlerine eşit olmasından kaynaklanır.[1]

1 Bunun için *XXI. Önerme*'nin sonundaki nota bakınız.

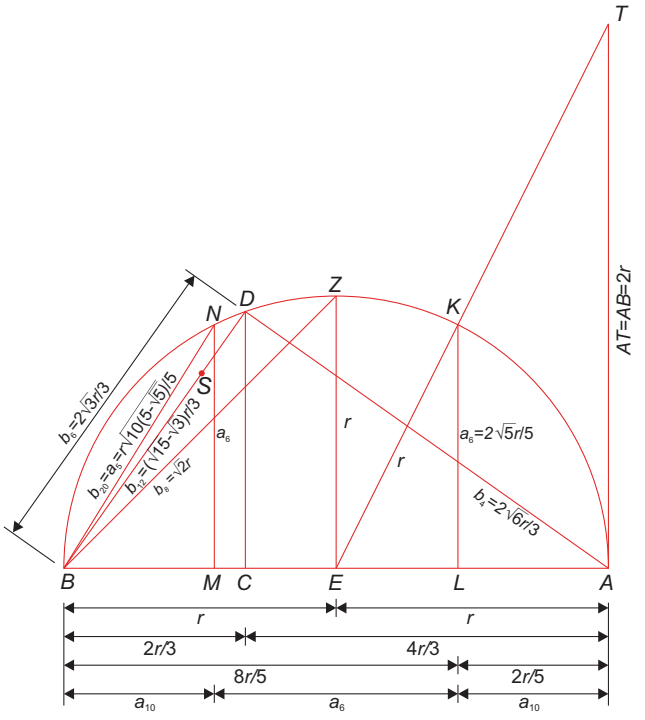
***XXI. Önerme*: Verilen bir küre içine içten teğet beş şekle ilişkin ayrıtların belirlenmesi ve karşılaştırılması.**[1]

AB hattı verilen küre çapını belirlemek üzere, bu hattın üzerine *AZB* yarım dairesini çizelim ve *AB* hattını *E* noktasında ikiye, *C* noktasında ise üçe bölelim (*Şekil 20*). Sonra *HZ*, *CD* diklerini ve *BZ*, *AD* ve *BD* hatlarını çekelim. Bu durumda *AD* küreye içten teğet eşken dörtyüzlü piramidin (b_4), *BF* altı yüzlü küpün (b_6), *BZ* ise eşken sekizyüzlünün (b_8) ayrıtına karşı düşer.

Uzunluğu *AB* hattının eşit olan *AT* dikini, *ET* hattını ve bu hattın daireyi kestiği *K* noktasından *AT* hattına paralel olan *KL* hattını çekelim. Bu durumda benzer *EKL* ve *ETA* dik üçgenlerinden $AT/AE = LK/LE$ oranları yazılabilir. Bu durumda $AT = 2.EA$ olduğundan $LK = 2.EL$ olur. Kareleri $AT^2 = 4.EA^2$ ve $LK^2 = 4.EL^2$ olduğundan $EK^2 = LK^2 + EL^2 = 4.EL^2 + EL^2 = 5.EL^2$ ya da $r = EK = AE$ olduğundan $AE^2 = 5.EL^2$ yazılabilir. Yukarıdaki oran çaprazlanır ve $AT = AB$ olduğu göz önünde bulundurulursa $AB/LK = AE/LE$ elde edilir. Bu oranın karesi alınırsa $AB^2/LK^2 = AE^2/EL^2 = 5$ ya da $AB^2 = 5.\ LK^2$, ya da *19. Önerme* gereği *LK* hattı eşkenar yirmi yüzlü yüzey üçgenlerinin içten teğet olduğu dairenin yarıçapı ya da yine bu daireye içten teğet eşkenar altıgen kenarına eşittir ($= a_6$).

Ayrıca $BC = (AB - AC) = (2.BE - 2.BC) = 2.CE$ olduğundan $AE = BE = (BC + CE) = 3.CE$ ya da $AE^2 = 9.CE^2$ ilişkisi yazılabilir. Ancak yukarıda $AE^2 = 5.EL^2$ olduğu bulunmuştu. Şu halde $EL = 3/\sqrt{5} \cong 1{,}34.CE$ ya da $EL > CE$ olur. *M* noktasını $EM = EL$ olacak şekilde belirleyelim ve *MN* dikini kaldıralım. Bu durumda daha önce $LK = 2.EL$ olduğu bilindiğine göre $ML = MN = LK$ ($= a_6$) ve simetri nedeniyle $LK = MN$ olduğu görülür.

1 Bu önerme Öklid'in özgün eserine *XVIII. Önerme*'ye karşı düşer.



Şekil 20

Yine *19. Önerme* gereği, *ML* (= a_6) hattı yirmi yüzlü küresi içine içten teğet altıgenin kenar uzunluğuna eşit olduğundan, *LA* ve *BM* hatlarının her biri aynı küreye içten teğet ongenin (a_{10}) kenar uzunluğuna karşı düşer. Eğer *BN* hattı çekilirse, $\Delta(BNM)$ dik üçgeninde $a_5^2 = (a_{10}^2 + a_6^2)$ ilişkisi nedeniyle, bu hattın uzunluğu daireye içten teğet beşgenin kenarı ve aynı zamanda yirmi eşyüzlünün ayrıtına eşit olur ($a_5 = b_{20}$).

Son olarak eğer *BD* hattı *S* noktasında altın oran nispetinde bölünürse, bu durumda 20. Önerme gereği, uzun kısım *BS* oniki yüzlünün ayrıtına eşit olur (b_{12}).

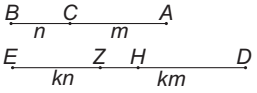
Şu halde karşılaştırılırsa *AD* (= b_4) dörtyüzlü ayrıtı, *BZ* (= b_8) sekizyüzlü ayrıtından daha uzun, *BZ* sekizyüzlü ayrıtı ise *BD* (= b_6) küpün ayrıtından, *BD* küp ayrıtı ise *BN* (= b_{20}) yirmiyüzlü ayrıtından, BN yirmiyüzlü ayrıtının ise *BS* (= b_{12}) onikiyüzlü ayrıtından daha uzun olduğu gösterilebilir. Çünkü

$AC^2 = 4.BC^2$ ayrıca $BD^2 = (BC \times AB) = (BC \times 3.BC) = 3.BC^2$ olduğundan $AC^2 = 4.BD/3$ ya da $AC > BD$ olduğu görülür. Buna göre $AM > AC$ hattı BD hattından çok daha büyüktür. AM ve BD hatlarının her biri altın oran oranında bölündüğü ve bunların uzun kısımları ML ve BS olduğundan $ML = MN > BS$ yazılabilir. Şu halde göstermeyi amaçladığımız gibi yirmi yüzlü ayrıtı BN ($= b_{20}$) oniki yüzlü ayrıtı BS ($= b_{12}$) hattından çok daha büyüktür.

Not: Yukarıda altın oran nispetinde bölünmüş olan hatların aynı oranda bölündükleri ifade edilmiş ancak bu husus kanıtlanmamıştır. Her ne kadar bu konu *14. Makale*nin sonunda tartışılacak olsa da, burada bir açıklama getirmeye çalışalım.

Örneğin AB ve DE hatlarının C ve Z noktalarında $AB/AC = DE/DZ$ oranında bölündüklerini varsayalım (*Şekil 21*). Bir an doğru oranın $AB/AC = DE/DH$ olduğunu varsayalım. Bu durumda fark alınırsa $(AB - AC)/AC = (DE - DH)/DH$ ya da $BC/AC = EH/DH$ elde edilir. Buna göre DH hattı da DE ve HE hatlarıyla altın oran nispetinde olmalıdır. Ne var ki $DZ^2 = (DE \times EZ)$ ilişkisinin sağlanması gerekirken bu durumda $DH^2 = (DE \times EH)$ ilişkisinin sağlanması gerekir ki, bu durumda ifadeler oranlandığında $DZ^2/DH^2 = EZ/EH$ olması gerekir. Ancak $DZ > DH$ ve $EZ < EH$ için bu oran gerçekleştirilemez.

Şu halde DE ancak AB hattının bölündüğü altın oran nispetinde bölünebilir.



Şekil 21

Görüldüğü gibi (*Şekil 19*'a bakınız) yirmi yüzlü cisme dıştan teğet kürenin çapı ($d = 2.r$) cismin dairesindeki altıgen kenarıyla (a_6) ongen kenarının (a_{10}) iki katının toplamına eşittir ($d = a_6 + 2.a_{10}$). Ongen kenarı altıgen kenarından kısa ve yarısından büyüktür ($a_6 > a_{10} > a_6/2$). Kürenin çapı (d) ongen kenarının (a_{10}) üç katından büyük ve dört katından küçüktür ($4.a_{10} > d > 3.a_{10}$). Bu ifadenin doğruluğunu geometrik kanıtlayalım: Kürenin çapı üzerinde ongen kenarına eşit olan BM parçasını ayıralım (*Şekil 20*). Bu

durumda $BC = AB/3$ olduğundan $BM < BC$ ilişkisi geçerlidir. Şu halde $d = AB = 3.BC > 3.BM = 3.a_{10}$ ve ayrıca $d = 2.(EL + LA)$ ile $EL < LA$ nedeniyle $d < 4.LA = 4.a_{10}$ eşitsizlikleri kanıtlanmış olur.

Makalenin Sonuna Sâbit'in Eklediği Hüküm: Burada verilen bu beş cismin dışında, bir küreye içten teğet eşkenar yüzeyli başka bir cisim oluşturulamaz. Bunun nedeni bir cisimsel açı kurmak için en az üç düzlemsel açıya ihtiyaç duyulmasıdır. Cisimsel açı oluşturmak için toplamı dört dik açıdan (360°'den) az olan düzlemsel açılar bulmak gerekir.

Eşkenar şekillerin ilki *eşkenar üçgen*dir. Onun her açısı dik açının 2/3'üne (60°/90° = 2/3) ve altı katı ise dört dik açıya (6.60° = 360°) eşittir. Buna göre cisimsel açı oluşturmak için açıların sayısı ikiden fazla, altıdan az olmalıdır. Eğer cisimsel açı oluşturmak için üç açı kullanılırsa piramit (3.60° = 180°), dört açı kullanılırsa sekizyüzlü (4.60° = 240°), beş yüzey kullanılırsa yirmi yüzlü (5.60° = 300°) cisim elde edilir.

İkinci eşkenar şekil *kare*nin açıları dik (90°) olduğundan cisimsel açı oluşturmak için düzlemsel açıların sayısı ikiden fazla ve dörtten az olması gerektiğinden burada oluşabilen tek cisim küptür (3.90° = 270°).

Ancak üçüncü eşkenar şekil *eşkenar beşgen*de her açı dik açının 6/5'ine (108°/90° = 6/5) eşittir. Bu açıların dördü dört dik açıdan fazla olduğundan (4.108° = 432° > 360°) bir cisimsel açı oluşturamaz. Burada oluşabilen tek cisim bir oniki yüzlüdür (3.108° = 324°).

Dördüncü eşkenar şekil olan eşkenar altıgende her açı dik açının 4/3'üne (120°/90° = 4/3) ve bunların üçü dört dik açıya eşit olduğundan (3.120° = 360°), eşkenar altıgenlerle cisimsel bir açı oluşturmak mümkün değildir.

Böylece bu sayılan beş cisimden başka kürede içten teğet eşkenar yüzeyli başka bir cisim kurmak mümkün değildir.

Not: Eğer cisim yüzey şekillerinin eşit olma koşulu göz önünde bulundurulmazsa bu durumda şekil açı türü de ikiden fazla olamaz, zira aksi halde cisim küreye içten teğet kılınamaz. Ayrıca cisimsel açının oluşmasına katkıda bulunan açıların sayısı da bir çift sayı oluşturmalıdır. Bu açıların türü dördü aşmaz. Çünkü sadece iki açıdan bir cisimsel açı oluşmaz ve

altı ya da altıdan çok açının toplamı da dört dik açıdan büyük olur. Bu iki koşulun aynı anda gerçekleşmesi için iki yüzey şeklinden biri kesinlikle eşkenar üçgen olmalıdır.

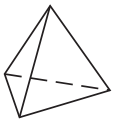
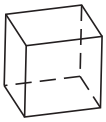
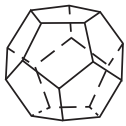
Eğer cisim eşkenar üçgen ve karelerden oluşuyorsa, bu durumda cisim *ondört yüzlüdür*; bunlardan sekizi eşkenar üçgen, altısı ise karedir. Bu durumda cisim bir sekiz yüzlü ve küpten oluşur. Ayrıtı ise kürenin büyük dairesine içten teğet altıgenin kenarına eşit olur.

Eğer cisim eşkenar üçgen ve beşgenlerden oluşuyorsa, bu durumda cisim *otuziki yüzlüdür*; bunlardan yirmisi eşkenar üçgen, on ikisi eşkenar beşgendir. Ayrıtı ise kürenin büyük dairesine içten teğet ongenin kenarına eşittir. Böylece küreye içten teğet cisimlerin sayısı yediye çıkmış olur.

EK[1]

Daireye içten teğet çokgenler (R dıştan teğet daire yarıçapı, r içten teğet daire yarıçapı)					
İsim	**Kiriş açısı** $360°/i$	**Kenar açısı** $180° - 360°/i$	**Kenar** a_i/R a_i/r	**Alan** S_i/R^2 S_i/r^2	**Görünüm**
Eşkenar üçgen $i = 3$	120°	60°	$\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}/4$ $3\sqrt{3}$	
Kare $i = 4$	90°	90°	$\sqrt{2}$ 2	2 4	
Eşkenar beşgen $i = 5$	72°	108°	$\sqrt{(5-\sqrt{5})/2}$ $2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $5\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	
Eşkenar altıgen $i = 6$	60°	120°	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 1	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$	
Eşkenar sekizgen $i = 8$	45°	135°	$\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ $2\sqrt{2}-1$	$2\sqrt{2}$ $8(\sqrt{2}-1)$	
Eşkenar ongen $i = 10$	36°	144°	$(\sqrt{5}-1)/2$ $\frac{2}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	

1 Ekteki tablolar bulunan değerleri toplu halde özetlemek amacıyla eseri çevirenler tarafından metne ilave edilmiştir.

Küreye içten teğet eşyüzlüler (*r* küre yarıçapı)					
Görünüm					
İsim (*İngilizce*)	**Dört yüzlü** (***Tetrahedron***)	**Küp, altı yüzlü** (***Cube***)	**Sekiz yüzlü** (***Octahedron***)	**Oniki yüzlü** (***Dodecahedron***)	**Yirmi yüzlü** (***Isosahedron***)
Yüzey Sayısı ***y***	4 eşkenar üçgen	6 kare	8 eşkenar üçgen	12 eşkenar beşgen	20 eşkenar üçgen
Köşe Sayısı ***k***	4	8	6	20	12
Ayrıt Sayısı ***n***	6	12	12	30	30
Ayrıt uzunluğu b_i	$(2\sqrt{6}/3).r$	$(2\sqrt{3}/3).r$	$\sqrt{2}.r$	$(\sqrt{15}-\sqrt{3})r/3$	$\left[\sqrt{10(5-\sqrt{5})}\right]r/3$
Toplam Alan S_i/b_i	$\sqrt{3}$	6	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{5(5+2\sqrt{5}}$	$5\sqrt{3}$
Hacim V_i/b_i^2	$\sqrt{2}/12$	1	$\sqrt{2}/3$	$5\sqrt{3}$	$5(3+\sqrt{5})/12$
Euler eşyüzlü kuralı: $y + k - n = 2$					

ON DÖRDÜNCÜ MAKALE

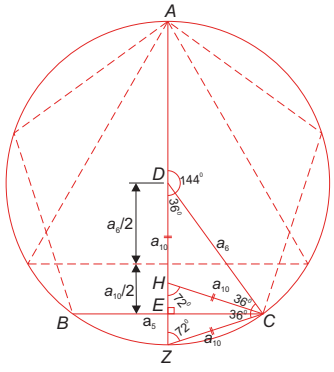
Bu makale kitaba El- Skalânus (Hypsicles) tarafından ilave edilmiştir.
10 önermeden oluşur.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Dairenin merkezinden daireye içten teğet beşgenin kenarına çekilen dik, aynı daireye içten teğet eşkenar altıgen ve ongen kenarları toplamının yarısına eşittir.**

Merkezi *D*, yarıçapı *DC* olan *ABC* dairesinde, bu daireye içten teğet bir *BC* beşgen kenarı ve bu kenara inilen *DEZ* diki verilmiştir (*Şekil 1*). *CZ* hattı ve bu hatta eşit olan *CH* hattını çekelim. Bu durumda *BC* bir beşgen kenarı olduğundan $\angle(ADC) = 4.\angle(CDZ)$ ve $\angle(AZC)$ bir çevre açısı olduğundan $\angle(ADC) = 2.\angle(DZC)$ ya da $\Delta(CHZ)$ bir ikizkenar üçgen olduğundan $\angle(ADC) = 2.\angle(CHZ)$ yazılabilir. Şu halde *CHZ* de bir ikizkenar üçgen olduğundan $\angle(CHZ) = \angle(CZH) = 2.\angle(CDH)$ yazılabilir. Buna göre $[\angle(HDC) + \angle(HCD)] = 2.\angle(HDC)$ ya da $\angle(HDC) = \angle(HCD)$ nedeniyle $CH = DH = CZ$ olduğu görülür. Eğer $CZ + ZE = DE$ ilişkisinin her iki tarafına *DE* ilave edilirse $(CZ + DZ) = 2.DE$ ifadesinden, burada *CZ* ongen (a_{10}) ve *DZ* altıgen (a_6) kenarı olduğundan, önerme kanıtlanmış olur $[DE = (CZ + DZ)/2 = (a_6 + a_{10})/2]$.

Not: Dairenin merkezinden ona içten teğet bir eşkenar üçgenin kenarına indirilen dik bir altıgen kenarının yarısına eşittir. Böylece beşgen kenarına inilen dik, bu dikle ongen kenarının yarısının toplamına eşittir.

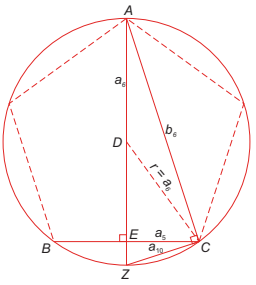


Şekil 1

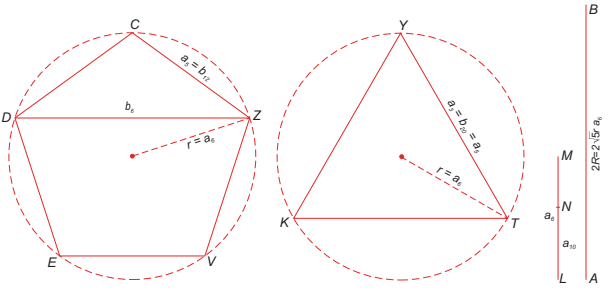
***II. Önerme*: Bir daireye içten teğet eşkenar beşgen kenarıyla eşkenar beşgen köşegeni kareleri toplamı daire yarıçapı karesinin beş katına eşittir.**

ABC dairesine içten teğet eşkenar beşgen kenarının *BC* ve köşegeninin *AC* olduğunu varsayalım (*Şekil 2*). Dairenin *ADZ* çapını çekelim, *C* ve *Z* noktalarını birleştirelim. Şüphesiz *CZ* hattı daireye içten teğet ongen kenarına (a_{10}) eşittir. *ACZ* dik üçgeninde ($AC^2 + CZ^2$) = $4.DZ^2$ ilişkisi yazılabilir. Bu ilişkinin her iki tarafına DZ^2 ilave edilirse ($AC^2 + CZ^2 + DZ^2$) = $5.DZ^2$ elde edilir. 13. Makalenin *XIII. Önerme*si gereği bir daireye içten teğet eşkenar beşgen kenarının karesi, aynı daireye içten teğet eşkenar altıgen ve ongen kenar karelerinin toplamına eşittir: $BC^2 = (DZ^2 + CZ^2)$ [ya da $a_5^2 = (a_6^2 + a_{10}^2)$]. Buna göre önermede öngörüldüğü gibi ($AC^2 + BC^2$) = $5.DZ^2$ ilişkisinin sağlandığı görülür.

Ancak Diğer bir deyişle bir küreye içten teğet küpün ayrıtı onikiyüzlü tabanının köşegenine eşit olduğundan ($AC = b_6$) küp ayrıtının karesi[1] ile onikiyüzlünün ayrıtı ($BC = a_5$) karesi toplamı içinde yer aldıkları daire yarıçapı ($DC = r$) karesinin beş katına eşittir ($b_6^2 + a_5^2 = 5.a_6^2 = 5.r^2$).



Şekil 2



Şekil 3

***III. Önerme*: Bir küreye içten teğet onikiyüzlünün beşgeniyle yirmiyüzlünün eşkenar üçgeni aynı daireye içten teğettir.**

Kürenin çapı *AB* (= 2.*R*), bu küreye içten teğet onikiyüzlünün bir eşkenar beşgeni *CDEVZ* ve aynı küreye içten teğet yirmiyüzlünün bir eşkenar üçgeni *YKT* verilmiş olsun (*Şekil 3*). Amaç bu iki şeklin aynı daireye içten teğet olduğunu kanıtlamaktır.

1 *R* yarıçaplı bir küreye içten teğet küpün ayrıtı $b_6 = 2\sqrt{3}.R/3$.

Küreye içten teğet oniki yüzlü beşgeninde DZ (= b_6) köşegeni aynı küreye içten teğet küpün ayrıtına eşittir. LM hattını $AB^2 = 5.LM$ olacak şekilde seçelim. *13. Makale 21. Önerme*de gösterildiği gibi yirmiyüzlü beşgenlerden oluşur ve LM (= $r_1 = a_6$) beşgenin beş köşesinden geçen bir dairenin yarıçapına eşittir. $AB^2 = 5.LM^2$ ya da küre çapının ($2.R$) karesi beşgeni oluşturan yirmiyüzlü dairesi yarıçapının (a_6) beş katına eşittir.

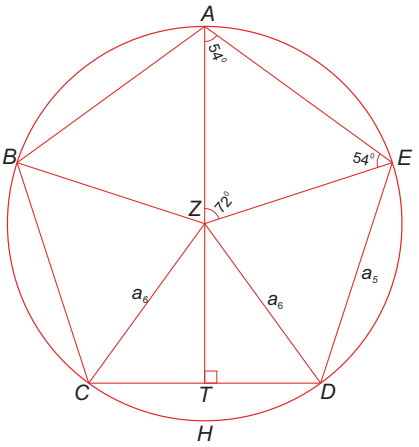
LM hattını N noktasıyla altın oran nispetinde bölelim. Bu hattın uzun LN kısmı LM yarıçaplı daireye içten teğet ongenin (a_{10}) kenar uzunluğuna eşittir. Ancak *13. Makale 15. Önerme* gereği küreye içten teğet küp ayrıtı (b_6) karesinin 3 katı içten teğet olduğu küre çapının ($2.R$) karesine eşit olduğundan $AB^2 = 3.DZ^2$ ya da $AB^2 = 5.LM^2 = 3.DZ^2$ ilişkisi geçerlidir.

N noktası LM hattını altın oran nispetinde böldüğü, ayrıca DZ ve DC hatları da altın oran nispetini sağladığından, $LM/LN = DZ/DC$ oranı $5.LM^2/5.LN^2 = 3.DZ^2/3.DC^2$ ya da $5.(LM^2 + LN^2) = 3.(DZ^2 + DC^2)$ ilişkisi yazılabilir. Ayrıca 13. Makale, *13. Önerme* gereği bir daireye içten teğet beşgen (a_5) kenarının karesi, aynı daireye içten teğet altıgen (a_6) ve ongenin (b_{10}) kenar karelerinin toplamına eşittir ($a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$). Ayrıca *13. Makale, 20. Önerme* gereği onikiyüzlü beşgeninin kenarı yirmi yüzlü ayrıtına eşit olduğundan $a_5^2 \equiv a_3^2 = YT^2 = LM^2 + LN^2$ ya da beşle çarpılırsa $5.LM^2 + 5.LN^2 = 5.YT^2$ elde edilir. Buna göre $5.YT^2 = 3.(DZ^2 + DC^2)$ elde edilir. Ancak 13. Makale *XI. Önerme* gereği bir daireye içten teğet bir eşkenar üçgende bir kenarın karesi yarıçap karesinin üç katına eşit olduğuna göre $5.YT^2 = 15.(YTK$ dairesi yarıçapı$)^2 = 15.r_2^2$ bulunur. Ayrıca 14. Makale, *II. Önerme* gereği beşgen köşegenle kenar kareleri toplamı dıştan teğet yarıçap karesinin beş katına eşittir ($b_6^2 + a_5^2 = 5.a_6^2 = 5.\ r_1^2$). Buna göre $5.YT^2 = 3.(DZ^2 + DC^2) = 15.(CDEVZ$ dairesi yarıçapı$)^2 = 15.r_1^2$ olduğundan önergenin öngördüğü gibi her iki dairenin yarıçapı eşittir ($r_1 = r_2$).

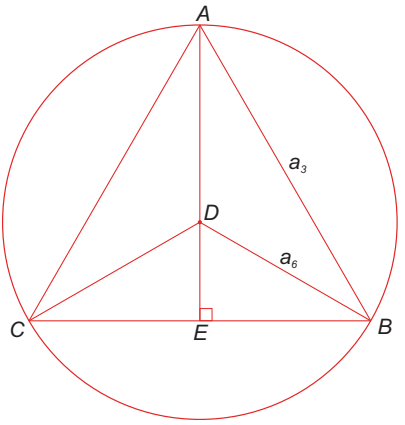
***IV. Önerme*: Bir onikiyüzlü yüzey eşkenar beşgeninin daire merkezinden beşgen kenarına çekilen dikin beşken kenarıyla çarpımının otuz katı oniki yüzlünün yüzey alanına eşittir.**

Bir $ABCDE$ onikiyüzlü eşkenar beşgeninde içten teğet olduğu AH dairesinin Z merkezinden CD beşken kenarına çekilen dikin ZT olduğunu

varsayalım (*Şekil 4*). Beşgende her biri *ZCD* üçgenine eşit olan 5 ikizkenar üçgen, onikiyüzlünün yüzeyinde ise toplam 12 × 5 = 60 ikizkenar üçgen bulunur. *ZT* dikiyle *CD* ayrıtının çarpımı iki üçgen alanına eşit olduğundan bunun 30 katı önermede öngörüldüğü gibi onikiyüzlünün tüm yüzey alanına eşit olur [S_{12} = 30.(*ZT* × *CD*)].



Şekil 4



Şekil5

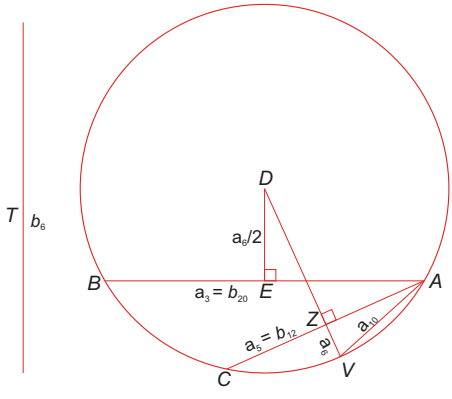
***V. Önerme*: Bir yirmiyüzlü yüzey eşkenar üçgeninin daire merkezinden üçgen kenarına çekilen dikin üçken kenarıyla çarpımının otuz katı oniki yüzlünün yüzey alanına eşittir.**

Bir yirmiyüzlü *ABC* eşkenar üçgeninin içten teğet olduğu *AH* dairesinin *D* merkezinden üçgen kenarına *DE* dikinin çekildiğini ve bunun *A* noktasına uzatıldığını varsayalım (*Şekil 5*). Bu durumda *ABC* üçgeni *DAB*, *DBC* ve *DCA* gibi birbirine eşit üç üçgene ayrılmış olur. Bu durumda (*DE* × *CB*) çarpımı bu üçgenlerin ikisinin alanına eşit olduğundan ve yirmiyüzlü alanı bu tür 20 üçgenden oluştuğu için toplam alan önermede öngörüldüğü gibi bu çarpımın 30 katına eşittir [S_{20} = 30.(*DE* × *CB*)].

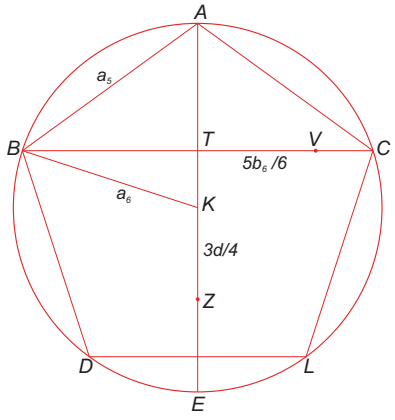
Şu halde, *IV. Önerme* göz önünde bulundurulursa, oniki ve yirmiyüzlü alanlarının oranı (*ZT* × *CD*) çarpımının (*DE* × *CB*) çarpımının oranına eşittir [S_{12}/S_{20} = (*ZT* × *CD*)/(*DE* × *CB*)].

***VI. Önerme*: Aynı küreye içten teğet onikiyüzlü alanının yirmiyüzlü alanına oranı o küreye içten teğet küp ayrıtının yirmiyüzlü yüzey üçgeni ayrıtı oranına eşittir.**

Onikiyüzlü eşkenar beşgeni ve yirmiyüzlü eşkenar üçgeninin D merkezli ABC dairesine içten teğet olduğunu varsayalım (*Şekil 6*). Burada AB hattı eşkenar üçgen ($a_3 = b_{20}$), AC eşkenar beşgen ($a_5 = b_{12}$) ve T küreye içten teğet küpün ayrıtını (b_6 ya da beşgen köşegenini) ifade etsin. AB hattına DE ve AC hattına DZ dikini çekerek V noktasına kadar uzatalım. AV hattını çekelim. Bu durumda *I. Önerme* gereği DZ hattı aynı daireye içten teğet eşkenar altıgen ve ongen kenarları toplamının yarısına eşit olduğundan $DZ = (DV + VA)/2$ $(a_6 + a_{10})/2)$ yazılabilir. Ayrıca bir daireye içten teğet eşkenar üçgene daire merkezinden üçgen kenarına inilen dikle daire yarıçapı arasında $DE = DV/2$ $(= a_6/2)$ ilişkisi geçerlidir. 13. Makale *XII. Önerme* gereği aynı daireye içten teğet bir eşkenar altıgen ve ongenin kenar uzunluklarının toplamından oluşan bir düz hat, bu kenarlar tarafından altın oran nispetinde bölünür ve büyük kısım altıgen kenarına karşı düşer. Bu ilişki şüphesiz ki yarı hatlar için de geçerlidir. 13. Makale *X. Önerme* gereği daireye içten teğet küp ayrıtı T de altın oran nispetinde bölünür ve büyük kısım AC hattına ya da beşgen ayrıtına (a_5) eşit olur. Buna göre $T/AC = DZ/DE$ ya da $(DE \times T) = (AC \times DZ)$. Ancak $T/AB = (DE \times T)/(DE \times AB)$ olduğundan bir önceki $(DE \times T)$ ifadesi uygulanırsa önermede öngörüldüğü gibi $T/AB = (AC \times DZ)/(DE \times AB) = S_{12}/S_{20}$ $(= b_6/b_{20})$ olduğu görülür.



Şekil 6



Şekil 7

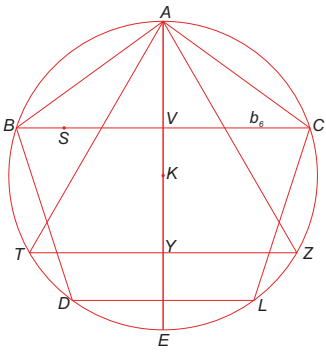
***VII. Önerme*: Bir daire çapının ¾'ü aynı daireye içten teğet eşkenar beşgen köşegeninin 5/6'sıyla çarpılırsa beşgenin alanı elde edilir.**

Bir K merkezli, AE çaplı daire ve bu daireye içten teğet $ABDLC$ beşgeninin verildiğini varsayalım (*Şekil 7*). KE yarıçapını Z noktasında iki eşit kısma bölelim. Bu durumda $AZ = ¾.AE$ olur. Sonra CT hattının 1/3'ne V noktasını yerleştirelim. Bu durumda $BV = 5/6.BC$ olur. Şu halde $AK = 2.KZ$ ve $AZ = ¾.KZ = 3/2.AK$, ayrıca $TC = 3.VC$ ve $TC = 3/2.TV$ yazılabilir. Buna göre $AZ/AK = 3/2 = TC/TV$ olduğundan $(AZ \times TV) = (AK \times CT) = (AK \times BT) = 2.S(ABK)$. Ancak $AK = 2/3.AZ$ olduğundan $(AK \times BT) = (2/3.AZ \times BT) = 2.S(ABK)$ ya da $(AZ \times BT) = 3.S(ABK)$ elde edilir. Eğer bu eşitliğe $(AZ \times TV) = 2.S(ABK)$ eşitliğini taraf tarafa ilave edersek önergede öngörüldüğü gibi $[(AZ \times BT) + (AZ \times TV)] = (AZ \times BV) = 5.S(ABK) = S_5$ ya da $(AZ \times BV) = (3.d/4 \times 5.b_6/6) = S_5$ olduğu kanıtlanmış olur.

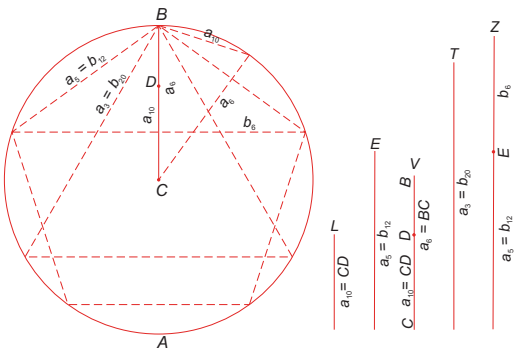
***VIII. Önerme*: Bir küreye içten teğet onikiyüzlü ile yirmiyüzlü alanlarının oranı aynı küreye içten teğet küp ayrıtının yirmiyüzlü ayrıtının oranına eşittir.**

Verilen K merkezli ve AE yarıçaplı bir dairede içten teğet bir ATZ eşkenar üçgeni, $ABDLC$ eşkenar beşgeni ve küpe içten teğet küpün ayrıtına eşit BC hattı ya da beşgen köşegeni verilmiş olsun (*Şekil 8*). AE ve BC hattı üzerine Y ve S noktalarını $AY = ¾.AK$ ve $CS = 5/6.BC$ olacak şekilde yerleştirelim. Bu durumda $KY = AK/2$ olduğundan Y noktası eşkenar üçgenin TZ hattı üzerinde bulunur.

7. Önerme gereği $(AY \times CS) = S_5$ ve $(AY \times TY) = S_3$ olduğundan $CS/TY = S_5/S_3$ yazılabilir. Ancak oniki yüzlü yüzeyi $S_{12} = 12.S_5 = 12.(AY \times CS)$ ve yirmi yüzlü yüzeyi $S_{20} = 20.S_3 = 20.(AY \times TY)$ olduğundan oranlanırsa $S_{12}/S_{20} = (12.CS)/(20.TY)$ bulunur. Burada $12.CS = 12.(5/6.BC) = 10.BC$ ve $20.TY = 10.TZ$ olduğundan önermede öngörüldüğü gibi $S_{12}/S_{20} = BC/TZ = b_6/b_{20}$ ilişkisinin geçerliliği kanıtlanmış olur.



Şekil 8



Şekil 9

***IX. Önerme:* Bir küreye içten teğet küp ve yirmiyüzlü ayrıtları oranı, altın oran nispetinde bölünmüş hatla uzun kısmının kareleri toplamı, aynı hatla küçük kısmının kareleri toplamı oranına eşittir.**

BC hattının *D* noktasıyla altın oran nispetinde bölündüğünü ve *DC* > *DB* olduğunu varsayalım (*Şekil 9*). Yarıçapı *BC* olan *AB* dairesini çizelim. Burada *T* hattı bu dairenin dıştan teğet olduğu eşkenar üçgenin ($a_3 = b_{20}$) kenarına, *E* hattı bu dairenin dıştan teğet olduğu eşkenar beşgenin köşegenine ($a_5 = b_{12}$), *L* hattı daire içine çizilen bir ongen kenarına ($CD = a_{10}$), *V* hattı ise yine aynı daireye içten teğet altıgen kenarına ($a_6 = BC$) eşit olsun. Son olarak *Z* hattı küreye içten teğet küpün ayrıtı (b_6) olarak alınır.

13. Makale *XI. Önerme* gereği bir daireye içten teğet bir eşkenar üçgende ($a_3 = b_{20} = T$) bir kenarın karesi daire yarıçapı ($BC = r = a_6$) karesinin üç katına eşittir: $T^2 = 3.BC^2 = 3.V^2$. Ayrıca 13. Makale *VIII. Önerme* gereği altın orana göre bölünmüş herhangi bir hattın (*CB*) ve kısa kısmın (*BD*) kareleri toplamı, uzun kısım (*CD*) karesinin üç katına eşittir: $(BC^2 + BD^2) = 3.CD^2 = L^2$. Eğer bu son iki ifade 3'e göre düzenlenir ve eşitlenirse $T^2/BC^2 = (BC^2 + BD^2)/CD^2$ ya da $T^2/(BC^2 + BD^2) = BC^2/CD^2 = V^2/L^2$ geçerlidir. Ayrıca *V* ve *Z* hatların *L* ve *E* noktalarıyla altın orana göre oranlanması nedeniyle $V/L = Z/E$ ilişkisi, oran karekök içinde geçerli olduğundan, $Z^2/T^2 = Z/T = E^2/(BC^2 + BD^2)$ yazılabilir.

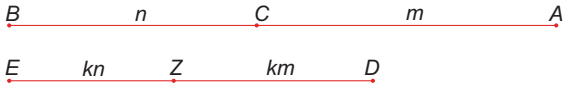
13. Makale *XIII. Önerme* gereği bir daireye içten teğet eşkenar beşgen kenarının (a_5) karesi, aynı daireye içten teğet eşkenar altıgen (a_6) ve ongen kenar (a_{10}) karelerinin toplamına eşittir ($a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$). Diğer bir deyişle $E^2 = (BC^2 + CD^2)$ ifadesi yukarıdaki ilişkiye uygulanırsa, önermenin öngördüğü gibi $Z/T\ (= b_6/b_{20}) = (BC^2 + CD^2)/(BC^2 + BD^2)$ ilişkisinin geçerli olduğu kanıtlanmış olur.

*No*t: Bu önerme *L* hattına ihtiyaç duymaksızın *BC* hattının uzun *CD* parçası yardımıyla da kanıtlanabilir.

***Numarasız Önerme*: Bir küreye içten teğet onikiyüzlü cismin yirmiyüzlü cisme oranı, küreye içten teğet küp ayrıtının yirmiyüzlü ayrıtının oranına eşittir.**

Eğer oniki ve yirmiyüzlü iki cismin köşeleri küre merkeziyle birleştirilirse, tabanları eşkenar beşken ve üçgenlerden oluşan piramitler oluşur. *III. Önerme* gereği bir küreye içten teğet onikiyüzlü beşgen ve yirmiyüzlü eşkenar üçgen yüzeyler aynı daireye içten teğet olduğundan onların merkeze olan mesafeleri ve ayrıca merkezden taban yüzeylerine inilen diklerin boyları birbirine eşittir. Eşit hacimli piramitlerde yüksekliklerin oranı tabanların oranına eşittir. Buna göre piramit hacimlerinin oranı, piramit yüzeylerinin oranına, ya da taban alanların oranına, diğer bir deyişle önermede öngörüldüğü gibi küp ayrıtının ($b_{12} = b_6$) yirmiyüzlü ayrıtının (b_{20}) oranına eşittir ($V_{12}/V_{20} = S_{12}/S_{20} = b_{12}/b_{20} = b_6/b_{20}$).

***X. Önerme*: Altın oran nispetinde bölünen hatlara yine altın oran nispetinde bölünen hatlar ilave edildiğinde oran değişmez.**



Şekil 10

AB ve *DE* hatlarının *AC* > *BC* ve *DZ* > *EE* olmak üzere *C* ve *Z* noktalarıyla altın oran nispetinde bölündüklerini varsayalım (*Şekil 10*). Buna göre $AB/AC = AC/BC$ ve $DE/DZ = DZ/EZ$ ilişkileri geçerlidir. Buna göre $(AB \times BC)/AC^2 = (DE \times EZ)/DZ^2$ ya da $4.(AB \times BC)/AC^2 = 4.(DE \times EZ)/DZ^2$ ya

da toplama kuralı uygulanırsa $[4.(AB \times BC) + AC^2]/AC^2 += [4.(DE \times EZ) + DZ^2]/DZ^2$yazılabilir. 2. Makale *VIII. Önerme* gereği bir hattın bir kısmıyla çarpımının dört katı diğer kısmının karesiyle toplamı, hattın birinci kısmıyla toplamının karesine eşittir. Buna göre elde edilen $(AB + BC)^2/AC^2 = (DE + EZ)^2/DZ^2$ ifadenin karekökü alınırsa $(AB + BC)/AC = (DE + EZ)/DZ$ ya da toplama kuralı uygulanırsa $(AB + BC + AC)/AC = (DE + EZ + DZ)/DZ$ yazılabilir. Buna göre $2.AB/AC = 2.DE/DZ$ ya da $AB/AC = DE/DZ$ elde edilir, diğer bir deyişle önerme gereği eşit altın oranlı hatlar birbirlerine ilave edilebilir.

Not 1: Bu önermenin tersi 10. Makalenin sonunda açıklanmıştı. Bu önermeden açıklığa kavuşur ki herhangi bir altın oran nispetinde bölünen hattın karesiyle onun uzun kısmı karesinin toplamına eşit olan hat, o hattın karesiyle onun kısa kısmı karesi toplamına eşit olan hattın oranı:

1- Küreye içten teğet küp ayrıtının yirmiyüzlü ayrıtı oranına eşittir.
2- Küreye içten teğet onikiyüzlü alanının yirmiyüzlü alanı oranına eşittir.
3- Küreye içten teğet onikiyüzlü hacminin yirmiyüzlü hacmi oranına eşittir.

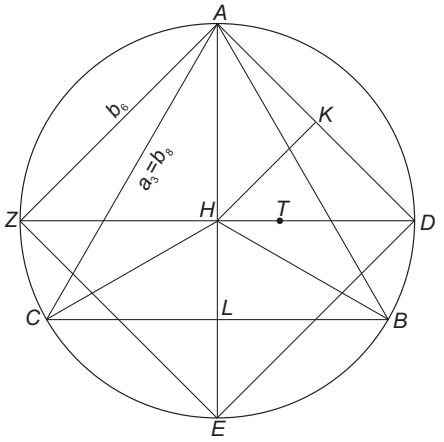
Not 2: Buna benzer oranlar aynı küreye içten teğet olan küp ve sekizyüzlü arasında da söz konusudur:

A- Bu iki cismin tabanları aynı daireye içten teğet olduğu açıktır. *13. Makale*, *17. Önerme gereği* verilen bir küreye içten teğet bir küp ayrıtının karesi küre çapı karesinin 1/3'üne eşittir ($b_6^2 = a_4^2 = d/3$). Bir kareyi çevreleyen dairenin yarıçap karesi ise kare kenarı karesinin yarısına eşit olduğundan ($r^2 = a_4/2$) küp tabanının çevrelediği dairenin yarıçap karesi küre çapı karesinin 1/6'ne eşittir ($r^2 = d^2/6$).

Benzer şekilde sekizyüzlü ayrıtının karesi içten teğet olduğu küre çapı karesinin yarısına eşittir ($b_8^2 = a_4^2 = r^2/2$).

Bir eşkenar üçgenin çevreleyen dairenin yarıçap karesi, eşkenar üçgen kenarı karesinin 1/3'üne eşittir ($r^2 = a_3^2/3$). Şu halde yukarıda belirtildiği gibi sekizyüzlü tabanının ($b_8 = a_4$) içten teğet olduğu dairenin yarıçap karesi onun içten teğet olduğu küre çapı karesinin 1/6 kadardır ($r^2 = d^2/6$). Buna

göre bu iki cismin (küp ve sekizyüzlü) içten teğet olduğu kürelerin eşitliği halinde, tabanlarının (kare ve eşkenar üçgen) içten teğet olduğu daireler de eşit olur.



Şekil 11

Merkezi *H* noktası, çapı *AE* olan bu daireyi çizelim, üzerine sekizyüzlünün *ABC* eşkenar taban üçgenini ve küpün *ADEZ* taban karesini yerleştirelim. *AD* hattına dik *HK* hattını, *HB* ve *HC* yarıçaplarını çekelim. Bu durumda $(HK \times AD) = 2.S(AZD)$, ayrıca $2.(HK \times AD) = S(AZED)$ ve küpün toplam yüzeyi $S_6 = 12.(HK \times AD)$ olarak elde edilir. Aynı şekilde $(HL \times BC) = 2.S(HBC)$ olduğundan ve sekiz yüzlüde 24 adet *HBC* üçgeni bulunduğundan, sekizyüzlünün toplam yüzeyi $S_8 = 12.(DL \times BC)$ olarak elde edilir. Buna göre aynı küreye içten teğet küp ve sekizyüzlü cisimlerin yüzey oranı $S_6/S_8 = (HK \times AD)/(DL \times BC)$ olarak elde edilir.

Ayrıca $AH^2 = 2.HK^2$ ve $HE = 2.HL$ olduğuna göre $HE^2 = 4.HL^2$ ya da $HE = AH$ olduğundan $AH^2 = 4.HL^2$ yazılabilir. Eğer $HK^2 = AH^2/2 = 2.HL^2$ ilk ilişkiyle oranlanır $AH^2/HK^2 = HK^2/HL^2$ ve karekökü alınırsa $AH/HK = HK/HL$ elde edilir. Bu ise $(HL \times AH) = HK^2 = (HK \times AK)$ ya da 2 ile çarpılırsa $(HL \times 2.AH) = (HK \times 2.AK)$ veya $(HL \times AE) = (HK \times AD)$ anlamına gelir. Bu ifade küp ve sekizyüzlü cisimlerin oranına uygulanırsa $S_6/S_8 = (HK{\times}AD)/(HL{\times}BC) = (HL{\times}AE)/(HL{\times}BC) = AE/BC$ bulunur. Burada *AE* karenin köşegeni, *BC* ise eşkenar üçgenin kenarıdır.

B- Bu sonuca başka bir yol izlenerek de varmak mümkündür: *HD* hattını *T* noktasıyla *HT* = *HD*/3 olacak şekilde ayıralım. Bu durumda *HZ*/*TZ* = ¾ ve *AL*/*AE* = ¾ olduğundan *HZ*/*TZ* = *AL*/*AE* ya da (*HZ* × *AE*) = (*AL* × *TZ*) yazılabilir. Şu halde (*HZ* × *AE*) = S(*ADEZ*) = (*AL* × *TZ*) olduğundan, küp toplam alanının S_6 = 6.S(*ADEZ*) = 6.(*AL* × *TZ*) ve sekizyüzlü alanının S_8 = 4.(*AL* × *BC*) olduğu görülür. Neticede:

1- Küp ve sekizyüzlü alanlarının oranı S_6/S_8 = 6.(*AL* × *TZ*)/4.(*AL* × *BC*) = 3.*TZ*/2.*BC* ve ayrıca 3.*TZ* = 4.*HZ* =2.*AE* ve AE^2/BC^2 = 4/3 olduğundan $S_6/S_8 = AE/BC = 2/\sqrt{3}$ bulunur.

2- Ayrıca eğer *AH* = *r* olduğu göz önünde bulundurulursa küp ve sekizyüzlü hacimlerinin oranı $V_6/V_8 = (\sqrt{2}.r)^3/(2.r^3) = \sqrt{2}$ olarak hesaplanır.

3- *ACL* dik üçgeninde AC^2 = (*AE* × *AL*) ya da *AC* = b_4 dörtyüzlü ayrıtı veya a_3 eşkenar üçgen kenarı, *AE* = *d* çap olmak üzere $b_3^2 = ¾.d^2$ yazılabilir. Buna göre herhangi bir daire çap karesinin ¾'ü, o daireye içten teğet eşkenar üçgen kenarının karesine eşittir.

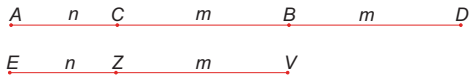
ON BEŞİNCİ MAKALE

Küreye içten teğet beş cismi konu edinen bu makale es-Skalânus'a (Hypsicles) aittir.
6 önermeden oluşur.

ÖNERMELER

***I. Önerme*: Eğer daireye içten teğet bir eşkenar altıgenin kenarı altın oran nispetinde bölünmüşse, onun uzun kısmı aynı daireye içten teğet eşkenar ongenin kenarına eşittir.**

Bir altıgenin kenarına karşı düşen *AB* hattının *C* noktasıyla altın oran nispetinde bölündüğünü ve *BC* > *AC* olduğunu varsayalım (*Şekil 1*). Eğer *AB* hattının ongen kenarına eşit olduğu belirtilen *BD* = *BC* hattı ilave edilirse, bu durumda *AD* hattı da *B* noktasıyla altın oran nispetinde bölünmüş olur.



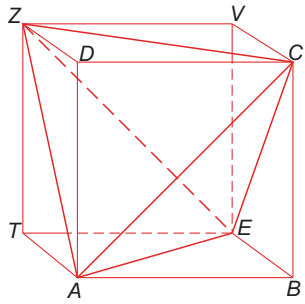
Şekil 1

EV hattının *AB* hattına eşit olduğunu ve *Z* noktasında *AB* gibi altın oran nispetinde bölündüğünü varsayalım. Bu durumda *BC* = *BD* = *ZV* olduğundan *AD*/*AB* = *EV*/*ZV* yazılabilir. Eğer oranlar ayrılır (*AB* + *BD*)/*AB* = *(EZ* + *ZV)*/*ZV* ve toplamlar sadeleştirilirse *BD*/*AB* = *EZ*/*ZV* ya da (*AB* × *EZ*) = (*BD* × *ZV*) ifadesi elde edilir. Ancak *AB* = *EV* olduğundan (*EV* × *EZ*) = (*BD* × *ZV*) yazılabilir. Ne var ki altın oran gereği (*EV* × *EZ*) = ZV^2 olduğundan ZV^2 = (*BD* × *ZV*) ya da *ZV* = *BD* = *ZV* ve neticede *BC* hattı ongen ayrıtına eşit olduğu görülür.

Not: Bu önermeye burada gerek duyulmadığından daha önceki incelemelerden sehven buraya yazılmış olmalıdır. Ayrıca bu önermeyi kanıtlamak için *EV* hattına da gerek yoktur. *AB*/*BC* = *AD*/*AB* ve *AC*/*BC* = *BD*/*AB* oranları yazıldığında ilk ifadeden (*AD* × *BC*) = AB^2 ve ikinci ifadeden (*AC* × *AB*) = (*BD* × *BC*) ve altın oran olması nedeniyle *BC* = *BD* olması gerektiği açıkça görülür.

***II. Önerme*: Bir küpe içten teğet dörtyüzlü piramit oluşturulması.**

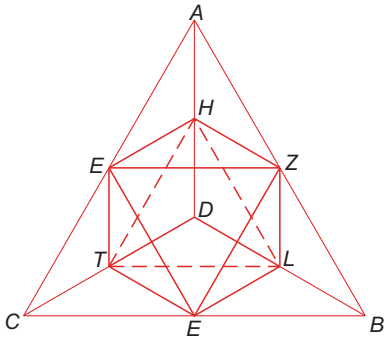
Bir *ABCDTEVZ* küpünün verildiğini varsayalım (*Şekil 2*). Bu durumda *AE*, *AC*, *AZ*, *CE*, *CD* ve *EZ* hatlarını çekelim. Çekilen tüm hatlar küpün köşegenlerine eşit olduğundan *ACEZ* cismi önermede öngörülen dörtyüzlü piramide karşı düşer.



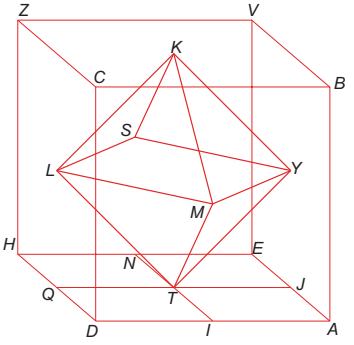
Şekil 2

***III. Önerme*: Bir dörtyüzlü piramide içten teğet sekizyüzlü oluşturulması.**

Bir dörtyüzlü *ABCD* piramidinin verildiğini varsayalım (*Şekil 3*). Bu piramit ayrıtları yarıya bölünür ve bu noktalar birleştirilirse elde edilen *HEZTEL* cismi önermede öngörülen sekizyüzlüdür.



Şekil 3



Şekil 4

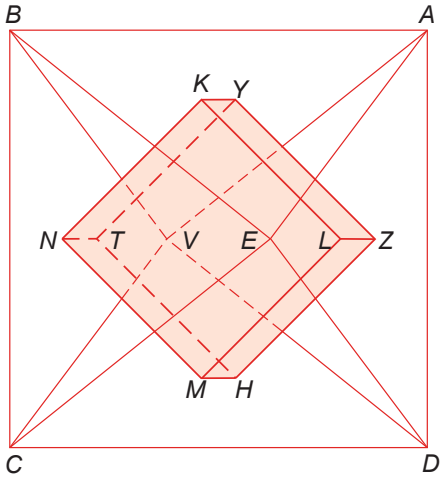
***IV. Önerme*: Bir küpe içten teğet sekizyüzlünün oluşturulması.**

Bir *ABCDEVZH* küpünün verildiğini varsayalım (*Şekil 4*). Küpün yüzeyinde köşegenlerin kesiştiği noktaları birleştirelim. Bu durumda elde edilen *KLMYST* cismi önermede bulunması öngörülen sekizyüzlüdür.

Eğer *T* noktasından *AD* ve *AE* hattına paralel *JQ* ve *IN* hatları çekilir ve bu işlem diğer sekizyüzlü köşeleri için tekrarlanırsa, birbirine eşit, küpün ayrıtlarına dik hatlar elde edilir. Sekizyüzlü ayrıtları bu hatların hipotenüsüne (karşı kenarına) karşı düşer.

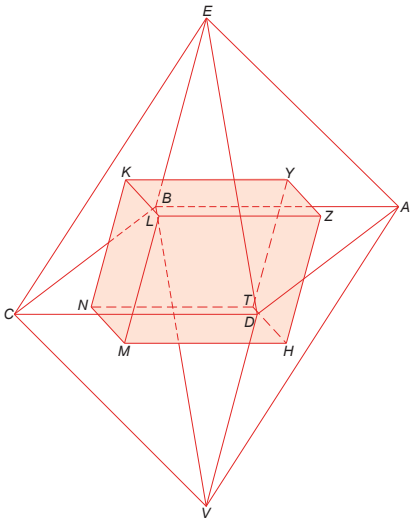
***V. Önerme*: Bir sekizyüzlüye içten teğet küp oluşturulması.**

Bir *ABCDEV* sekizyüzlünün verildiğini varsayalım (*Şekil 5*). Eğer eşkenar üçgenlerin merkezleri belirlenir ve bunlar birleştirilirse önermede öngörülen *KLMNYZHT* küpü elde edilmiş olur.



Şekil 5 (Özgün soyut çizim)

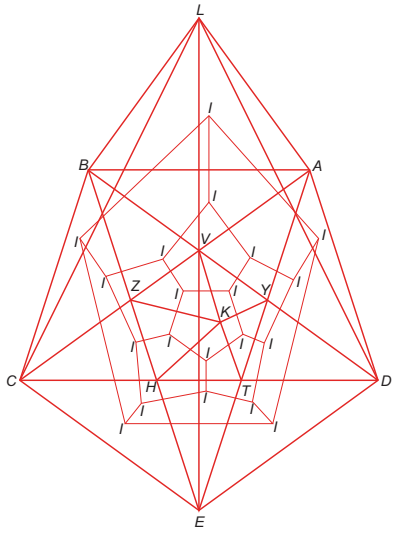
Eğer eşkenar üçgenlerin merkezlerinden kenarlarına dikler inilirse, bu diklerin boyları ve aralarındaki açılar da eşit olur. Ayrıca sekizyüzlünün yüzleri arasındaki açılar diğer yüzler arasındaki açılara eşit olduğundan bu açıların karşısındaki kenarlar da eşittir ve elde edilen dört kiriş bir düzlem oluşturur. Eğer merkezle açıların uçları birleştirilirse bu hatlar ve onların arasında kalan açılar da eşit olduğundan her iki dörtyüzlünün köşegenleri de eşit olur. Böylece dörtyüzlülerin her bir açısı da dik olduğundan elde edilen cisim önermede öngörüldüğü gibi bir küptür.



Şekil A5-1 (Açıklayıcı perspektif şekil)

***VI. Önerme*: Bir yirmi yüzlüye içten teğet onikiyüzlü oluşturulması.**

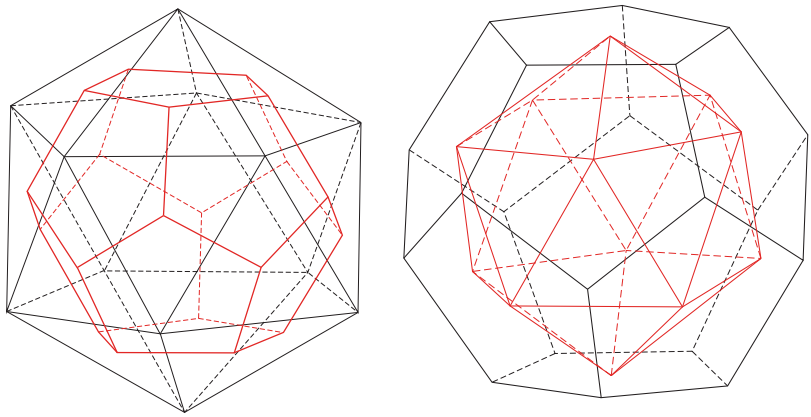
Bir *LABCEDYVZHTK* yirmi yüzlünün verildiğini varsayalım (*Şekil 6*). Eğer *I* ile işaretlenmiş yirmiyüzlü merkezleri hatlarla birleştirilirse önermede amaçlanan oniki yüzlü şekil elde edilmiş olur.



Şekil 6 (Özgün soyut çizim)

Eğer eşkenar üçgenlerin merkezlerinden kenarlarına dikler inilirse, bu diklerin boyları aynı olur. Ayrıca bu dikler arasındaki açılar da eşit olduğundan bunlara ilişkin kirişler de eşittir. Her beş kiriş bir düzlem oluşturur. Sonra yirmiyüzlünün köşegenleri çekilirse bu köşegenlerin karşılıklı açıların köşelerinden geçtiği görülür. Eğer bu köşegenlerin orta noktalarından açıları köşegenle komşu olan beşgenlere dikler çekilirse bu diklerin üçgenlerin merkezinden geçtiği ve birbirine eşit olduğu görülür. Bu diklerin düzlemle kesişme noktalarından köşegene dikler indirilirse, bu dikler aynı noktada buluşur ve bu nedenden de merkezleri birleştiren beş hat aynı düzlem üzerinde bulunur.

Üçgen merkezlerinden çekilen diklerin kesişme noktalarına olan mesafeler eşit olduğundan beşgenlerin kenarları eşittir. Ayrıca açıları eşit olan beşgenlerin herhangi üç açısı bir cisimsel açı oluşturduğundan gerçekleştirilen cismin açıları da eşittir.



Şekil A6-1 ve A6-2 (Açıklayıcı perspektif şekil:12 yüzlüye içten teğet 20 yüzlü ve 20 yüzlüye içten teğet 12 yüzlü)

Not: Aynı yöntem uygulanarak bir oniki yüzlüye içten teğet bir yirmi yüzlü de oluşturmak mümkündür (*Şekil A6-2*). Bu iki cismin her birinin açı sayısı diğerinin yüzey sayısına eşittir.

Bu kitabı gönlüm istediği gibi yazıp bitirdiğim için Allah'a şükrederim. Allah'ın izniyle bu kitabın istinsahı 849 (1445/46) senesinde tamamlandı.